

PWM 开关变换器的符号分析*

Symbolic Analysis of PWM Switching Power Converters

林波涛 丘水生

(华南理工大学无线电工程系, 广州 510641)**

【提要】 本文将等效小参量法^[6], 推广到断续电流模式(DCM)工作的或多个开关拓扑的开关变换器的分析中, 可获得全符号表示的直流解及纹波解。

关键词: 开关变换器, 断续电流模式, 多开关拓扑, 符号分析

Abstract: In this paper, Equivalent Small Parameter Method(an improved perturbation technique)^[6] is utilized to analyze the PWM converters containing multi working stages, such as cosverters in discontinuous conduction mode(DCM) or with multi switches. The solutions are all the symbolic expressions.

Key words: Switching power converters, Discontinuous conduction mode, Multi working stages, Symbolic analysis

一、引言

开关功率变换器的解析方法主要有两类: 简化的状态空间平均法^[2,3,7]和一般化的平均法^[4,5]. 前者不适用于开关频率较低的情况, 也无法求出输出纹波. 后者应用于稳态分析时过于繁琐, 且尚未得到基本开关变换器输出纹波的解析公式. 等效小参量法^[6]是一种精度高而且分析过程简单的符号分析算法, 适于强非线性高阶系统的分析. 文献[1]已成功地将它应用于连续电流模式(CCM)工作的开关变换器的分析. 本文则进一步将等效小参量法推广于多拓扑 PWM 开关变换器的分析(包括 DCM 工作的变换器及多个开关的变换器两种情形), 并首次获得其纹波解析解. 结果表明, 即使开关频率较低、纹波较大, 所得结果仍有较高精度. 新方法便于在符号仿真中应用.

二、分析原理

对于一个周期有 3 个拓扑的开关变换器(对于

有更多拓扑的开关变换器, 方法类似), 可表示为:

$$G_1(p)X + G_2(p)f + G_3(p)h = u \quad (1)$$

其中 $p = d/dt$, $G_i(p)$ ($i=1, 2, 3$) 是算子矩阵, u, e_2, e_3 是常数向量, X 是变换器的状态变量. 而

$$f = \delta(A_2X + e_2) \quad (2)$$

$$h = \theta(A_3X + e_3) \quad (3)$$

稳态工作时, δ, θ 是以 T 为周期的周期函数, 在一个周期内, 它们的定义是

$$\delta = \begin{cases} 1, & [0, D_1T] \\ 0, & [D_1T, (D_1+D_2)T] \\ 0, & [(D_1+D_2)T, T] \end{cases}$$
$$\theta = \begin{cases} 0, & [0, D_1T] \\ 1, & [D_1T, (D_1+D_2)T] \\ 0, & [(D_1+D_2)T, T] \end{cases}$$

式中: T 是开关周期, 而 D_1, D_2 分别是第一、第二个工作阶段的占空比(即在一个开关周期内, 该工作阶段的工作时间与开关周期 T 的比值. 参见第二部分的例子). 本文将等效小参量原理^[1,6]推广应用于式(1), 求 X 的稳态周期解.

* 1995 年 3 月收到, 1995 年 8 月定稿. 广东省自然科学基金和高校博士点学科专项基金资助项目

** Lin Botao, Qiu Shui-Sheng (Dept. of Radio Eng., South China Univ. of Tech., Guangzhou 510641)

令 $f_s = 1/T$, $\tau = 2\pi f_s t$, 因 δ, θ 是周期函数, 所以可用傅氏级数表示为

$$\delta = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (b_m e^{jm\tau} + \bar{b}_m e^{-jm\tau}) \quad (4)$$

$$\theta = l_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (l_m e^{jm\tau} + \bar{l}_m e^{-jm\tau}) \quad (5)$$

其中 $\bar{b}_m, \bar{l}_m$ 分别是 b_m, l_m 的共轭复数(下同), 而

$$b_0 = D_1, b_m = \frac{1}{2} (a_m - j\beta_m),$$

$$a_m = \frac{\sin 2D_1 m\pi}{m\pi}, \beta_m = \frac{1 - \cos 2D_1 m\pi}{m\pi},$$

$$l_0 = D_2, l_m = \frac{1}{2} (\rho_m - j\sigma_m),$$

$$\rho_m = \frac{\sin 2(D_1 + D_2)m\pi - \sin 2D_1 m\pi}{m\pi},$$

$$\sigma_m = \frac{\cos 2D_1 m\pi - \cos 2(D_1 + D_2)m\pi}{m\pi}.$$

设
$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i X_i \quad (6)$$

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i f_i, h = h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i h_i \quad (7)$$

其中 $\epsilon = 1$, 不是小量, 而是小量的标记^[6]. 因要求 X 的周期解, 故可设

$$X_0 = \sum_{n \in E_0} X_{n0} = a_{00} + \sum [a_{n0} \exp(jn\tau) + \bar{a}_{n0} \exp(-jn\tau)] \quad (8)$$

$$X_i = \sum_{k \in E_{ir}} X_{ki} = a_{0i} + \sum [a_{ki} \exp(jk\tau) + \bar{a}_{ki} \exp(-jk\tau)] \quad (9)$$

E_0 是主要振荡分量的频率集, 由待解系统的性质决定, 如对于低通系统, 可设 E_0 只含基波成分^[6], 而 PWM 变换器以直流分量为主, 故可设 $E_0 = \{0\}$; E_{ir} 是 X_i 的频率集, 由求解过程逐步确定. 令

$$\delta = \delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \delta_i \quad (10)$$

$$\theta = \theta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \theta_i \quad (11)$$

且可令

$$\delta_0 = b_0 + b_1 \exp(j\tau) + C.C.,$$

$$\delta_i = b_{2i} \exp(j2i\tau) + b_{(2i+1)} \cdot \exp(j(2i+1)\tau) + C.C.$$

$$\theta_0 = l_0 + l_1 \exp(j\tau) + C.C.,$$

$$\theta_i = l_{2i} \exp(j2i\tau) + l_{(2i+1)} \cdot \exp(j(2i+1)\tau) + C.C.$$

$C.C.$ 表示复数共轭分量. 将式(8)~(11)代入式

(2)和(3), 对照式(7), 可得

$$f(X_0) = f_0 = f_{0m} + Rf_1, f_i = f_{im} + Rf_{(i+1)} \quad (12)$$

$$h(X_0) = h_0 = h_{0m} + Rh_1, h_i = h_{im} + Rh_{(i+1)} \quad (13)$$

用 Fourier 级数可表示为:

$$f_{0m} = \sum_{n \in E_0} \varphi_{n0} = d_{00} + \sum (d_{n0} \exp(jn\tau)) + C.C.$$

$$f_{im} = \sum_{k \in E_{ir}} \varphi_{ki} = d_{0i} + \sum (d_{ki} \exp(jk\tau)) + C.C.$$

$$Rf_i = \sum_{k \in E_{ir}} u_{ki} = U_{0i} + \sum (U_{ki} \exp(jk\tau)) + C.C.$$

$$h_{0m} = \sum_{n \in E_0} \Psi_{n0} = s_{00} + \sum (s_{n0} \exp(jn\tau)) + C.C.$$

$$h_{im} = \sum_{k \in E_0} \Psi_{ki} = s_{0i} + \sum (s_{ki} \exp(jk\tau)) + C.C.$$

$$Rh_i = \sum_{k \in E_{ir}} v_{ki} = V_{0i} + \sum (V_{ki} \exp(jk\tau)) + C.C.$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots)$$

而 Rf_i (或 Rh_i) 可由 f_{i-1} (或 h_{i-1}) 和 $f_{(i-1)m}$ (或 $h_{(i-1)m}$) 确定, 后者的频率集为 $E_{(i-1)r}$, 故 E_{ir} —— Rf_i, Rh_i 所对应的频率集——可由 $E_{(i-1)r}$ 及 f_{i-1} (或 h_{i-1}) 确定. 可见, E_{ir} 是在求解过程中逐步确定. 而 f_{0m} (或 h_{0m}) 是 f_0 (或 h_0) 的主项 (即主要振荡分量), 其频率集为 E_0 ; f_{im} (或 h_{im}) ($i = 1, 2, \dots$) 是 f_i (或 h_i) 的主项, 其频率集为 E_{ir} , 故有

$$f_0 = f_{0m} + \epsilon Rf_1, f_i = f_{im} + \epsilon Rf_{(i+1)} \quad (14)$$

$$h_0 = h_{0m} + \epsilon Rh_1, h_i = h_{im} + \epsilon Rh_{(i+1)} \quad (15)$$

所以

$$f = (f_{0m} + \epsilon f_{1m} + \epsilon^2 f_{2m} + \dots) + (\epsilon Rf_1 + \epsilon^2 Rf_2 + \dots) \quad (16)$$

$$h = (h_{0m} + \epsilon h_{1m} + \epsilon^2 h_{2m} + \dots) + (\epsilon Rh_1 + \epsilon^2 Rh_2 + \dots) \quad (17)$$

将(6)、(16)、(17)三式代入式(1), 有

$$G_1(p)X_0 + G_2(p)f_{0m} + G_3(p)h_{0m} = u \quad (18a)$$

$$G_1(p)X_1 + G_2(p)f_{1m} + G_3(p)h_{1m} = -G_2(p)Rf_1 - G_3(p)Rh_1 \quad (18b)$$

$$G_1(p)X_2 + G_2(p)f_{2m} + G_3(p)h_{2m} = -G_2(p)Rf_2 - G_3(p)Rh_2 \quad (18c)$$

.....

利用开关变换器的低通性质, 可作如下近似:

(1)高次谐波相当小, 故只需取前三个方程即可; (2)

因为高次谐波远小于低次谐波, 为简化计算, 假设:

$$d_{ki} \approx D_{ki} + \eta_{ki} a_{ki}, D_{00} = \eta_{00} a_{n0}; D_{k0} = 0 (k \neq 0) \quad (19)$$

$$s_{ki} \approx S_{ki} + \lambda_{ki} a_{ki}, S_{00} = \lambda_{00} a_{n0}; S_{k0} = 0 (k \neq 0) \quad (20)$$

且 $D_{ki} = D_{0i} + \eta_{0i} a_{0i} + \eta_{1i} a_{1i} + \dots + \eta_{(k-1)i} a_{(k-1)i}, S_{ki} =$

$$S_{0i} + \lambda_{0i} a_{0i} + \lambda_{1i} a_{1i} + \cdots + \lambda_{(k-1)i} a_{(k-1)i}$$

D_{0i}, S_{0i} 包括所有与 $a_{0i}, a_{ki} (k=1, 2, \cdots)$ 无关的项. η_{ki} , λ_{ki} 是相应的常数矩阵, 在求解过程中逐步确定 (参见以下的例子).

考虑到开关变换器以直流分量为主, 即 $E_0 = \{0\}$, 故

$$X_0 = a_{00} \quad (21)$$

将 (8)、(9)、(19)~(21) 及 $f_{0m}, f_{im}, Rf_i, h_{0m}, h_{im}, Rh_i$ 的展开式代入式 (18), 得

$$G_1(0)a_{00} + G_2(0)\eta_{00}a_{00} + G_3(0)\lambda_{00}a_{00} = u - G_2(0)D_{00} - G_3(0)S_{00} \quad (22)$$

$$G_1(jk\omega)a_{ki} + G_2(jk\omega)\eta_{ki}a_{ki} + G_3(jk\omega)\lambda_{ki}a_{ki} = -G_2(jk\omega)(U_{ki} + D_{ki}) - G_3(jk\omega)(V_{ki} + S_{ki}), \quad (k \in E_k, k \neq 0) \quad (23a)$$

$$G_1(0)a_{0i} + G_2(0)\eta_{0i}a_{0i} + G_3(0)\lambda_{0i}a_{0i} = -G_2(0)U_{0i} - G_3(0)V_{0i} \quad (23b)$$

上述三式均是线性方程, 易求得符号解. 其结果可写为 (这里, 已将 $\varepsilon=1$ 代入):

$$X \approx a_{00} + a_{02} + a_{11}e^{j\tau} + a_{22}e^{j2\tau} + a_{32}e^{j3\tau} + C.C$$

三、例 子

例 1 DCM 工作的 PWM-Boost 变换器, 如图 1 所示.

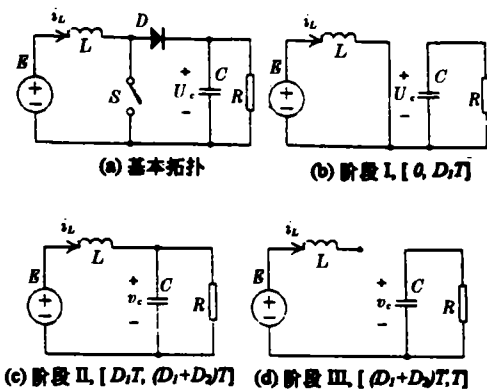


图 1 PWM Boost 变换器

记 $X = [i_L \quad V_C]^T$, 则状态方程为 (D_1, D_2 的定义见图 1)

$$G_1(p)X + G_2(p)\delta e_2 + G_3(p)\theta(X + e_3) = 0 \quad (24)$$

其中

$$G_1(p) = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p + \frac{1}{RC} \end{bmatrix}, G_2(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_3(p) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} -\frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \end{bmatrix}$$

$$\text{记 } a_{00} = [I_{00} \quad V_{00}]^T, a_{ki} = [I_{ki} \quad V_{ki}]^T$$

$$\eta_{ki} = \begin{bmatrix} \eta'_{ki} & 0 \\ 0 & \eta''_{ki} \end{bmatrix}, \quad \lambda_{ki} = \begin{bmatrix} \lambda'_{ki} & 0 \\ 0 & \lambda''_{ki} \end{bmatrix}$$

$$\text{而 } f = \delta e_2, h = \theta(X + e_3)$$

$$\text{则 } f_0 = \delta_0 e_2, f_1 = \delta_1 e_2, f_2 = \delta_2 e_2, h_0 = \theta_0 X_0 + \theta_0 e_3, h_1 = \theta_1 X_0 + \theta_0 X_1 + \theta_1 e_3, h_2 = \theta_2 X_0 + \theta_1 X_1 + \theta_0 X_2 + \theta_2 X_3.$$

$$\text{令 } X_0 = a_{00} = [I_{00} \quad V_{00}]^T$$

则

$$1) \quad \eta'_{00} = \eta''_{00} = 0 \quad D_{00} = b_0 e_2$$

$$\lambda'_{00} = \lambda''_{00} = l_0 \quad S_{00} = l_0 e_3$$

$$2) \quad \eta'_{11} = \eta''_{11} = 0 \quad D_{11} = 0 \quad U_{11} = b_1 e_2$$

$$\lambda'_{11} = \lambda''_{11} = l_0 \quad S_{11} = 0$$

$$V_{11} = l_1 (e_3 + a_{00})$$

$$3) \quad \eta'_{22} = \eta''_{22} = 0 \quad D_{22} = 0 \quad U_{22} = b_2 e_2$$

$$\lambda'_{22} = \lambda''_{22} = l_0 \quad S_{22} = l_3 a_{11}$$

$$V_{22} = l_2 (e_3 + a_{00}) + l_1 a_{11}$$

$$4) \quad \eta'_{32} = \eta''_{32} = 0 \quad D_{32} = 0 \quad U_{32} = b_3 e_2$$

$$\lambda'_{32} = \lambda''_{32} = l_0 \quad S_{32} = l_2 a_{11} + l_1 a_{22}$$

$$V_{32} = l_3 (e_3 + a_{00})$$

$$5) \quad \eta'_{02} = \eta''_{02} = 0 \quad U_{02} = 0$$

$$\lambda'_{02} = \lambda''_{02} = l_0 \quad V_{02} = l_1 a_{11} + l_1 a_{11}$$

所以

$$V_{00} = \frac{b_0 + l_0}{l_0} E = (1 + \frac{D_1}{D_2}) E$$

$$I_{00} = \frac{b_0 + l_0}{l_0^2} \frac{E}{R} = (\frac{D_1 + D_2}{D_3}) \frac{E}{R}$$

$$V_{11} = \frac{l_0 l_1 V_{00} - j\omega L l_1 I_{00} - l_0 (b_1 + l_1) E}{\omega^2 LC - l_0^2 - j\omega L/R}$$

$$I_{11} \approx \frac{(b_1 + l_1) E - l_1 V_{00} - l_0 V_{11}}{j\omega L}$$

$$V_{22} \approx \frac{l_0 l_2 V_{00} - j2\omega L (l_2 I_{00} + l_1 I_{11} - l_0 (b_2 + l_2) E)}{4\omega^2 LC - l_0^2} \quad (25)$$

$$I_{22} \approx \frac{(b_2 + l_2) E - l_2 V_{00} - l_1 V_{11} - l_0 V_{22}}{j2\omega L}$$

$$V_{32} \approx \frac{l_0 l_3 V_{00} - j3\omega L (l_3 I_{00} + l_2 I_{11} + l_1 I_{22}) - l_0 (b_3 + l_3) E}{9\omega^2 LC - l_0^2}$$

$$I_{32} \approx \frac{(b_3 + l_3) E - l_3 V_{00} - l_2 V_{11} - l_1 V_{22} - l_0 V_{32}}{j3\omega L}$$

$$V_{02} \approx -\frac{\bar{I}_1 V_{11} + \bar{I}_1 \bar{V}_{11}}{I_0}$$

$$I_{02} \approx -\frac{\frac{1}{R}(\bar{I}_1 V_{11} + \bar{I}_1 \bar{V}_{11}) + \bar{I}_0(\bar{I}_1 I_{11} + \bar{I}_1 \bar{I}_{11})}{I_0^2}$$

前两式与状态空间平均法的结果相同。可见,状态空间平均法是本文方法的零阶近似。若 $D_1 + D_2 = 1$ (即开关变换器工作于 CCM), 式(25)与文献[1]的结果完全一致, 这表明, 本文的算法更具一般性。上式中的 D_2 可由直流分析求得^[2], 记 $k = 2Lf_s/R$, 则

$$D_2 = \frac{k}{D_1} \frac{1 + \sqrt{1 + 4D_1^2/k}}{2} \quad (26)$$

这样求得的 D_2 与实际有相差, 但差别较小, 对纹波的计算影响不大(见仿真结果)。

设 $L = 208 \mu\text{H}$, $C = 222 \mu\text{F}$, $R = 12.5 \Omega$, $E = 16\text{V}$, $f_s = 3000\text{Hz}$, $D_1 = 0.3$, 易知它工作于断续电流模式, 由式(26)求得 $D_2 = 0.524$, 故由式(25)得

$$\begin{aligned} i_L = & 3.0780 - 2.3720\cos\tau + 2.6260\sin\tau \\ & - 0.5898\cos 2\tau - 0.1100\sin 2\tau \\ & + 0.1256\cos 3\tau - 0.2718\sin 3\tau \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} v_c = & 24.9119 - 0.1217\cos\tau - 0.8224\sin\tau \\ & + 0.0803\cos 2\tau + 0.0511\sin 2\tau \\ & - 0.0511\cos 3\tau + 0.1028\sin 3\tau \end{aligned} \quad (27b)$$

计算机数值仿真的直流解为 $I_L = 3.218(\text{A})$, $V_C = 25.3513(\text{V})$ 。纹波(不含直流值)的比较见图 2(图中 C 由(27)式求得, S 为数值仿真曲线; $i_{L(ac)}$ 为 i_L 的纹波, $v_{c(ac)}$ 为 v_c 的纹波值)。可见, 尽管电流纹波相当大, 结果(25)或式(27)仍具有良好的精度, 这说明本文算法的正确性。

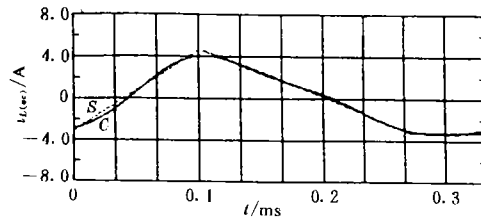
例 2 三个工作拓扑的开关变换器(图 3)^[8]

工作过程如图 3 所示。与例 1 解法类似, 可得 i_L, u_c 的符号解。设 $L = 6\text{mH}$, $C = 45 \mu\text{F}$, $R = 30 \Omega$, $E = 24\text{V}$, $f_s = 1000\text{Hz}$, $D_1 = 0.25$, $D_2 = 0.25$, 则有

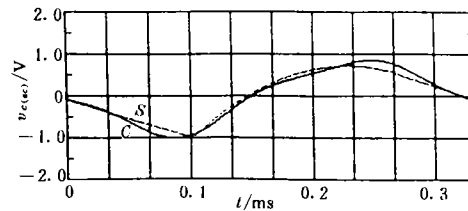
$$\begin{aligned} i_L = & 0.8793 - 0.4172\cos\tau + 0.1845\sin\tau \\ & - 0.1100\cos 2\tau + 0.0068\sin 2\tau \\ & - 0.0450\cos 3\tau - 0.0008\sin 3\tau \end{aligned} \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} v_c = & -11.4276 - 1.3690\cos\tau + 0.8992\sin\tau \\ & + 0.3538\cos 2\tau - 0.0503\sin 2\tau \\ & - 0.1594\cos 3\tau + 0.2241\sin 3\tau \end{aligned} \quad (28b)$$

计算机数值仿真的直流解为 $I_L = 0.8917(\text{A})$, $V_C = -11.6296(\text{V})$ 。纹波(不含直流值)波形的比较见图 4(图中 c 由工(28)求得, s 为数值仿真曲线; $i_{L(ac)}$ 为 i_L 的纹波, $v_{c(ac)}$ 为 v_c 的纹波)。



(a)电感电流纹波



(b)电容电压纹波

图 2 纹波波形; (27)式与数值仿真解的比较

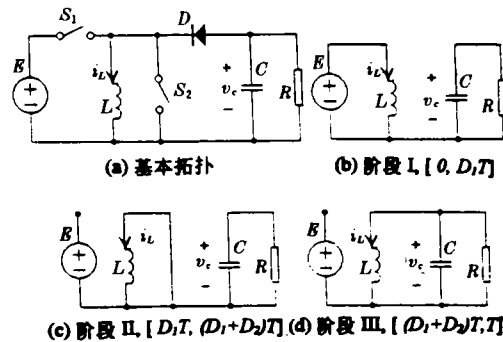
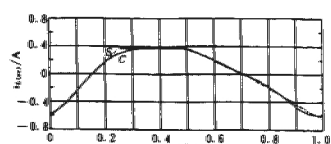


图 3 三个开关的变换器

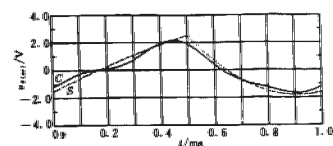
可见, 计算机仿真与本文的分析结果一致。这表明, 对于开关频率较低、纹波较大(特别是 DCM 工作)的变换器, 等效小参量法仍可给出精度较高的结果。

四、结 论

本文表明, 等效小参量法可分析稳态工作的任意个拓扑的开关变换器, 所得结果都是符号表达式, 容易求出输出纹波, 因而在工程设计和计算机符号分析中有应用价值。特别是开关频率较低、纹波较大时, 纹波很小的假设常不成立, 但本文的方法仍适用。



(a)电感电流纹波



(b)电容电压纹波

图 4 纹波波形: (28)式与数值仿真解的比较

参 考 文 献

- 1 丘水生. 分析开关功率变换器的一种新方法. 华南理工大学学报, 1994, 22(3): 74~81
- 2 D. M. Mitchell. DC-DC switching regulator analysis. McGraw-Hill, 1988
- 3 T. Ninomiya et al. A unified analysis of resonant converters. IEEE Trans. on Power Electronics, 1991, 6(2): 260~270
- 4 P. Krein et al. On the use of averaging for the analysis of power electronic systems. IEEE Trans. on Power Electronics, 1990, 5(2): 182~190

- 5 S. Sanders et al. Generalized averaging method for power conversion circuits. IEEE Trans. on Power Electronics, 1991, 6(2): 251~258
- 6 丘水生. 非线性网络与系统. 成都: 电子科技大学出版社, 1990
- 7 林波涛, 丘水生. 一种统一的准谐振开关变换器的等效电路分析法. 高频网络平均法. 电子学报, 1995, 23(8): 74~77
- 8 R. Mahadevan et al. A converter with three switched-networks improves regulation dynamics and control. in Proc. of Powerscon 10, Paper E-1. 1983



林波涛 1971 年生于广东, 1992 年毕业于华南理工大学无线电工程系, 同年考入本校电路与系统专业攻读硕士学位, 1994 年 3 月直接攻读本专业博士学位, 现从事非线性电路与系统、功率电子学、神经网络等方面的科研工作。



丘水生 1963 年和 1966 年分别在华南工学院本科和研究生毕业, 1984~1986 年任加拿大阿尔伯塔大学访问学者, 1990.4~1991.10 先后任美国波特兰州立大学、加拿大阿尔伯塔大学访问教授, 现任华南理工大学教授, 博士生导师, 从事非线性电路与系统领域的教学、科研工作。