目　录

1　导论 …… 1
S. K. 米特纳(S. K. Mitra)、H.J. 奥查德(H. J. Orchard)和 G. C. 特默斯(G. C. Temes)著
1.1　基本概念 …… 2
1.2　滤波器指标的性质 …… 8
1.3　滤波器设计过程 …… 13
1.4　电抗滤波器的转移函数 …… 16
1.5　定标和电抗变换 …… 23
1.6　摘要 …… 32
习题 …… 33
参考文献 …… 34

2　逼近理论 …… 35
G. C. 特默斯(G. C. Temes)著
2.1　理想低通衰减函数 …… 38
2.2　线性相位函数 …… 61
2.3　带通滤波器函数 …… 74
2.4　摘要 …… 82
习题 …… 83
参考文献 …… 86

3 具有集总元件的无源滤波器 ……89
H. J. 奥查德(H. J. Orchard)和 G. C. 特默斯(G. C. Temes)著
3.1 一般电抗二端对网络 ……89
3.2 滤波器电路 ……97
3.3 梯形网络的设计 ……105
3.4 格形网络设计 ……123
3.5 滤波器设计中的数值病态 ……127
习题 ……134
参考文献 ……137

4 晶体和陶瓷滤波器 ……138
乔治·森特尔迈(George Szentirmai)著
4.1 压电晶体及其等效电路 ……139
4.2 甚窄带梯形滤波器 ……141
4.3 格形-梯形混合式窄带滤波器 ……151
4.4 宽带滤波器 ……157
4.5 甚宽带滤波器 ……161
4.6 窄带滤波器的逼近方法 ……165
4.7 其他类型滤波器 ……171
4.8 摘要 ……174
习题 ……174
参考文献 ……175

5 机械带通滤波器 ……178
R. A. 约翰逊(R. A. Johnson)著
5.1 预备知识 ……178

7.2 传输线网络的等效性 …… 322
7.3 耦合传输线网络 …… 326
7.4 滤波器设计步骤 …… 331
7.5 摘要 …… 370
习题 …… 370
参考文献 …… 371

8 具有集总 RC 网络的有源滤波器 …… 374
S. K. 米特纳(S. K. Mitra)著
8.1 预备知识 …… 375
8.2 灵敏度 …… 380
8.3 单环反馈法 …… 386
8.4 多环反馈法 …… 402
8.5 模拟电感法 …… 406
8.6 频变负阻法 …… 413
8.7 摘要 …… 414
习题 …… 415
参考文献 …… 417

9 有源分布$\overline{RC}$网络 …… 420
小拉尔夫 W. 魏德鲁姆(Ralph W. Wyndrum, Jr.)著
9.1 预备知识 …… 421
9.2 早期运算放大器$\overline{RC}$滤波器的设计 …… 424
9.3 RC-$\overline{RC}$有源滤波器的设计 …… 433
9.4 有源$\overline{RC}$网络的稳定性 …… 448
9.5 横向$\overline{RC}$滤波器 …… 454

9.6 集总和分布RC有源滤波器的比较 …… 458
9.7 制造方面的考虑 …… 459
习题 …… 461
参考文献 …… 462

10 开关滤波器的应用、表征和设计 …… 464
M. R. 艾伦(M. R. Aaron)著
10.1 预备知识 …… 464
10.2 采样表示法和关系式 …… 467
10.3 应用范围 …… 473
10.4 近似分析和表征 …… 483
10.5 开关滤波器的设计 …… 511
10.6 摘要 …… 516
习题 …… 517
参考文献 …… 520

11 N-通路滤波器 …… 524
L. E. 弗兰克斯(L. E. Franks)著
11.1 预备知识 …… 525
11.2 N通路结构的响应特性 …… 528
11.3 调制函数的特殊类型 …… 534
11.4 实际应用 …… 543
11.5 应用周期运行开关的实现 …… 552
11.6 摘要 …… 562
习题 …… 564
参考文献 …… 565

12 数字滤波器 …… 568
罗杰 M. 戈尔登(Roger M.Golden)著
12.1 采样过程和 z 变换 …… 569
12.2 双线性 z 变换 …… 588
12.3 匹配 z 变换 …… 594
12.4 递归数字滤波器系数的量化 …… 597
12.5 用傅里叶级数设计非递归数字滤波器 …… 608
12.6 递归与非递归数字滤波器的数字计算机模拟和频率响应的计算 …… 614
12.7 摘要 …… 620
习题 …… 621
参考文献 …… 623
专业词汇、中英译名对照表 …… 625

1 导 论

S. K. 米特纳(S. K. Mitra)
加利福尼亚大学
戴维斯，加利福尼亚
H. J. 奥查德(H. J. Orchard)和 G. C. 特默斯(G. C. Temes)
加利福尼亚大学
洛杉矶，加利福尼亚

滤波器理论的起源，得感谢瓦格纳（Wagner）和坎贝尔(Campbell)，在 1915 年他们就提出了无源滤波器的概念。从那时起，滤波器设计的理论和实践，随着“滤波器”术语的推广而有相当的进展。现在，近乎把滤波器定义为：对已知激励需要具有规定响应的网络。响应要求可以在时间域或者频率域中给定，后一情况通常意味着选择性。

无源集总滤波器的理论，就是通常所说的经典滤波器理论，近五十年来已受到最大注意。最初的、非常成功的影象参数理论，已经逐渐被考乌尔(Cauer)、达林顿（Darlington）和皮洛蒂(Piloty)的、更有效的插入衰减理论所代替。这个过程、被高速数字计算机的日益普及而加速了，计算机的利用、已使其有可能经济地实现基于后一种更复杂理论的滤波器设计技术。在许多应用中，需要衰减特性具有尖锐选择性的滤波器，这时

必须利用晶体和陶瓷元件，由于这些器件的模型复杂，为了设计方便，已经发展了一套专门的理论。在微波范围内，网络元件具有分布性质，也需要特殊的设计方法。不过，这里所用的一些基本技术，则是从经典滤波器理论发展而来的。

关于滤波器设计和理论的进步，最显著的新近推动力，大概来自微电子学方面的现代进展。这些导致了：具有集总和分布元件的无电感有源滤波器、N通路滤波器和数字滤波器的迅速发展。数字传输系统的发展，也需要滤波器结合开关工作——因而产生了谐振转移滤波器的理论。在所有滤波器设计的新途径方面，计算机已起日益重要的作用，而且新技术的发展通常是利用现代计算机的高速度，或者迴避数字计算机的固有限制。

本书目的是：介绍基础理论和用于上述各种滤波器设计的某些较重要的设计技术。

1.1 基本概念

本书主要涉及到图 1-1 中所表征的单输入、单输出型滤波器。假定滤波器仅仅由线性元件构成，因此输出变量(响应)和输入变量(激励)间具有线性关系。表征滤波器的这种关系，既可以用时域也可以用频域来表示。



图 1-1 单输入，单输出型滤波器

连续信号滤波器

在第 3 章直到第 11 章所叙述的滤波器中，输入变量 $x(t)$

和输出变量 $y(t)$，都是时间的连续函数，通过卷积积分

$$y(t)=\int_0^{\infty} h(t,\tau)\cdot x(\tau)d\tau \qquad (1.1)$$

把它们联系起来。当滤波器属于通常的非时变网络时，(1.1)简化成

$$y(t)=\int_0^{\infty} h(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau \qquad (1.2)$$

使(1.2)中的 $x(t)$等于单位冲激函数 $\delta(t)$，就能对积分直接求值，给出

$$y(t)=h(t) \qquad (1.3)$$

因而看出 $h(t)$是：在 $t=0$ 时滤波器对所加单位冲激的响应。把它叫做**冲激响应**，并且它（经由卷积积分）完全表征了滤波器（假定为零状态）对任何激励的响应。

输入和输出变量之间的这种时域关系，可以通过对式(1.2)进行拉普拉斯变换，转换到频域。就给出

$$Y(s)=H(s)\cdot X(s) \qquad (1.4)$$

这里 $Y(s)$、$X(s)$和 $H(s)$分别是 $y(t)$、$x(t)$和 $h(t)$的拉普拉斯变换。$H(s)$ 为网络函数，通常定义为：响应的拉氏变换对激励的拉氏变换之比。

如果滤波器由集总元件构成，那么 $H(s)$ 将是有理函数，它的极点将是该系统的固有频率。要使滤波器为稳定的，这些固有频率，必须处于复平面 s 的左半。如果滤波器含有分布元件，那么 $H(s)$将是更复杂类型的函数，但它的奇点，还将起类似于有理函数的极点的作用，并且为了稳定性，也必须把它们局限于 s 平面的左半。

$H(s)$ 的零点是复频率，这时滤波器没有输出。虽然滤波器的具体电路选择，常常给零点的位置加以限制，但这些零点，原则上可以处于复平面 s 的任何地方。在结束有关连续信

号滤波器的一些评论时，必须指出，实际滤波器设计者之间所用记号有着明显地不一致。滤波器的外部性能，在其所属系统的前后联系中予以考虑时，用网络函数通常的输出/输入方式来描述可能会更便利些。可是在设计和测试滤波器而必须详细的计算和实验工作中，用输入/输出方式的转移函数来描述其性能，通常证明是比较简单的。

读者因此会发现，转移函数的两种方式都用在本书较后几章，而且必须注意：不要把一种用法和另一种相混淆了。不太妙的事情是，跟电抗四端网络一起用的输入/输出函数的标准符号$H(s)$已经用了30年以上！作者对这种混乱的可能来源感到担心，因而希望把所有用法，都在最初出现的地方给以适当定义。

数字滤波器

关于第12章中所叙述的数字滤波器，输入和输出变量都是数的序列，各数都有有限的位数，而且一般都存放在数字计算机的寄存器中。输出数列的形成是通过数字计算机的作用，从输入序列按照顺序一次一个数的产生。后者就构成数字滤波器。它可以由具有编排好程序的专用计算机构成，或者就是在可寻址存储器中具有所存储程序的通用计算机。

如输入和输出变量恰好就是数的序列，则只需把整数下标附到输入和输出符号上，例如，x_n和y_n，就能十分恰当地表示它们。但一般地说，输入序列是通过对连续信号$x(t)$（例如可以是电压、力或温度等等）按时作有规律的抽样而得到的。所以，每个样值的量化型式，都由输入序列中的一个数来表示。

为了表示输入序列对抽样函数$x(t)$和对抽样间隔T的依

赖关系，习惯是把它写成 $x(nT)$。在实时数字滤波器中，则按各个采样间隔 T 来计算一个新的输出序列项。因而输入和输出序列按同样速率产生，从而把输出序列也写成 $y(nT)$，以保持一致的记号。如有需要，就能从序列 $y(nT)$ 来重建连续输出信号 $y(t)$。这种能产生 $y(t)$（为电压）的设备就称为数字-模拟变换器。

虽然数字滤波器是极为灵活的，并可使其在输入和输出之间几乎产生任何型式的关系，但通常把它用作线性系统，于是 $y(nT)$ 与 $x(nT)$ 之间的关系，可以用（1.2）的离散型式来表示，也就是

$$y(nT)=\sum_{m=0}^{n} h(nT-mT)\cdot x(mT) \tag{1.5}$$

使 $x(mT)$ 等于特定信号

$$x(0)=1$$

$$x(mT)=0,\quad m\neq 0 \tag{1.6}$$

它对于数字滤波器来说，就起类似于单位冲激的作用，(1.5) 给出

$$y(nT)=h(nT) \tag{1.7}$$

因而表征数字滤波器性能的序列 $h(nT)$，可被看作是一种“冲激响应”。

在数字滤波器的理论中，利用 z 变换 [1] 代替拉氏变换，对于序列 $h(nT)$，其 z 变换定义为

$$H(z)=\sum_{m=0}^{\infty} h(mT)\cdot z^{-m} \tag{1.8}$$

取(1.5)的 z 变换给出[1]

$$Y(z)=H(z)\cdot X(z), \tag{1.9}$$

式中 $Y(z)$、$X(z)$和 $H(z)$分别是 $y(nT)$、$x(nT)$和 $h(nT)$的 z 变换。方程(1.9)为(1.4) 的准确模拟。$H(z)$ 可被看作（复变量 z 的）转移函数，正如连续信号滤波器的 $H(s)$一样，它是响应变换与激励变换之比。

$H(z)$ 一般是 z 的有理函数，而其极点的位置则决定滤波器是否稳定。如果 $H(z)$具有 k 阶，就能把它展开成部分分式

$$H(z)=\sum_{r=1}^{k}\frac{A_r}{1-z^{-1}a_r} \tag{1.10}$$

把所有 k 个分数的二项式展开式相加，就得到序列 $h(nT)$ 的第 n 项的显式，作为 z^{-n} 的系数：

$$h(nT)=\sum_{r=1}^{k}A_r a_r^n。 \tag{1.11}$$

如果当 $n\to\infty$这个序列 $h(nT)$不发散，那么很清楚，对所有 r $|a_r|$都必须小于或等于一。这就等于说，$H(z)$ 的极点必须落在单位圆内或者圆上。

应该体会到：在数字滤波器本身的输入和输出，并没有象存在于第 2 章直到第 11 章所叙述的滤波器中的那样信号，而只有数的集合。因此，人们不能讲到数字滤波器的频率响应——它并不存在。

然而，如果人们考虑的是整个系统包括从连续信号 $x(t)$ 开始($x(t)$被抽样以对数字滤波器提供输入序列)，到连续信号 $y(t)$结束($y(t)$是由输出序列重建的)，那么，这个系统就的确既有频率响应，又有冲激响应。设计数字滤波器中的许多努力是通过以下事实而作出的：使数字滤波器的 $H(z)$ 和整个连续系统的转移函数相关联，并选择 $H(z)$ 以使连续系统具有某些需要的特性。

• 6 •

衰减、相位和延迟

滤波器在频域中的性能，通常用转移函数的对数的实部和虚部来说明，而不是直接用转移函数本身。它是根据这样的实践得出，在由许多分系统级联组成的传输系统设计中，已发现这是最方便的。因为在这样一种系统中，总转移函数是分系统转移函数的乘积，而总对数转移函数则仅仅是分系统对数函数之和。

衰减 α（奈培）和相位 β（弧度）通常定义为

$$\alpha + j\beta \triangleq \ln\left\{\frac{\text{激励的拉氏变换}}{\text{响应的拉氏变换}}\right\}\Bigg|_{s=j\omega} \tag{1.12}$$

按这个定义，衰减标度上零点的位置，完全取决于输入和输出变量的具体选择，但通常则把适当常数加到 α 上来调整它，使 α 的零值相当于一些简单的物理状态，例如最大功率传输、零频率的输出电平等。

在实际设计工作中，理论上的单位奈培和弧度，几乎总是分别由以下关系换算成分贝和度

$$1\text{ 奈培} = (20\log_{10}e)\text{分贝} \cong 8.686\text{ 分贝}$$

$$1\text{ 弧度} = \frac{180}{\pi}\text{度} \cong 57.296\text{ 度}$$

与相位 β（用弧度）有关的一个量是包迹延迟或群延迟（这些术语可互换使用），

$$T_g \triangleq \frac{d\beta}{d\omega}\text{秒} \tag{1.13}$$

与包迹延迟紧密相联系的另一个量是相位延迟 β/ω，但这个量除了在低通系统中以外，并没有有用的意义，也不容易测定的，因而很少使用。

1.2 滤波器指标的性质

本节将讨论通常要求滤波器所具有的特性，以及由需要滤波器的系统工程师给设计者规定的格式。

大部分线性滤波器的任务是从需要信号和一个或多个不需要信号的混合信号中分离出需要信号。一般说来，需要信号和不需要信号的能谱总会重叠，所以，用线性非时变网络来完全分开是不可能的。在这种情况下，所能尽的最大努力就是把衰减和相位特性进行整形，以便使滤波器输出端的需要信号对不需要信号之比达到最大。要得出这种对衰减和相位特性最好的整形，必须考虑到整个信号频谱的详细性能，而且这是相当复杂的过程。这种情况的典型例子，就发生在接收脉冲与噪声混杂的脉冲传输中。

这里我们只涉及较简单、而且常见的情况，例如在频分复用系统中，其频谱并不重叠。那么从原则上讲，完全分出需要信号是可能的。但实际上所达到的分开程度、以及需要信号的传输质量仍要受到限制，这部分由于经济上的考虑，部分则由于现有元件的质量。

通带

需要信号所占有的频带称为通带。在这个频带中，对滤波器的理想要求是，应能提供恒定的衰减和恒定的包迹延迟，以使需要信号可以无失真地传输。

用有限、集总网络，人们不能在整个有限频带内得到绝对恒定的衰减，所以，惯例是另行规定某些可接受的衰减变化的上限和下限。选择这些界限，不仅应适应衰减的变化（即使理

想网络也存在这种衰减变化），而且还要适应元件容差和元件耗散的影响。后者的影响，一般在通带的边缘较大，为此，往往把这里的上下限分开得远一些。图 1-2 是一个例子。容许的响应（虚线）必须在阴影壁垒之间通过。

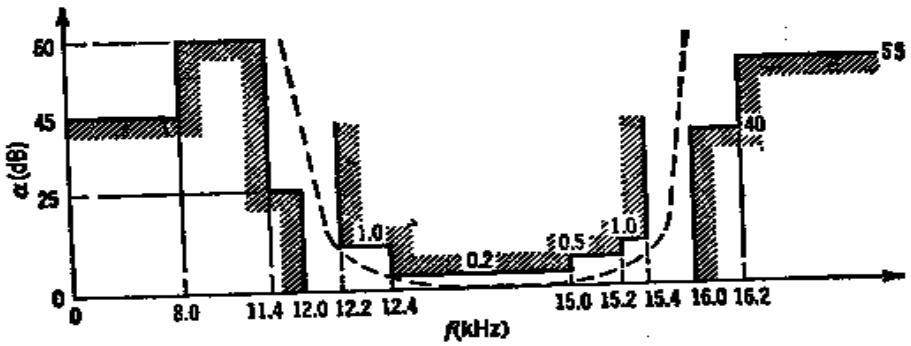


图 1-2　典型的衰减指标，虚线表示容许的衰减响应

包迹延迟

类似于不能在整个有限频带得到完全恒定的衰减的同样原因，人们也不可能得到完全恒定的包迹延迟。如果控制传输信号的包迹延迟是重要的，那么，以类似于衰减特性的方式，对整个通带规定延迟的上、下限，而在频带的边缘、往往使上、下限分开得远一些(参看图 1-3)。这里，在频带边缘把界限放宽，应该有助于缩小滤波器的尺寸，而不是适应元件不完善的影响，因为当人们增加通带的这一部分时，即在其上要求严格延迟容差的部分，则转移函数的阶次就迅速增加。

决不能使通带内延迟的最小值成为零，这在高指标滤波器中、可能是十分重要的。要相当准确地预测、所期望的平延迟、是没有简单规则的，因此也就很少有人企图对它加以限制，否则就可能严重地不利于设计者。由于通常人们只好接

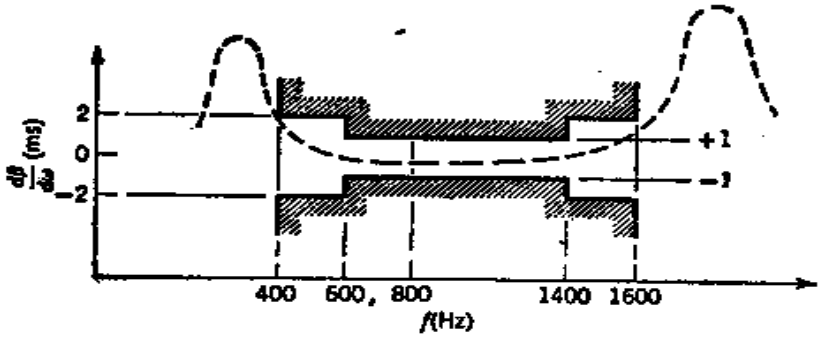


图 1-3 典型的群延迟规格。虚线表示容许的群延迟响应

受、从满足有关延迟的恒定性指标所得出的任何平延迟。因而指标仅仅涉及到相对延迟。

在滤波器里面，往往没有必要控制传输信号的包迹延迟，因为如就声频信号来说，它并不具有重要性，或者因为：它可以在后面和系统中某些其他链接设备部分的延迟失真一起加以校正。如果这样的话，不需要为延迟拟定指标，并且假定将采用最小相位网络。

阻带

不需要的信号所占有的频带称为阻带。在这些频带中，指标的一般格式，只不过要求衰减相对于通带低限要等于、或大于某一最小量。

就使用的观点看，实际滤波器阻带中的衰减、超过规定值是 1 dB 还是 20 dB，通常并不重要，在这种意义上，阻带响应、仅仅有下限，这与既有上限又有下限的通带不同。为了要使阻带的都满足指标，有时滤波器设计者不得不使阻带的某些部分的衰减甚大于规定的最小值。可是设计者一般都极力设法不超

过绝对必要的阻带衰减，部分理由因为更大的衰减，通常意味着滤波器成本更高，另一部分理由则因为当阻带衰减增大时，通带响应的质量就下降了。

对整个阻带所规定的最小衰减，是由滤波器工作的、系统的需要来规定。系统设计者有时由于这样或那样的原因，不可能准确地肯定、在各个频率实在需要多少衰减，于是就按惯例，使所有频率的衰减指标为某恒定值。所选这个恒定衰减值是一个认为是很安全的量。

在某些场合下，系统设计者能很准确地推测、需要怎样的最小衰减频率曲线，所以给予滤波器设计者的阻带指标，或是对这个计算曲线取多边形、或是取阶跃函数近似的形式。象这样一种指标，通常使滤波器设计者对它的功能更有把握。虽然要达到这指标要做更多工作。

过渡带

滤波器的衰减响应、是频率的连续函数，因而不能有不连续性的跃变。为此，在频谱中一定要有些间隔，以便把通带的边缘和阻带的边缘分离开，使能从通带中的低衰减值、上升到阻带中所需要的衰减值。这些间隔、就称过渡带。

分配给这些过渡带的带宽，是决定满足指标所需要的滤波器大小的主要因素之一。如人们减小过渡带的宽度，则不仅使滤波器的复杂性增加，而且使满足通带的指标也更加困难。较窄的过渡带意味着：接近通带边缘，衰减必须更迅速变化，而这使通带响应对耗散和元件容差两者都会更灵敏。

滤波器的种类

一般说来，滤波器可以具有几个不同的通带，而对某些这

种网络的专门设计方法，已经在文献中有所讨论。但通常的滤波器指标，只要求一个通带，而且所有实际设计方法、都从这种假定着手。

最常见的单通带滤波器是带通滤波器，通带的两个边缘、都在有限非零频率处，而且在通带的两边、都是阻带。在通带以下的阻带、一直扩展到零频率，而在通带以上的阻带、则扩展到无限大频率。两个阻带可以有完全不同的指标，这时就把它称为非对称带通滤波器。

带通滤波器指标的特种类型，在它们的阻带中可具有某种对称性。如果阻带在围绕通带的对数频率标度上是对称的，就叫做几何对称滤波器。另一种阻带指标，是在围绕通带的算术频率标度上对称，则把它叫做算术对称滤波器。算术对称、显然不能延续到通带中心频率的两倍以外，但通常在那里的指标总是不重要的。几何对称滤波器、经过电抗变换特别容易设计，这将在本章后面予以说明；但是，在数据系统和调频系统中、占重要位置的算术对称滤波器的设计，则通常是很困难的。

带通滤波器有两个重要的极限情况。第一个就是下部阻带消失，而且把通带的下部边缘、置于零频率。非对称带通滤波器于是退化成低通滤波器。第二个就是上部阻带消失，而且通带的上部边缘、趋向无限大。这种电路、称为高通滤波器。

对每个高通滤波器、都对应着一个低通滤波器，反过来也是一样。通过用 ω_0^2/s 来替换变量 s，每个都能从另一个得出，这里 ω_0 是具有角频率量纲的某个适当的常数。在设计中的任何阶段、直到实现实际网络（而且包括实际网络在内），都可进行这种替换。举例来说，用变量的这种倒量变换，就能把低通滤波器的转移函数，变换为高通滤波器的转移函数。另一方面、

把变换应用于元件导抗，可使电感器、转化为电容器，反过来也是一样，并且这种电抗变换、就把低通滤波器转变为高通滤波器。

这种关系，使得不必要求低通和高通滤波器有各自的设计程序，而后者的设计通常是先把其指标转变成相应低通滤波器的指标，并设计该低通滤波器，然后在最末阶段，通过变换该低通网络、来得出高通网络。关于这个过程的细节，可参考1.5节。

除这三种主要的单通带滤波器，即低通、高通和带通以外，有时也需要一种特殊的、叫做带阻滤波器的双通带滤波器。它有一个单阻带、来分开两个通带，一个通带一直扩展到零频率，而另一个通带则扩展到无限大频率。一般的非对称带阻滤波器是能够设计的，但在逼近阶段中处理两个不同通带、和用梯形电路来实现它这两个方面，都存在着困难。因此，带阻滤波器、通常都由低通滤波器、通过简单的电抗变换、来进行设计。所以，所得带阻滤波器的特性，在对数频率标度上是对称的。

1.3 滤波器设计过程

为了设计滤波器，工程师通常遵循的各种步骤如图1-4的程序方框图所示。框1包括滤波器必须满足的工作特性指标。它将叙述所需要的衰减和相位（或延迟）特性（如前节所述）以及任何其它需要的特征，例如系统工程师认为重要的：端对的阻抗特性、信号电平、大小、重量、成本等。

下一步如框2所示，涉及到选择最易于制成符合指标的滤波器类型。选择时将受到下列因素的影响：如工作的频率范

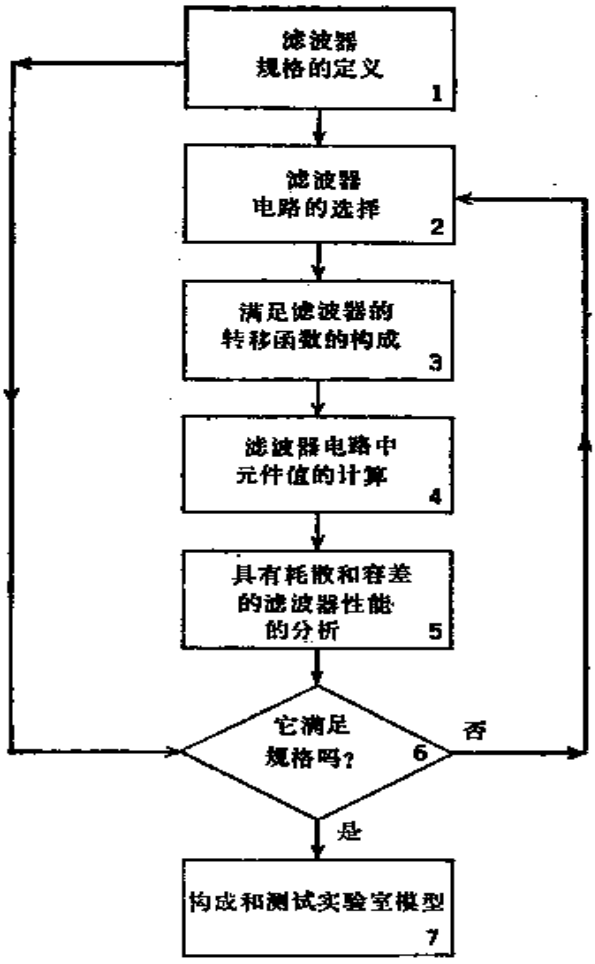


图 1-4　滤波器设计工作的程序方框图

围、选择性程度、阻抗水平、大小和成本。如同本书以后几章要说明的那样，滤波器设计者有多种多样的滤波器类型来供选择，并且为了能在具体工作中作出高明的选择，丰富的经验是必要的。

一旦把滤波器类型决定了，详细的设计工作便可开始。其第一阶段的内容示于框 3。对不同种类的滤波器，势必按不

同的方法加以探讨，但在所有情况下，都要作一些逼近处理，以便构成或至少规定适合的转移函数。后者必须同时符合框 1 中所规定的指标和适合于框 2 中所选择的滤波器种类。实现这种逼近处理的许多标准方法的细节，则在第 2 章中叙述。

从已知的转移函数，到求出元件值（或在分布网络情况下它们的等效值）这一步骤示于框 4。这一步常常（虽幸好不是经常）需要大量冗长的数值计算工作、多项式的因式分解、作连分式展开以及类似的运算。现在，这项工作几乎总是靠数字计算机来完成。

在滤波器的元件值已确定后，框 5 所示的下一步是分析计算滤波器的性能。首先是按标称元件值来作，以便证实框 3 和框 4 中所实现的整个步骤的正确性；然后再按元件中含有误差来作，以便检查当滤波器用实际元件制成时，还能不能满足原来的指标。误差的来源一部分是由于数值上的容差（例如电感和电容中 2% 误差的随机分布），另一部分则由于耗散和其他寄生效应，例如引线电感、电感器的自电容等。在理论上，虽然能（而且有时是）把许多这种寄生效应包括在原来的设计中，但因它们的效应往往如此之小，以致不值得计及它们，而使设计复杂化。

在框 6 这个阶段，应将计算出的性能与原定指标相比较。如果不能满足指标的话，设计者就必须重选各种参数，按第一次失败设计的过程来重复第 2 步直到第 5 步。最后，除非指标不能由任何真实网络来满足，设计者总会找到一个其计算响应能满足要求的网络。然后转到框 7 的实验阶段。

滤波器的数学模型常是如此之好，以致其实验室模型装置不再供作有计算机可用之前所常用的目的，即通过测量来看出设计是不是满意。相反，实验室模型更多用作生产的第一个

样机，和用作系统工程师的试验的样品。对于从输入端到输出端以及在滤波器和其他设备之间的串话、过载和非线性失真的研究，用实验室样品也比通过计算更方便些。

1.4 电抗滤波器的转移函数

集总线性非时变电抗二端对电路，是历史上使用的第一种滤波器网络。甚至今天，它们仍具有吸引人的特性（成本低、对元件容差的灵敏度低、简单等等）使其成为应用最广泛的滤波器。而且，它们的理论也形成了其他多种滤波器的大量设计理论的基础。为此，在本书的第一部分（第 1 章的剩余部分、以及第 2 章和第 3 章）内，将讨论电抗滤波器的性质、网络函数和设计方法。

换能器函数，特征函数

考虑图 1-5 所示双端负载的电抗二端对（网络）。其阻抗

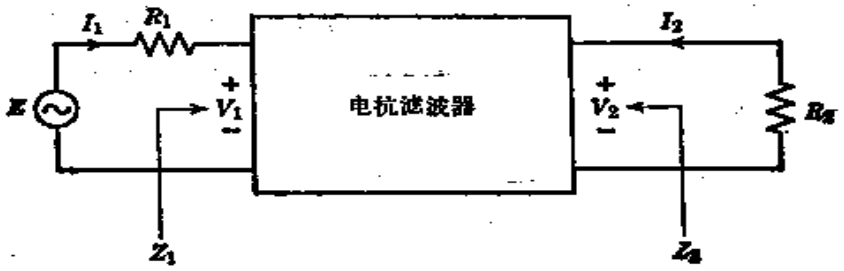


图 1-5 双端负载的电抗滤波器

$Z_1(s)$和 $Z_2(s)$，或相应的反射系数

$$\rho_1(s)=\frac{Z_1(s)-R_1}{Z_1(s)+R_1}$$

$$\rho_2(s)=\frac{Z_2(s)-R_2}{Z_2(s)+R_2} \tag{1.14}$$

描述滤波器对其终端 R_1、R_2 的匹配。滤波器的功率传输，能够方便地用换能器功率比来描述，换能器功率比的定义是：发生器最大可用的功率 P_{max} 对负载*R_2 实际所吸收的功率 P_2 之比：

$$\frac{P_{max}}{P_2}=\frac{E^2/4R_1}{|V_2|^2/R_2}=\left|\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\cdot\frac{E}{V_2}\right|^2 \qquad (1.15)$$

由于无源二端对网络，不可能有功率增益，因而 $P_{max}/P_2\geqslant 1$。因此，对于这样的网络，用下式

$$\frac{P_{max}}{P_2}=1+|K(s)|^2 \quad s=j\omega \qquad (1.16)$$

来定义一个辅助量—特征函数 $K(s)$是有意义的。如果 P_{max}表示任意规定的最大输出功率，而不是可用的发生器功率，则(1.16)式甚至对有源网络也仍然有效。(由于所有电路的有限动态范围，实际上总是存在一些功率极限，而且照例易于事先建立。)引进特征函数的好处，不久就会明了。

由(1.15)的启发，如果我们再由下式定义换能器函数 $H(s)$，

$$H(s)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\cdot\frac{E}{V_2(s)} \qquad (1.17)$$

那么，由(1.15)—(1.17)就得到关系

$$|H(s)|^2=1+|K(s)|^2,\ s=j\omega. \qquad (1.18)$$

象早先所说明的，关于本节所考虑的集总线性非时变电路，所有网络函数都是具有实系数的 S 的有理函数，因而可以把(1.18)改写成下列形式

$$H(s)\cdot H(-s)=1+K(s)\cdot K(-s) \quad s=j\omega \qquad (1.19)$$

---

* 这里假定发生器电压 E 为实数。

在实际计算中，方程(1.19)比(1.18)易于应用。

关于特殊（但极重要的）的电抗二端对网络，因在二端对网络内不损耗功率。于是经过一些计算之后，(1.14)和(1.17)给出

$$|\rho_1(j\omega)|^2=|\rho_2(j\omega)|^2=1-\frac{P_2}{P_{max}} \tag{1.20}$$

因此，利用，(1.18)，

$$|\rho_1(j\omega)|^2=|\rho_2(j\omega)|^2=\frac{|K(j\omega)|^2}{|H(j\omega)|^2} \tag{1.21}$$

对于电抗二端对网络，还能由关系*

$$K(s)=\rho_1(s)\cdot H(s) \tag{1.22}$$

来定义 $K(s)$。

由于 $K(s)$、$H(s)$和 $\rho_1(s)$都是有理函数，故能把它们写成如下的形式

$$H(s)=\frac{e(s)}{p(s)}$$

$$K(s)=\frac{f(s)}{p(s)}$$

$$\rho_1(s)=\frac{f(s)}{e(s)} \tag{1.23}$$

式中 $e(s)$、$f(s)$和 $p(s)$都是 s 的多项式。由于(1.19)，应注意到H和K具有同样的分母 $p(s)$，所以由(1.22)可得到 $\rho_1(s)$的形式。以 e、f 和 p 来表示，(1.19)变成

$$e(s)\cdot e(-s)=p(s)\cdot p(-s)+f(s)\cdot f(-s) \tag{1.24}$$

这里利用解析延拓来消除条件 $s=j\omega$，也就是把有效性扩展到整个 s 平面。方程(1.24)(或它的任一种变形)通常叫做费尔特凯勒(*Feldtkeller*)方程。

---

* 另一种定义，$K(s)=\rho_2(s)\cdot H(s)$也是可能的。

逼近问题，通常由三个多项式 e、f 和 p 中找到任何两个来解决；第三个可以利用(1.24)来计算。所以综合是从 e、f 和 p 着手的。这些多项式是实现二端对网络所必要或充分的；因此，它们的性质具有显著地重要性。在第三章将表明有以下的性质：

1. $e(s)$为严格赫维茨(*Hurwitz*)多项式，也就是其零点都在左半面的内部；

2. $p(s)$为偶或奇多项式；

3. $e(s)$的阶，大于或等于 $f(s)$的阶，或者大于或等于 $p(s)$的阶。

$e(s)$的零点为滤波器的**自然模**；$p(s)$的零点为**衰减极点**(也叫做**传输零点**)，而 $f(s)$的零点则往往叫**反射零点**或**零衰减频率**。

逼近问题，通常都通过(1.23)中所给定的有理函数来加以解决。构成这些函数的分子和分母多项式，必须满足上面给定的三点限制和费尔特凯勒方程(1.24)。

电抗二端对网络的衰减、相位和延迟

在 1.1 节中曾定义过的损耗 α、相位 β 和群延迟 T_g，对于电抗二端对网络都能直接从 $H(j\omega)$得到。所以零衰减点就相应于最大的功率传输：

$$\alpha(\omega)=10\log_{10}\left(\frac{P_{max}}{P_2}\right)=20\log_{10}|H(j\omega)| \qquad (1.25)$$

由(1.12)可以看出，相位的定义是 E 的相角和 $V_2(j\omega)$ 的相角之差，按(1.17)它就是 $H(j\omega)$的相角。因此，

$$\beta(\omega)=\tan^{-1}\left[\frac{H_0(s)/j}{H_e(s)}\right]_{s=j\omega}=\frac{1}{j}\tanh^{-1}\left[\frac{H_0(j\omega)}{H_e(j\omega)}\right] \qquad (1.26)$$

这里，下标 e 和 o 分别表示 $H(s)$ 的偶部和奇部：

$$H_e(s)=[H(s)+H(-s)]/2$$
$$H_o(s)=[H(s)-H(-s)]/2 \qquad (1.27)$$

由 $\beta(\omega)$，群延迟 T_g 就能用其定义(1.13)得出：

$$T_g=\frac{d\beta(\omega)}{d\omega}=\left[\frac{d}{ds}\tanh^{-1}\frac{H_o(s)}{H_e(s)}\right]_{s=j\omega}=$$
$$=\left\{E_v\left[\frac{H'(s)}{H(s)}\right]\right\}_{s=j\omega} \qquad (1.28)$$

这里，$E_v[f(s)]$表示 $f(s)$的偶部，而且 $H'(s)\equiv dH(s)/ds$。由于 $H(s)=e(s)/p(s)$，T_g 也能写成形式

$$T_g(\omega)=\left\{E_v\left[\frac{e'(s)}{e(s)}-\frac{p'(s)}{p(s)}\right]\right\}_{s=j\omega}=\left\{E_v\left[\frac{e'(s)}{e(s)}\right]\right\}_{s=j\omega} \qquad (1.29)$$

最后的等式仅仅对电抗二端对网络适用，式中 $p(s)$ 为偶或奇多项式，因而 $p'(s)/p(s)$ 是奇函数。按简单的解析延拓，显然能把

$$T_g(s)=E_v\left[\frac{H'(s)}{H(s)}\right]=E_v\left[\frac{e'(s)}{e(s)}\right] \qquad (1.30)$$

定义为 s 的函数，对于 $s=j\omega$ 它就与群延迟一致。

一个重要的特殊情况是全通函数，它的 $e(s)=[e_a(s)]^2$、$p(s)=e_a(s)\cdot e_a(-s)$，即

$$H(s)=\frac{e(s)}{p(s)}=\frac{[e_a(s)]^2}{e_a(s)\cdot e_a(-s)}=\frac{e_a(s)}{e_a(-s)} \qquad (1.31)$$

这里左半平面的衰减极点对消了重阶自然模的一半。这类函数具有 $|H(j\omega)|\equiv 1$ 从而 $\alpha(\omega)\equiv 0$ 的性质，因此而得名全通。对于这类 $e(s)\equiv[e_a(s)]^2$的函数有

$$T_g(s)=2E_v\left[\frac{e'_a(s)}{e_a(s)}\right] \qquad (1.32)$$

对于已调制信号，$T_g(s)$ 描述(形成信号包络线的)调制时间函数所遭受的延迟总量。对于未调制（基带、视频）信号，相位延迟 $T_{ph}(\omega)$ 的变化规定信号正弦波分量的相对延迟。不过，在这种情况下甚至也往往使用群延迟，因为对理想线性相位的偏移来说，群延迟比相位延迟通常是更灵敏的指示器*。

采用 $T_g(\omega)$（而不采用 $\beta(\omega)$）的主要优点是其数学形式简单，它可避免运用超越函数，因而使理论与数值的分析以及设计都相对地简化，并且，容易测量也是其主要优点之一。

冲激响应、阶跃响应、时间响应

如果图 1.5 的电路由一般信号 $e(t)$来激励，而不是由正弦波来激励**，则输出信号 $v_2(t)$的拉氏变换可以由(1.17)得到：

$$V_2(s)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\cdot\frac{E(s)}{H(s)} \tag{1.33}$$

式中 $E(s)=\mathscr{L}[e(t)]$为 $e(t)$的拉氏变换。如果我们也表示

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\cdot\frac{1}{H(s)}\right]=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p(s)}{e(s)}\right] \tag{1.34}$$

那么，按(1.2)，

$$v_2(t)=h(t)*e(t)=\int_0^\infty h(t-\tau)\cdot e(\tau)d\tau \tag{1.35}$$

式中星号 * 表示由积分所定义的卷积运算。明确地说，如果

---

* 通常对于线性相位低通滤波器来说，和准确线性相位的偏移近乎是振幅迅速增加的 ω 的周期函数。那么相位延迟和群延迟误差，将是相位误差的加权复制品；T_{ph} 带有 $1/\omega$ 权重系数，T_g 设带权重系数。因此，T_{ph} 可以减弱相位误差对 ω 曲线的灵敏部分。

** 决不能把 $e(t)$和 $H(s)$的分子多项式 $e(s)$相混淆。

$e(t)$为单位冲激 $\delta(t)$，那么

$$v_2(t)=h(t)*\delta(t)=h(t) \tag{1.36}$$

因此，(1.34)中所定义的时间函数 $h(t)$就是图 1.5 电路的**冲激响应**。另一方面，如果把 $e(t)$选择为单位阶跃函数

$$e(t)=\mu(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{1.37}$$

那么 $E(s)=1/s$，因而

$$v_2(t)=g(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\cdot\frac{p(s)}{se(s)}\right]. \tag{1.38}$$

函数 $g(t)$就叫做滤波器的**阶跃响应**。

对于由稳态正弦波以外的信号所激励的滤波器，所得输出 $v_2(t)$的性态具有显著重要性。对于一般输入，$v_2(t)$由(1.35)给定；对于冲激或阶跃输入，则分别由 $h(t)$或 $g(t)$给定。虽然有时是对已知 $e(t)$来规定 $v_2(t)$，但通常按可接受的 $h(t)$或 $g(t)$来设计网络是恰当的。遵循这种要求的过程叫做**时域逼近**。

理论上，当然可能取 $e(t)$和所需响应 $v_2(t)$的拉氏变换；那时(1.33)就成为在 s 复平面内或在 $j\omega$ 轴上，通过逼近来寻求 $H(s)$的基础。然而不幸的是，s 平面内和 t 域内的逼近误差只是松散地联系着。例如，在频率响应 $H(j\omega)$ 中一个小的正弦波样的误差，就可能在冲激响应 $h(t)$中导致幅度可观的不需要的尖峰(回波)。因此，时域逼近宁可直接通过时间变量 t 来做出，而不是间接地通过频率变量 ω来进行，即使前者几乎总需要更多的工作。我们不拟在本书内讨论时域逼近，作为资料来说，读者可参考 K.L.Su 的综合著作。然而，方程(1.34)—(1.38)能使设计者来核对从频域出发所设计的滤波器的时间响应。

1.5 定标和电抗变换

定标

在滤波器理论中描述电量的数目字，用常规的 SI 单位来表示时往往非常大(例如，10^8 赫)或非常小(例如，10^{-11}法)。这在人工计算中引起不方便，而且在计算机辅助的电路分析或设计中，能够导致计算机上溢或下溢*。如果任意指定某一关键量为 1，则理论和数值的结果可以被简化，并且使其更一般化。例如，在图 1-5 的电路中，如果 R_1 和 R_2 相等，那么用 R_1 和 R_2 的公共值作为阻抗单位，将使描述该电路运算的所有理论方程得到显著简化。单位的这种任意指定，就叫做定标或归一化。

很明显，在"归一化"电路中并不是所有的单位都可能任意选择。例如，如果把阻抗、角频率和电容的单位，分别选择为 Z_0、ω_0 和 C_0，那么在归一化以前，方程

$$|z| = 1/\omega C \tag{1.39}$$

对电容器适用。在归一化以后，自然仍需要把归一化的量 z、Ω 和 c 联系为

$$|z| = 1/\Omega c \tag{1.40}$$

但是，由于归一化值按定义是

$$z = Z/Z_0$$

$$\Omega = \omega/\omega_0$$

---

* 在计算机中，如果在计算过程产生的数，超过机器所能表示的范围，称为上溢或叫溢出；如果在计算过程产生的非零结果小于计算机所能表示的范围，则称为下溢。——译者

滤波器）或 $t_0=1$（对于延迟网络）。所以方程（1.48）使设计者能选择表列电路以适应其具体要求。这些一览的完备制表（而且出版时是最新的），已于参考文献[3]中列出。

电抗变换

电抗变换为将低通滤波器的结果推广到更复杂类型的滤波器提供了有用而且简单的方法。这些使设计者仅仅利用基本的操作，就能够把低通滤波器（往往叫做原型滤波器）变换成带通、高通、带阻或多通带滤波器，以满足规定的衰减要求。

电抗变换的本质，是用可实现的电抗函数 $X(\omega)$

$$\omega_{LP}=X(\omega)=A\omega\frac{(\omega_2^2-\omega^2)(\omega_4^2-\omega^2)\cdots}{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_3^2-\omega^2)\cdots} \qquad (1.49)$$

来替换低通原型滤波器的频率变量ω_{LP}，式中$0\leqslant\omega_1<\omega_2<\omega_3\cdots$，而 A 则是正实常数。这种变换，用新的电抗

$$\omega_{LP}L_{LP}=L_{LP}\cdot A\omega\cdot\frac{(\omega_2^2-\omega^2)(\omega_4^2-\omega^2)\cdots}{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_3^2-\omega^2)\cdots} \qquad (1.50)$$

来替换原型中电感器 L_{LP} 的电抗，而电容器 C_{LP} 的电抗则变成

$$\frac{-1}{\omega_{LP}C_{LP}}=-\frac{1}{C_{LP}A\omega}\cdot\frac{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_3^2-\omega^2)\cdots}{(\omega_2^2-\omega^2)(\omega_4^2-\omega^2)\cdots} \qquad (1.51)$$

这些新电抗总是可实现的，而且如有要求的话，能比它们的原型更加复杂。

由(1.49)的映射所产生的频率轴的变换，将在图 1-6 中说明。如图所示，变换通常是使一个点变成多个点；因此，原型的通带$-\omega_P\leqslant\omega_{LP}\leqslant\omega_P$，变成最终滤波器的一组集中在$\omega=0$、$\pm\omega_2$、$\pm\omega_4$、$\cdots$周围的通带。（通带在图 1-6 中用粗线段表示。）

因为只是原型衰减响应 $\alpha_{LP}(\omega_{LP})$ 的独立变量 ω_{LP} 有改变，

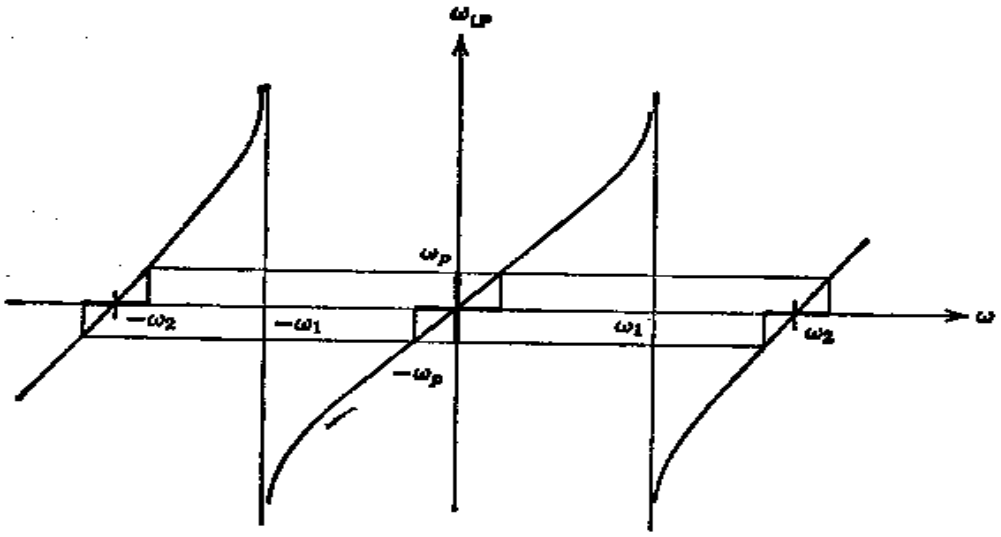


图 1-6　电抗变换中频率轴的映射

所以把衰减值 $\alpha_{LP}(\omega_{LP})$分配给对应于 ω_{LP} 的所有 ω 值，就能找到新的衰减响应 $\alpha(\omega)$。

虽然这种技术可应用到多通带滤波器的设计，但最常用的是较简单的变换。四种最简单的情况可说明如次。

1．$\omega_{LP}=A\omega$；

和(1.41)相比直接说明，这种“变换”不过相当于频率轴的定标。

2．$\omega_{LP}=-A/\omega$；

这里按照

$$\omega_{LP}L_{LP}\rightarrow -AL_{LP}/\omega=-1/\omega C$$

$$C=1/AL_{LP} \tag{1.52}$$

把感性原型电抗变换成容抗，而容抗则变成感抗：

$$-1/\omega_{LP}C_{LP}\rightarrow \omega/AC_{LP}=\omega L$$

$$L=1/AC_{LP} \tag{1.53}$$

因此，电感器和电容器在原型和最终电路中改变了作用*。把原型的衰减响应，变换成高通滤波器的衰减响应，如图 1.7 所示。对于所规定的高通衰减特性，低通原型所需要的选择性为

$$k \triangleq \omega_p/\omega_s = \omega_{sHP}/\omega_{pHP} \tag{1.54}$$

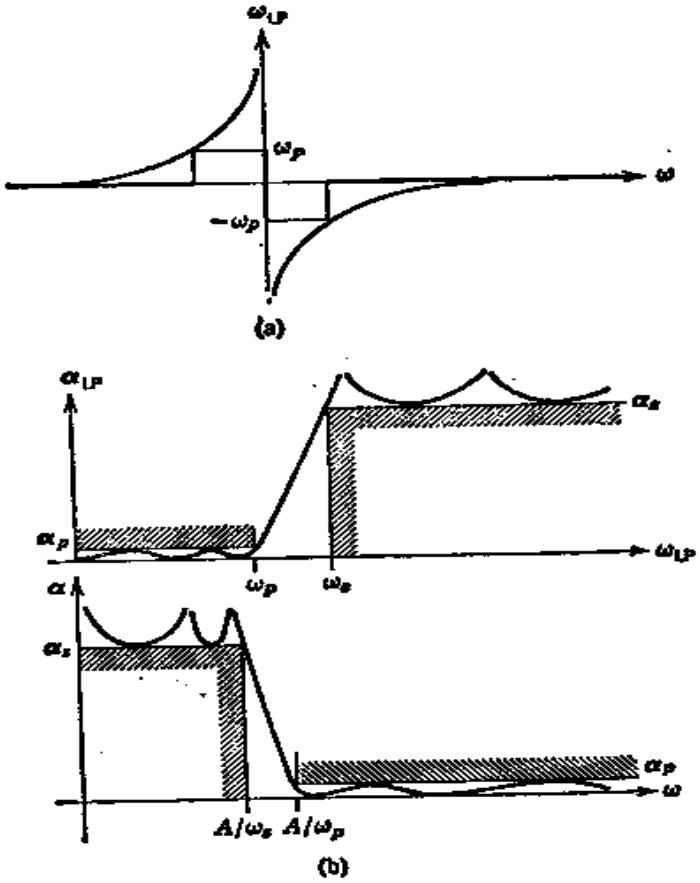


图 1-7　低通向高通变换

* 不随频率变化的元件(电阻器、电源、迴转器等)，当然保持不变。

式中下标 HP 指的是高通滤波器。低通滤波器的通带和阻带衰减 α_p 和 α_s，可以从高通的 α_p 和 α_s 直接得到。因此，可以得出低通原型电路。此后利用(1.52)—(1.53)就能导出高通滤波器。

3. $\omega_{LP}=A\cdot\dfrac{\omega_2^2-\omega^2}{-\omega}$，

这里把电感器替换为串联调谐电路：

$$\omega_{LP}L_{LP}\to AL_{LP}\omega-\frac{AL_{LP}\omega_2^2}{\omega}=\omega L-\frac{1}{\omega C}$$

$$L=AL_{LP}$$

$$C=\frac{1}{L\omega_2^2}, \tag{1.55}$$

而电容器则变换成并联调谐电路：

$$\omega_{LP}C_{LP}=AC_{LP}\omega-\frac{AC_{LP}\omega_2^2}{\omega}=\omega C-\frac{1}{\omega L}$$

$$C=AC_{LP}$$

$$L=\frac{1}{C\omega_2^2} \tag{1.56}$$

ω_{LP} 轴的变换和 α_{LP} 的变换，说明于图 1.8。显然，现在得到了带通滤波器特性。把低通滤波器的通带界限 ω_{LP} 映射到 ω_{p2} 和 $-\omega_{p1}$，而 $-\omega_{LP}$ 则映射到 ω_{p1} 和 $-\omega_{p2}$（图 1-8 (a)）。因此，ω_{p2} 和 $-\omega_{p1}$ 为二次方程

$$\omega^2-\frac{\omega_p}{A}\omega-\omega_2^2=0 \tag{1.57}$$

的解，所以

$$-\omega_{p1}\omega_{p2}=-\omega_2^2$$

$$\omega_{p2}-\omega_{p1}=\omega_p/A \tag{1.58}$$

类似的方程把原型的阻带界限 ω_s，与带通滤波器的阻带

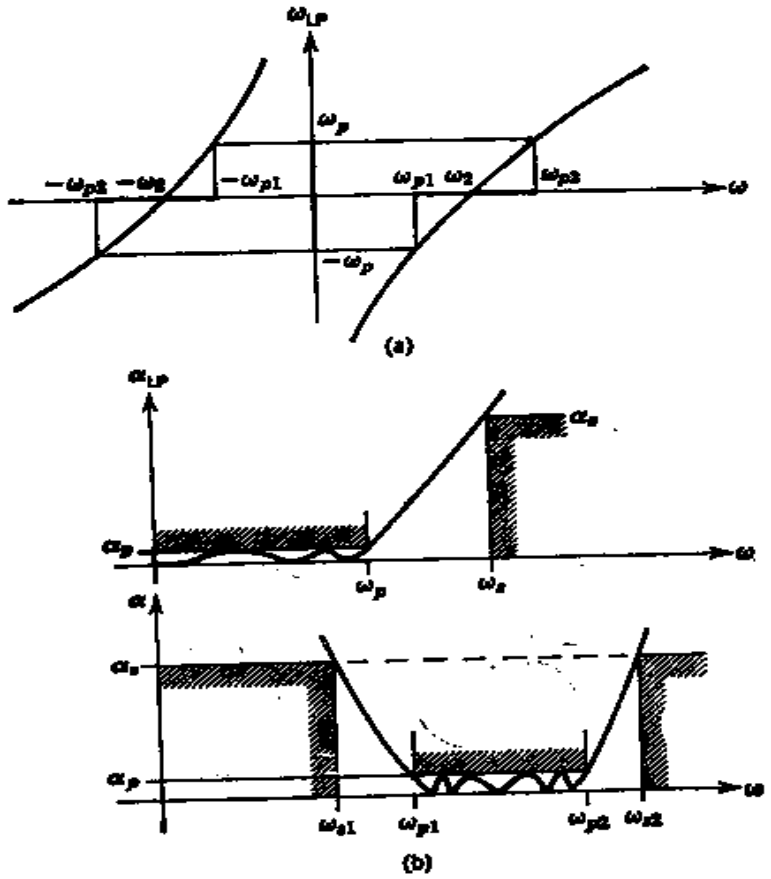


图 1-8　低通向带通变换

界限 ω_{s1} 和 ω_{s2} 相关联：

$$\omega_{s1}\omega_{s2}=\omega_2^2$$
$$\omega_{s2}-\omega_{s1}=\omega_s/A \tag{1.59}$$

应该注意，ω_{p1} 和 ω_{p2} 以及 ω_{s1} 和 ω_{s2} 对 ω_2 呈现出几何对称。这种性质，对于对应于单个 ω_{LP} 的任何频率对都适用，因而利用这种变换，仅仅能得到几何对称的带通衰减特性。这当然也意味着带通滤波器的最小阻带衰减 α_s，在两个阻带内都一样。

对于所规定的几何对称的带通衰减响应，现在就能根据上述的讨论进行设计。步骤如下：

(i) 原型的选择性参数 k，由

$$k=\frac{\omega_p}{\omega_s}=\frac{A(\omega_{p2}-\omega_{p1})}{A(\omega_{s2}-\omega_{s1})}=\frac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{\omega_{s2}-\omega_{s1}} \tag{1.60}$$

找到。

(ii) 原型的衰减界限 α_p 和 α_s，由带通响应的(不经变化)衰减界限 α_p 和 α_s 得到。

(iii) 通带频率界限 ω_p，按方便方法（例如，当 $\omega_p=1$)和所设计的低通滤波器来选择。

(iv) A 和 ω_2^2，由

$$A=\frac{\omega_p}{\omega_{p2}-\omega_{p1}}\text{或}\quad A=\frac{\omega_s}{\omega_{s2}-\omega_{s1}}$$

$$\omega_2^2=\omega_{p1}\cdot\omega_{p2}=\omega_{s1}\cdot\omega_{s2} \tag{1.61}$$

得到，然后把(1.55)和(1.56)用来将低通原型的电抗元件，变换成最终带通滤波器的元件。

通常最初的指标并不满足条件 $\omega_{p1}\cdot\omega_{p2}=\omega_{s1}\cdot\omega_{s2}$，这时，在上述步骤开始之前，就必须把这些界限的一个或一个以上加以修正。

4. $\omega_{Lp}=A\cdot\dfrac{\omega}{\omega_1^2-\omega^2}$：

这种变换导致带阻响应（图 1.9)。该分析完全类似于上述带通情况的分析，因此从略。这里，

$$\omega_{Lp}L_{Lp}\rightarrow\frac{L_{Lp}A}{\dfrac{\omega_1^2}{\omega}-\omega} \tag{1.62}$$

表示电容器 $1/(L_{Lp}A)$和电感器 $L_{Lp}A/\omega_1^2$ 的并联组合。其它设

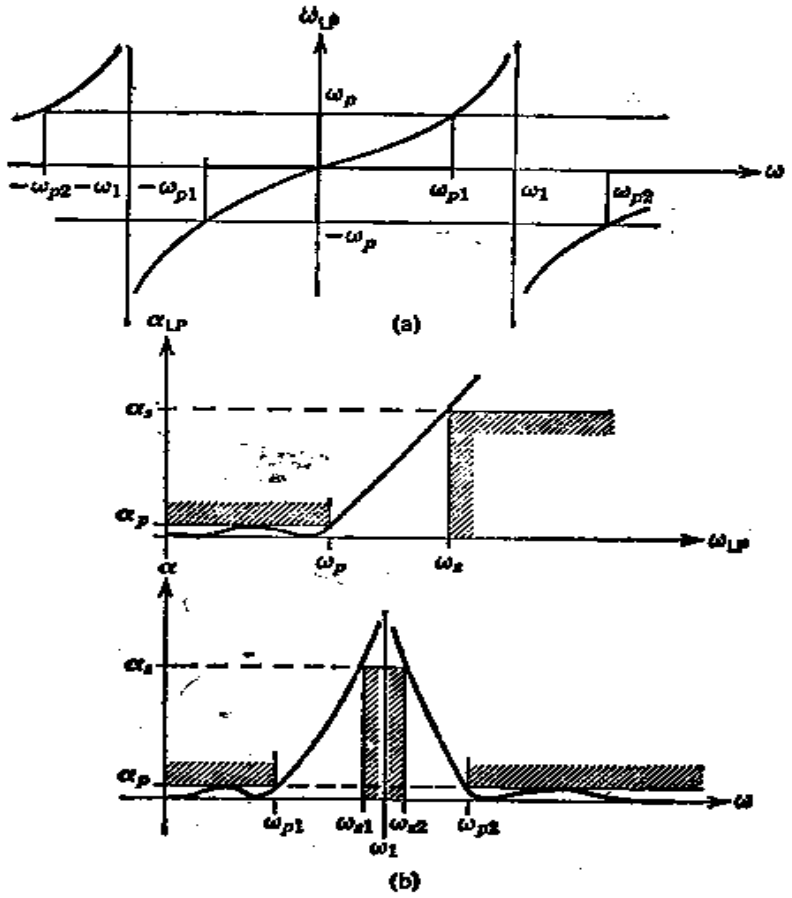


图 1-9 低通向带阻变换

计关系式为

$$\omega_{p1}\cdot\omega_{p2}=\omega_{s1}\cdot\omega_{s2}=\omega_1^2$$

$$A=\omega_p(\omega_{p2}-\omega_{p1})=\omega_s(\omega_{s2}-\omega_{s1}). \qquad (1.63)$$

带阻滤波器的设计过程，就是根据这些关系来进行。它与带通滤波器的程序非常相似；其推导则留给读者作为一个练习。

很少需要更复杂的电抗变换，因而不拟在此加以讨论。

重要的是要注意到：电抗变换并不能直接用于把线性相位低通滤波器，变换成线性相位高通、带通或带阻的电路。这是因为把线性低通的相位 $\beta_{Lp}=\omega_{Lp}T$，在变换中代换为

$$AT\,\omega\cdot\frac{(\omega_2^2-\omega^2)(\omega_4^2-\omega^2)\cdots}{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_3^2-\omega^2)\cdots}$$

（除无关紧要的 $\omega_{Lp}=A\omega$ 情况外）就不再为 ω 的一次式。

除电抗变换以外，还存在更一般的、称为**默比乌斯(Moebius)**变换的那种映射，它为设计者提供了额外的自由度。它们需要更复杂和更费劲的设计方法，因而很少使用。关于这类变换的详细讨论，读者如果有兴趣的话，可查阅参考文献[4]。

稍微不同的变换，对有源 RC 滤波器很有用。这些拟在第 8 章中加以讨论。

1.6 摘　　要

在简短讨论了各种各样滤波器型式和滤波器指标以及设计的一般概貌之后，就给出了网络函数，它对描述双端负载的电抗二端对网络的传输性质是有用的。此外还介绍了一些有关电路的定标以及把低通滤波器变换成其他滤波器型式如高通、带通和带阻滤波器的基本方法。

本章的讨论，应该能够使读者明白：在图 1-4 的程序流图中，框 1 和框 2 的广泛含义。下一章将提供有关怎样实现框 3 所示任务的详情。第 3 章将包括关于无源电抗滤波器元件值（框 4）的计算。此后几章将描述其他类型滤波器的性质和实现。在程序流图中由框 5 到框 7 所示的其余任务，或多或少地涉及滤波器的常规电路分析和制造，这些将不在本书中讨论。

习　题

1.1　试证(1.20)对电抗二端对网络有效。(提示：利用(1.14)-(1.15)，注意电抗二端对的输入功率 P_1和输出功率 P_2是相等的：

$$P_1=|I_1|^2\cdot \mathrm{Re}(Z_1)=P_2=|V_2|^2/R_2。)$$

1.2　(a) 导出课文的(1.62)和(1.63)。

(b) 试为具有几何对称频率响应的带阻滤波器设计制定类似于 1.5 节中为带通滤波器制定的那种设计步骤。

1.3　试由(1.5)和(1.8)证明关系(1.9)。(提示：把 $H(z)$、$X(z)$和 $Y(z)$的幂级数式代入(1.9)，比较 z 的同幂系数。)

1.4　试由转移函数

$$H(s)=2\frac{s^3+2s^2+2s+1}{s^2+2}$$

(对 $0\leqslant\omega\leqslant1$)来计算和绘制损耗、相位、群延迟和相位延迟。

1.5　试求出和绘制滤波器的冲激响应和阶跃响应，其 $H(s)$如习题 1.4。

1.6　当 $e(s)$ 有 $j\omega$ 轴零点时，你对该滤波器的冲激响应能预言些什么吗？假使某些零点位于 S 平面的右半，又将怎样呢？

1.7　设 $F(s)$为任意的网络函数。试证明：如果将电路中各个电阻 R_i 和电感 L_i 都乘以因数 k，而将各个电容 C_i 都除以 k，那么就把 $F(s)$转变为

$kF(s)$，如果 $F(s)$用 Ω 度量，

$F(s)/k$，如果 $F(s)$用 $1/\Omega$ 度量，

$F(s)$，如果 $F(s)$无量纲。

1.8　设滤波器的冲激响应为 $h(t)=e^{-2t}\cdot u(t)$，式中 $u(t)$ 为单位阶跃函数：

$$u(t)=\begin{cases}1，\text{由于}t\geqslant0\\0，\text{由于}t<0。\end{cases}$$

对激励

(a) $u(t)$

(b) $t\cdot u(t)-(t-1)\cdot u(t-1)$

来说，滤波器的响应是什么？

参 考 文 献

[1] E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method*, John Wiley, New York, 1964.

[2] K. L. Su, *Time Domain Synthesis of Linear Networks*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[3] H. J. Orchard and G. C. Temes, "Filter design using transformed variables", *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-15, No. 4, 385—408 (Dec., 1968).

[4] E. Christian and E. Eisenmann, *Filter Design Tables and Graphs*, John Wiley, New York, 1966.

2 逼近理论

G. C. 特默斯(G. C. Temes)
加利福尼亚大学
格杉矶，加利福尼亚

滤波器综合中的第一步就应该找到：一方面满足滤波器指标，而另一方面能够用实际电路准确实现的数学函数。后一条件限制了这类函数的数学特性。例如，通常谈到集总、线性、非时变电路，无论是有源的还是无源的，所有网络函数都能从基尔霍夫(Kirchhoff)方程得到，其中的系数就是由基本阻抗函数(R、sL、$1/sC$)经过乘、除、加、减而建立的。因此，所有这类网络函数必须都是复频率 s 的有理函数，即它们必须具有 $P(s)/Q(s)$形式，这里 $P(s)$和 $Q(s)$ 都是 s 的多项式。所以在此情况下，为滤波器频率响应所规定的任何条件，都必须用 s 的有理函数来满足。类似地考虑把这类网络的时间响应，局限于时间 t 的指数函数、多项式和三角函数或者它们的组合。

关于含有分布元件以及集总元件的网络，则情况更为普遍。那里也许还涉及双曲线函数和其他超越函数。时变元件也把网络函数的可能形式扩展了。不过要把分布电路和时变电路的讨论，推迟到第 7、9、10 章。本章将只研究用适合于集总、

线性、非时变电路的网络函数，以实现最常规定的滤波器特性的逼近方法。

关于集总、线性滤波器的设计要求，可以按频域或者时域（有时按两者）规定其性能。本著作因限于篇幅，不拟讨论时域设计的情况。有兴趣的读者，可参考新近由 K. 苏(K. Su)所著讨论完善的好书*。

由于这些限制，本章所讨论的课题是求出这样的有理函数 $H(s)$ 和 $K(s)$，它们既满足第一章中所叙述的可实现性条件，同时又满足设计要求。

象第一章所概述那样，通常为滤波器所规定的特性包括：衰减响应、相位或延迟特性、时间响应、入端和出端阻抗的性能等等。而且，有时某几个特性是同时规定的。正如所料，这些条件往往是互有抵触，因此作某些折中是必要的。甚至在最简单指标的情况下，理想响应要求的特性，通常是不可能实现的（例如，整个通带衰减为零，或整个阻带衰减为无限大），因此在理想响应和实际响应之间的误差是不可避免的。当然应该使这种误差保持尽可能小。在时间域或频率域内，误差的大小能够用各种标准来度量。如果网络函数的性能（例如，衰减），仅仅在其自变量（例如，频率）某一值附近具有重要性，那么合理的要求也许就是最平误差。如果在某个点处的误差值、以及其最大可能的各阶导数在那里都为零，那一点的误差就叫做最平误差。图 2-1 中举例说明了 $e(x)$ 在 x_0 点这种误差的特性。图示很明显（而且也可通过考查 $e(x)$ 在 x_0 周围的泰勒级数展开式来证实）：在最贴近 x_0 的周围，这种条件保证了小的误差值。同样可明显看到，离 x_0 远处，就不保证

* K. Su, «线性网络的时域综合»Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971。

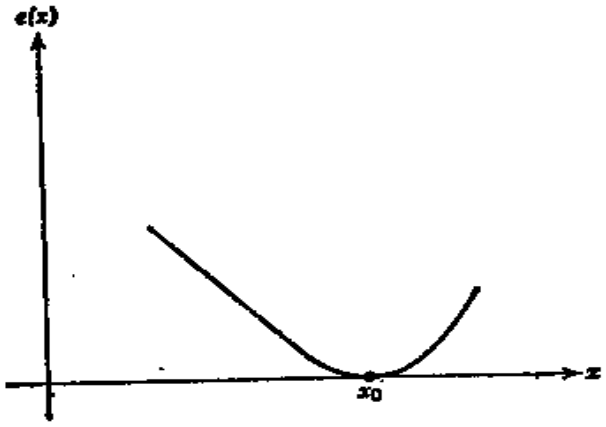


图 2-1　最平误差函数

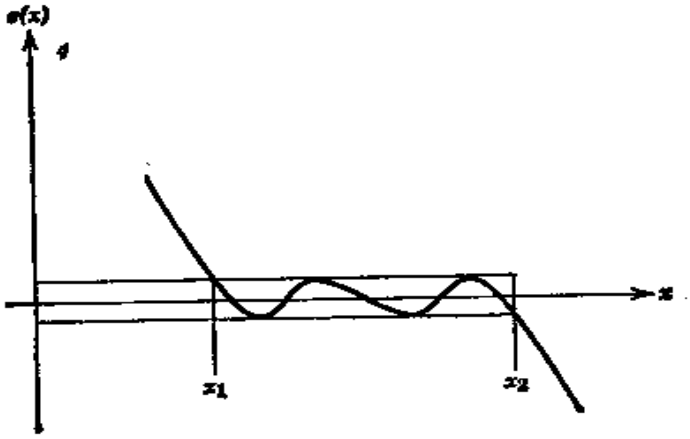


图 2-2　等波纹误差函数

了。

在许多应用上，必须在 x 轴从界限 x_1 到 x_2 的整个范围内，保持小的误差值。使范围内保持小误差的一种明显方法，是使其最大绝对值保持小的值。如果范围内的最大绝对误差是尽可能小，就把该网络函数叫做对规定理想特性的极大极小逼近或切比雪夫(Chebyshev)逼近。极大极小误差往往具有图 2-2

中所示的等波纹性能。

在自变量域内定义"小"误差的其他方法，也是可能而且实际的。我们把这些讨论推迟到第 6 章。

2.1 理想低通衰减函数

低通滤波器指标

在许多应用上，只是滤波器的衰减响应具有重要性。在某些情况下也规定相位或延迟响应，但是仅在所要求的衰减特性已达到以后，才用等衰减"全通"网络来作校正。因此，解决某些简单理想化衰减响应的逼近问题，具有明显重要性。

最简单的理想化衰减函数示于图 2-3。它在频率 ω_c 以下的衰减为零，在 ω_c 以上所有频率下的衰减为无限大。这种响应，不能由有限元件电路来满足（参看习题 2.2）。因此，通常把指标表示成更实际的形式：在 $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p$ 范围内要求衰减低于规定的上限 α_p，而对 $\omega_s \leqslant \omega < \infty$ 则其值应高于另一规定的下限 α_s（图 2-4）。象本书别处一样，这里的衰减就是所谓的换

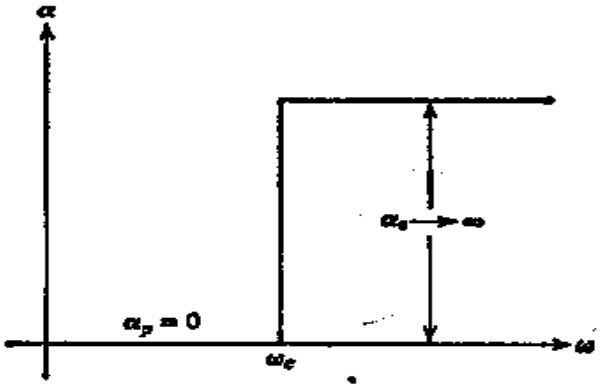


图 2-3 理想低通衰减响应

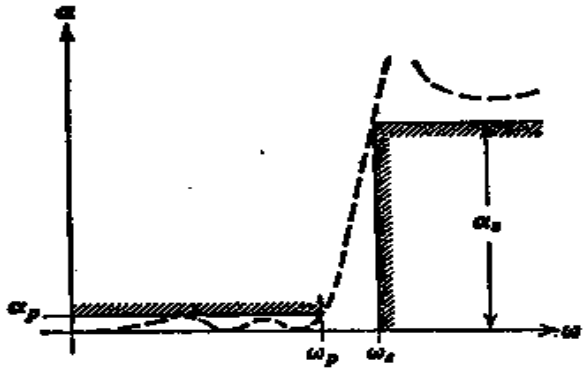


图 2-4　实际的低通滤波器指标和响应

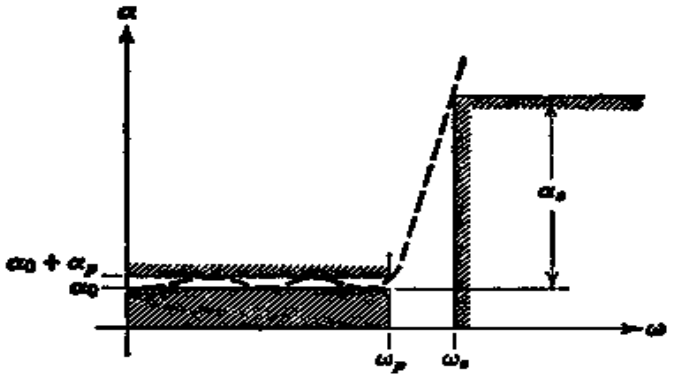


图 2-5　有平坦衰减的滤波器响应

能量衰减，并定义（用分贝）如下：

$$\alpha = 10\log_{10}\left|\frac{P_{max}}{P_2}\right| = 20\log_{10}|H(j\omega)| \qquad (2.1)$$

这里把 P_{max} 选为对无源电抗滤波器可得到的发生器功率，对于有源电路则可任意选择。

对于某些无源滤波器，发生器和负载电阻并不相等，因此，不利用变量器就不能在零频率处使换能器衰减为零。所以"平坦衰减"α_0 是不可避免的（图 2-5）。然而从（2.1）式可以看出，这仅仅代表在 $H(s)$ 中的一个固定乘数 $10^{\alpha_0/20}$。

当低通滤波器的指标用衰减响应 $\alpha(\omega)$ 给定的时候，逼近问题的解决，几乎总是按照特征函数 $K(\omega)$ 来进行。其理由如下：

1．$K(\omega)$ 为 ω 的多项式或有理函数，而 $\alpha(\omega)$ 则不是。用多项式或有理函数来逼近是比较方便的。

2．由（2.1）和（1.16）得

$$\alpha(\omega)=10\log_{10}[1+|K(j\omega)|^2] \qquad (2.2)$$

从这个关系就容易看出：

如果 $\alpha=0$，则 $|K|^2=0$

如果 $\alpha\to\infty$，则 $|K|^2\to\infty$

如果 $\frac{d\alpha(\omega)}{d\omega}=><0$，则 $\frac{d|K|^2}{d\omega}=><0$

如果 $\alpha'=\alpha''=\cdots=\alpha^{(n)}=0$，则 $[|K|^2]'=[|K|^2]''=\cdots=[|K|^2]^{(n)}=0$ 式中，撇表示对 ω 求导数。从这些关系可以看出：$|K|^2$ 依赖频率的特性，在许多方面与 α 的特性一样；事实上，$\alpha(\omega)$ 和 $|K(j\omega)|^2$ 的曲线，仅仅在它们的垂直标度方面有差别。

3．对滤波器来说其衰减在某些频带内必须低，在其他某些频带则必须高。这些可以用下法来最好的实现，即在低衰减带（通带）内，使 $K(s)$ 的所有零点都在 $j\omega$ 轴上，而且在高衰减带（阻带）内，使 $K(s)$ 的所有极点也都在 $j\omega$ 轴上。因此，安排这些零点和极点是一维而不是二维的问题是明显的简化。

总之，在只是滤波器的衰减特性具有重要性的时候，$|K|^2$ 是使用方便的函数。应注意：第一章内所列入的可实现性条件对于 $K(s)$ 是最松的，因此在选择其参数时更有灵活性。

巴特沃思(Butterworth)滤波器

逼近图 2-3 所示理想化响应的最简单方法是求出它在频率原点处的最平逼近。容易看出*：

$$|H(j\omega)|^2=H(j\omega)\cdot H(-j\omega)=H_e^2(j\omega)-H_0^2(j\omega) \quad (2.3)$$

为 ω 的偶函数；$\alpha(\omega)$ 因而同样是如此。所以讨论可以用 ω^2 作为自变量来进行。那么最平条件要求：

$$\alpha(\omega^2)=\frac{d\alpha(\omega^2)}{d(\omega^2)}=\frac{d^2\alpha(\omega^2)}{d(\omega^2)^2}=\cdots=$$

$$=\frac{d^{(n-1)}\alpha(\omega^2)}{d(\omega^2)^{n-1}}=0 \quad (2.4)$$

这些关系式对 $\omega^2=0$ 都有效。由于 α 和 $|K|^2$ 间的关系，方程 (2.4) 还可以按照 $|K|^2$ 再表出为

$$|K|^2=[|K|^2]'=[|K|^2]''=\cdots=[|K|^2]^{(n-1)}=0, \quad (2.5)$$

式中仍是 $\omega^2=0$ 而且是表示对 ω^2 求导数。方程 (2.5) 把 n 个条件加给 $|K|^2$，因此必须至少有 n 个自由参数来满足它们。设有理函数 $|K|^2$ 按 ω^2 表示为

$$|K|^2=C^2\frac{\omega^{2n}+a_{n-1}\omega^{2(n-1)}+\cdots+a_1\omega^2+a_0}{Q_m(\omega^2)} \quad (2.6)$$

式中 Q_m 为按 ω^2 表示的第 m 次多项式，其常数项不为零。容易证明，把 n 个系数选择为零：

$$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$$

所得函数

$$|K|^2=\frac{C^2\omega^{2n}}{Q_m(\omega^2)} \quad (2.7)$$

---

* 象本书其余部分一样，这里 $f_e(x)$（或 $f_o(x)$）表示 $f(x)$ 的偶（奇）部，即 $f_e(x)=\frac{[f(x)+f(-x)]}{2}$，$f_o(x)=\frac{[f(x)-f(-x)]}{2}$。

就满足 (2.5)。因为 $C^2>0$，条件 $|K^2|\geqslant 0$ 就要求 $Q_m(\omega^2)\geqslant 0$。最简单的情况为 $Q_m(\omega^2)\equiv 1$。则得

$$|K|^2=C^2\omega^{2n} \tag{2.8}$$

从而可以选择

$$K(s)=\pm Cs^n. \tag{2.9}$$

由(2.9)所描述的滤波器，通常就叫做*巴特沃思 (Butterworth) 滤波器。

第三章的讨论将表明，为了继续进行滤波器的实际实现，逼近过程必须提供以下的资料：

1．滤波器的等级 n；n 为 $e(s)$ 的阶次。因而是自然模的数目或衰减极点总数（包括在频率为零和无限大的极点）。

2．特征函数 $K(s)$。

3．换能器函数 $H(s)$。

4．衰减极点（也包括在 H 和 K 中的）。

为了得到巴特沃思滤波器的所有这些资料，我们从 (2.2) 和 (2.9)，得：

$$\alpha(\omega)=10\log_{10}[1+C^2\omega^{2n}]. \tag{2.10}$$

这里，必须选择 C 和 n 以便满足常规条件：

$$\begin{aligned}&\alpha(\omega)\leqslant\alpha_p, \quad \text{对 } |\omega|\leqslant\omega_p\\ &\alpha(\omega)\geqslant\alpha_s, \quad \text{对 } |\omega|\geqslant\omega_s\end{aligned} \tag{2.11}$$

(参看图 2-4)。因为在滤波器的最后实现中所要求元件的数目，随着阶次的增加而增加，所以应使 n 保持尽可能低，可是 n 必须为整数。图 2-6 展示了 n 对于响应的影响，它们是按(2.10)式在 $C=1$ 时算出的。很明显，n 较高时在通带中产生的衰减就较低，而在阻带中的衰减则较高。如果(2.11)的条件

---

* 以其发现者命名。

刚能满足(用等号)，则有

$$\alpha_p = 10\log_{10}[1+C^2\omega_p^{2n}]$$
$$\alpha_s = 10\log_{10}[1+C^2\omega_s^{2n}] \qquad (2.12)$$

或

$$C^2\omega_p^{2n} = 10^{\alpha_p/10}-1$$
$$C^2\omega_s^{2n} = 10^{\alpha_s/10}-1.$$

以两式相除，并能得 n 为

$$n \geqslant \frac{\log_{10}k_1}{\log_{10}k}, \qquad (2.13)$$

式中利用了缩写记号*

$$k_1 = \left[\frac{10^{\alpha_p/10}-1}{10^{\alpha_s/10}-1}\right]^{1/2} \qquad (2.14)$$

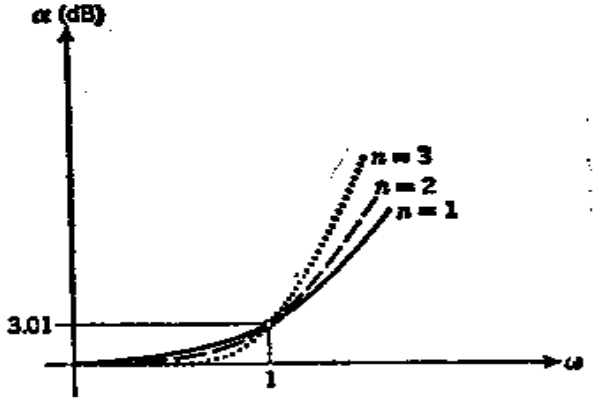


图 2-6 巴特沃思衰减响应

和

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_s} \qquad (2.15)$$

在(2.13)中需要≥符号，因为必须把非整数 n 增加到最接近的较高整数。对 n 作这种增加以后，(2.11)的关系式中只有一个能够取等号。如果选择第二个+，则得出常数因子

$$C = \frac{\sqrt{10^{\alpha_s/10}-1}}{\omega_s^n} \qquad (2.16)$$

其次，把费尔特凯勒 (Feldtkeller) 方程用来计算 $H(s)$。由(1.24)和(2.9)，我们以 $f(s)=Cs^n$ 和 $p(s)\equiv 1$ 得到

$$e(s)\cdot e(-s) = 1+C^2(-1)^n s^{2n} \qquad (2.17)$$

从而 $e(s)\cdot e(-s)$的零点就是方程

---

* 往往把 k 叫做选择性参数，而以 k_1 为鉴别参数。

\+ 通常这是适当的，因为由不等式提供的"安全限界"在很关键的通带界限 ω_p 处通常是需要的。

$$s^{2n}=C^{-2}(-1)^{n-1}=\frac{e^{j\pi(n-1+2k)}}{C^2}, \quad k=1、2、\cdots \qquad (2.18)$$

的根。所以它们是

$$s_k=C^{-1/n}\exp j\left(\frac{\pi}{2}+\pi\frac{2k-1}{2n}\right), \quad k=1、2、\cdots、2n \qquad (2.19)$$

因为 $e(s)$是严格赫维茨(Hurwitz)多项式，仅仅左半平面的根 $s_1、s_2、\cdots、s_n$ 才适于作它的零点。在左半 s 平面内，这些根按相等角度落在半径 $C^{-1/n}$ 的半圆上。现把它们（$n=5$）示于图 2-7。

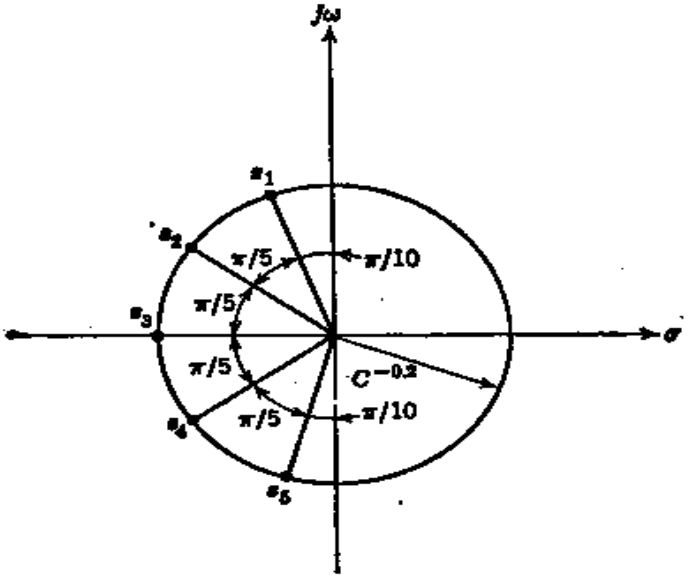


图 2-7 巴特沃思滤波器的自然模($n=5$)

由(2.17)，因为 $e(s)$的首项系数为 $\pm C$，我们得到

$$H(s)\equiv e(s)=\pm C\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)$$

$$K(s)\equiv f(s)=\pm Cs^n \qquad (2.20)$$

其中 n、C 和 s_k 分别由(2.13)、(2.16)和(2.19)给出。

现在可以容易计算 $e(s)$的根因式和系数了[27]。

例 2-1 试求巴特沃思滤波器的 n、$H(s)$和 $K(s)$。指标为：$f\leqslant 3$ MHz 处 $\alpha\leqslant 0.1$ dB，$f\geqslant 12$ MHz 处 $\alpha\geqslant 60$ dB。为了得到整数 n，按不留安全余量来满足

(i) 通带规格，

(ii) 阻带规格。

解：由(2.14)和(2.15)，

$$k_1=\sqrt{\frac{10^{0.1/10}-1}{10^{60/10}-1}}=0.15262\times 10^{-3},\quad k=\frac{3}{12}=0.25.$$

于是由(2.13)得出 $n\geqslant 6.33888$。因此应选择 $n=7$。为了简化以下的计算，将引进频率归一化。

(a) 如果准确地满足通带指标，则系数 C 由(2.12)给定为

$$C=\frac{\sqrt{10^{\alpha_p/10}-1}}{\Omega_p^n}=\frac{0.152620418}{\Omega_p^7}$$

式中 Ω_p 为归一化通带界限。为了方便起见，单位弧度频率 ω_0 的选取应使得 $C=1$，即

$$\omega_0=\frac{2\pi(3\times 10^6)}{(0.152620418)^{1/7}}=24.656299\times 10^6.$$

(b) 如果不留余量地满足阻带指标，则系数由(2.16)给定为

$$C=\frac{\sqrt{10^{\alpha_s/10}-1}}{\Omega_s^n}=\frac{999.9995}{\Omega_s^7}$$

式中 Ω_s 为归一化阻带界限。为了方便起见，选择单位弧度频率 ω_0 的选取应使得 $C=1$，即

$$\omega_0=\frac{2\pi(12\times10^6)}{(999.9995)^{1/7}}=28.105397\times10^6.$$

(注意：无论那一个 ω_0 都可以满足要求，但 ω_0 当然必须取唯一值)。在两种情况下归一化 s_k ($k=1、\cdots、7$) 都由(2.19)给出，引用 $C=1$，得

$$s_k=\exp j\left(\frac{\pi}{2}+\pi\frac{2k-1}{14}\right),k=1、\cdots、7.$$

于是，由(2.20)：

$$K(s)=s^7$$

$$H(s)=\prod_{k=1}^{7}(s-s_k)$$

$$=(s+1)(s^2+0.4450\,s+1)(s^2+1.2470\,s+1)(s^2+1.8019\,s+1)$$

$$=s^7+4.4940\,s^6+10.0978\,s^5+14.5920\,s^4+14.5920\,s^3+10.0978\,s^2+4.4940\,s+1,$$

式中也把 s 和 s_k 归一化了。ω_0 值在如上所说的情况(a)和(b)中是不同的。在上式中用 s/ω_0 替换 s，就可以得到 $H(s)$ 的去归一化(实际)式子。

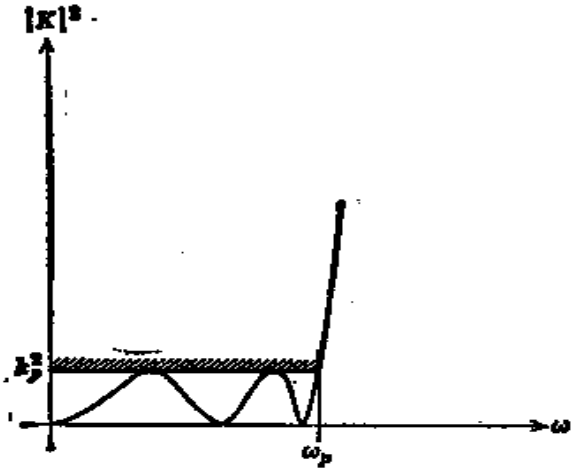


图 2-8 等波纹通带滤波器响应

切比雪夫 (Chebyshev)滤波器

理想低通特性也可以在频率原点附近按等波纹方式来近似(图 2-8)。象在巴特沃

思滤波器情况下一样，我们开始就把讨论局限于简单情况即 $K(s)$ 和 $H(s)$ 两者都是多项式而不是一般的有理函数。函数将直接给定，其特性则以后核实，而不按直截了当但是冗长的逻辑方式导出 $K(s)$。假设

$$|K|^2=k_p^2\cos^2 n u(\omega)$$
$$u(\omega)=\cos^{-1}(\omega/\omega_p) \tag{2.21}$$

我们看出 $|K|^2$ 是 $(\omega/\omega_p)^2=\cos^2 u$ 的多项式，因为

$$\cos(nu)=\mathrm{Re}[(e^{ju})^n]=\mathrm{Re}[(\cos u+j\sin u)^n]$$
$$=\cos^n u-\binom{n}{2}(\cos^{n-2}u)(1-\cos^2 u)$$
$$+\binom{n}{4}(\cos^{n-4}u)(1-\cos^2 u)^2-+\cdots \tag{2.22}$$

同样，对 $|\omega|<\omega_p$，u 为实数，从而 $|K|^2\leqslant k_p^2$。事实上，如 ω 由 0 增至 ω_p，就可以认为 u 是由 $-\frac{\pi}{2}$ 增至 0，从而 $|K|^2$ 在 0 和 k_p^2 之间起伏 n 次。另一方面，对于 $\omega>\omega_p$ 的值，$|K|^2$ 为 ω^2 的单调上升函数（参看习题 2.5）。在所有 ω^2 的 n 次多项式 $P_n(\omega^2)$ 中，它具有最优的特性，对 $\omega^2\leqslant\omega_p^2$，其值就限制在 $0\leqslant P_n(\omega^2)\leqslant k_p^2$；对于 $\omega^2\geqslant\omega_p^2$，则上升最快*。

在 $|K|^2$ 表示式中的多项式

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x) \tag{2.23}$$

叫做第 n 次切比雪夫(Chebyshev)多项式。因此，由(2.21)实现的滤波器就是通常所说的切比雪夫滤波器。

对于 $\omega>\omega_p$ 值，关系式

$$\omega=\omega_p\cos u=\omega_p\cosh(ju) \tag{2.24}$$

---

* 参看习题 2.7 和 2.8，对这番叙述的特殊情况的证明。

可以用来证明

$$u=-j\cosh^{-1}(\omega/\omega_p) \tag{2.25}$$

为纯虚数，因此

$$|K|^2=k_p^2\cosh^2 n\,ju=k_p^2\cosh^2(n\cosh^{-1}\omega/\omega_p) \tag{2.26}$$

为实数，而且大于 k_p^2。(对于 $\omega\geqslant\omega_p$，方程(2.26)同时又表示 $|K|^2$ 跟着 ω 而单调上升。) 对于已知的 α_p、α_s、ω_p 和 ω_s，(2.2)、(2.21)和(2.26)给出

$$\begin{aligned}&|K|^2_{\omega=\omega_p}=10^{\alpha_p/10}-1\leqslant k_p^2\\&|K|^2_{\omega=\omega_s}=10^{\alpha_s/10}-1\geqslant k_p^2\cosh^2(n\cosh^{-1}\omega_s/\omega_p)\end{aligned} \tag{2.27}$$

从而必需的阶次要满足

$$n\geqslant\frac{\cosh^{-1}(1/k_1)}{\cosh^{-1}(1/k)} \tag{2.28}$$

式中又利用了(2.14)和(2.15)的缩写记号。

为把(2.21)推广成复变数，用 s/j 替换 ω 并把 $u=v+jw$ 和 $s=\sigma+j\omega$ 看作复量。则

$$\begin{aligned}|K(s)|^2&=k_p^2\cos^2 n\,u(s)=k_p^2\cdot T_n^2(s/j\omega_p)\\u(s)&=\cos^{-1}(s/j\omega_p).\end{aligned} \tag{2.29}$$

从费尔特凯勒方程可进行自然模的计算，

$$k_p^2\cos^2[n(v_k+jw_k)]+1=0,k=1、2、\cdots、n \tag{2.30}$$

这里，$u_k=v_k+jw_k$，是在复 u 平面中为第 k 个自然模。利用关系

$$\cos(x+jy)=\cos x\cdot\cosh y-j\sin x\cdot\sinh y \tag{2.31}$$

可以容易地证明(习题 2.6)，S 平面自然模要满足

$$\begin{aligned}s_k&=\sigma_k+j\omega_k=j\omega_p\cdot\cos(v_k+jw_k)\\\sigma_k&=\omega_p\cdot\sin v_k\cdot\sinh w_k\\\omega_k&=\omega_p\cdot\cos v_k\cdot\cosh w_k.\end{aligned} \tag{2.32}$$

导出 s_k 的轨迹是有益的。用(2.32)，

$$\frac{\sigma_k^2}{\omega_p^2\cdot\sinh^2 w_k}+\frac{\omega_k^2}{\omega_p^2\cdot\cosh^2 w_k}=1 \qquad (2.33)$$

因此，自然模落在椭圆上。椭圆的长轴在 $j\omega$ 轴上，其长度为 $\omega_p\cosh w_k$；短轴则在 σ 轴上，并且其长度为 $\omega_p\sinh w_k$。对 $n=5$ 的自然模表示于图 2-9。

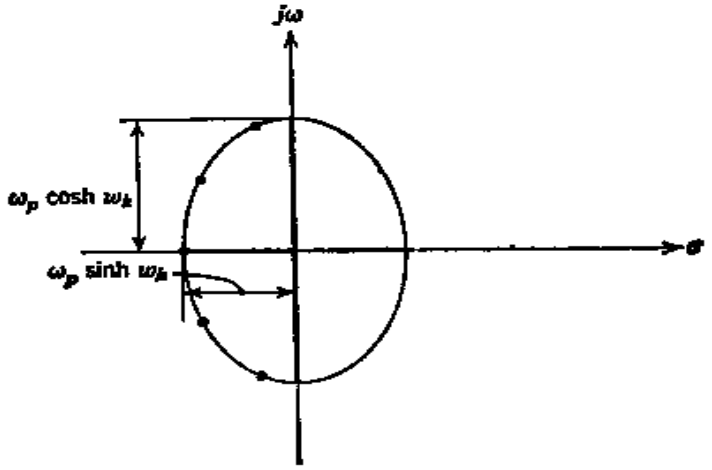


图 2-9　5 阶切比雪夫滤波器的自然模

现已知 $H(s)\equiv e(s)$ 的零点；其常数因子可以由

$$\lim_{\omega\to\infty}|H|^2=\lim_{\omega\to\infty}|K|^2=\lim_{\omega\to\infty}k_p^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n} \qquad (2.34)$$

找到，式中利用了费尔特凯勒方程以及 (2.21) 和 (2.22)。因此，

$$H(s)\equiv e(s)=\pm k_p\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{s}{\omega_p}-\sin v_k\cdot\sinh w_k-j\cos v_k\cdot\cosh w_k\right) \qquad (2.35)$$

利用(2.21)，就容易证明反射零点在 $\omega_p\cos\{[(2k-1)/n]$

$(\pi/2)\}$，$k=1、2、\cdots、n$。

$K(s)$ 中所需要的切比雪夫多项式是容易产生的，如果注意到(对于 $\omega_p=1$)

$$T_{m+1}(\omega)=\cos(mu+u)=\cos mu\cdot\cos u-\sin mu\cdot\sin u$$

$$T_{m-1}(\omega)=\cos mu\cdot\cos u+\sin mu\cdot\sin u$$

$$T_{m+1}(\omega)+T_{m-1}(\omega)=2\omega\cdot T_m(\omega), \qquad (2.36)$$

从而以

$$T_0=1$$

$$T_1=\omega$$

$$T_{m+1}=2\omega T_m-T_{m-1}, \qquad (2.37)$$

就可以容易地找到所有的 $T_n(\omega)$。

例 2-2 试求满足象前面例题巴特沃思滤波器一样指标的，切比雪夫滤波器的 n、$K(s)$和 $H(s)$。

解：由(2.28)，现在有

$$n\geqslant\frac{\cosh^{-1}6552.2212}{\cosh^{-1}4}=\frac{9.48071}{2.06344}=4.59462.$$

因此，取 $n=5$ 现在就足够了。

将频率归一化，以使通带界限弧度频率 Ω_p 等于 1，即选择 $\omega_0=2\pi(3\times10^6)$，(2.37) 给出

$$T_5(\omega)=16\omega^5-20\omega^3+5\omega.$$

这里 $k_p=\sqrt{10^{0.1/10}-1}=0.152620418$，因此由 (2.29)，我们可以选择

$$K(s)=0.152620418(16s^5+20s^3+5s)$$

$$=2.44192669s^5+3.05240836s^3+0.76310209s.$$

由 (2.30)—(2.32)，得到自然模为

$$s_k=\sigma_k+j\omega_k,\quad k=1、\cdots、5$$

式中

$$\sigma_k = \sin v_k \cdot \sinh w_k$$
$$\omega_k = \cos v_k \cdot \cos h w_k$$

和

$$v_k = \pm \frac{2k-1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$w_k = \pm \frac{1}{n} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{k_p}\right)$$

$$n=5,\quad k_p = 0.152620418.$$

于是（2.35）给出

$$H(s) = 0.152620418(s+0.538914)(s+0.166534 - j\,1.080372) \cdot (s+0.166534+j\,1.080372)(s+0.435991 - j\,0.667707) \cdot (s+0.435991+j\,0.667707).$$

具有有限衰减极点的滤波器

对于巴特沃思滤波器和切比雪夫滤波器两者，$K(s)$ 和 $H(s)$ 都是多项式。因此，它们的所有极点（也就是电路的衰减极点）都在 $\omega \to \infty$ 时出现。把这些极点移向有限 ω 值，就可以得到更好的选择性。事实上，可以把 $\alpha(\omega)$ 曲线设想为一根弹性的钢带，它被反射零点"钉"在 $j\omega$ 轴上，并被衰减极点向上推到显著高度（图 2.10）。显然，把衰减零点和极点按某种方式分别分配到整个通带和阻带，就可能得到最好的选择性*。

引进有限衰减极点并同时在整个通带保持控制的最简单方法是，把多项式 $Q_m(\omega^2)$ 象在（2.7）中一样，复原成巴特沃思特征函数的分母。选择 $m \leqslant n/2$ 和

---

* 这些定性分析、也可以得到定量的证明[2]。

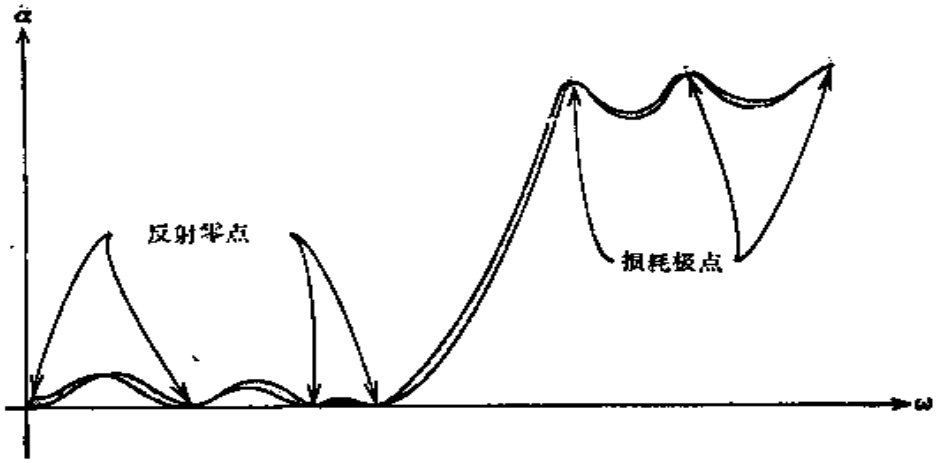


图 2-10　零点和极点在形成衰减响应中的作用

$$Q_m(\omega^2)=\prod_{i=1}^{m}(\omega^2-\omega_i^2)^2$$

得出

$$K(s)=\pm C\frac{s^n}{\prod_{i=1}^{m}(s^2+\omega_i^2)},\qquad(2.38)$$

容易证实：$|K|^2$ 从而 α，在频率原点仍然是最平的。可是现在，在 $\pm\omega_i$ 还有 $2m$ 个衰减极点，而在无限大频率则只有（$n-2m$）个衰减极点。

衰减响应的阻带性能，在很大程度上取决于衰减极点 ω_i 的位置，而其通带性能则与该位置的关系甚小。因此，对 ω_i 寻求适当值是重要的。最简单情况就是图 2-11 中所描绘的，其中阻带衰减按"等波纹"方式在 α_s 和 ∞ 之间起伏。这种切比雪夫阻带性能，可以用直截了当的方法从（2.21）的切比雪夫通带特性函数来得到，其步骤如下：

1．用 ω_s/ω 替换 ω/ω_p，

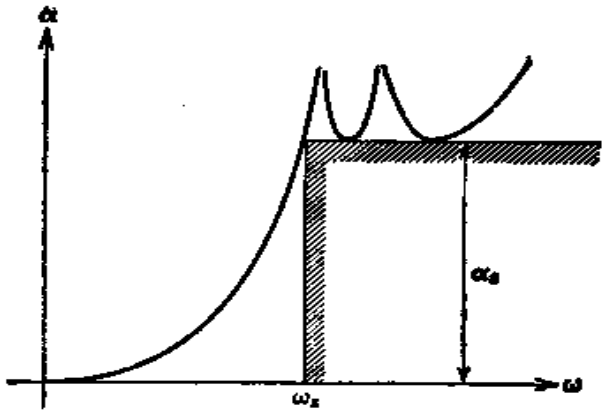


图 2-11　切比雪夫阻带衰减响应

2．用$|K|^{-2}$替换$|K|^2$。

这些步骤将导致图 2-12 中所说明的$|K|^2$的变换。所得方程为

$$|K|^2=[k_p^2\cos^2 n u]^{-1}$$

$$u(\omega)=\cos^{-1}(\omega_s/\omega) \tag{2.39}$$

其衰减极点在

$$\omega_i=\frac{\omega_s}{\cos\dfrac{2i-1}{n}\cdot\dfrac{\pi}{2}},\quad i=1,\ 2,\cdots,n. \tag{2.40}$$

对于已知α_p、α_s、ω_p和ω_s，所必需的阶次仍旧用（2.28）给定。因为$|K|^2$具有（2.39）所给出的形式，所以通常把这种滤波器叫做“反切比雪夫”滤波器。

如果需要的最小阻带衰减α_s不是定值，而是随ω而变化，则采用（2.40）所给定的衰减极点分布，也许是非常低效的，而应找到能使其适应实际需要的衰减极点（参看图 2-13）。对这种情况的设计方法在参考文献[3]中叙述。

下面，我们将推广切比雪夫滤波器以获得在通带有等波纹

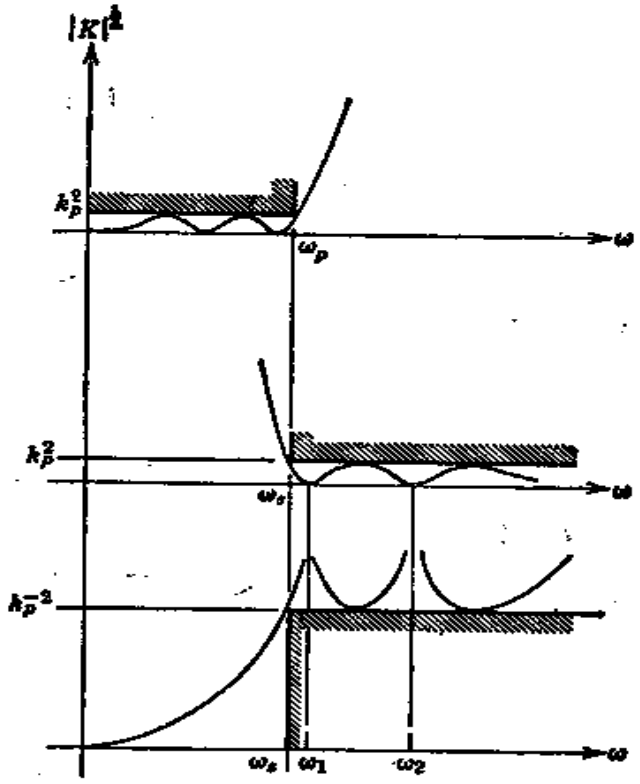


图 2-12　切比雪夫通带响应变换成切比雪夫阻带响应

性能，在阻带具有有限衰减极点 ω_1 的滤波器（图 2-14）。虽然可以作更合乎逻辑的推导 [4]，但这里将采用启发式的方法。作为第一步，引进新的复自变量

$$z=\sqrt{1+\omega_p^2/s^2},\ \mathrm{Re}(z)\geqslant 0. \tag{2.41}$$

这就把通带（$s=j\omega$，$|\omega|\leqslant\omega_p$）变换到 z 平面的虚轴（jy 轴）上；并把阻带（$s=j\omega$，$|\omega|>\omega_p$）映射在实 x 轴的 $0<x\leqslant 1$ 部分上面。例如，图 2-14 中所示的衰减响应，变成图 2-15 的三维图中所示的衰减响应。其次，我们定义多项式

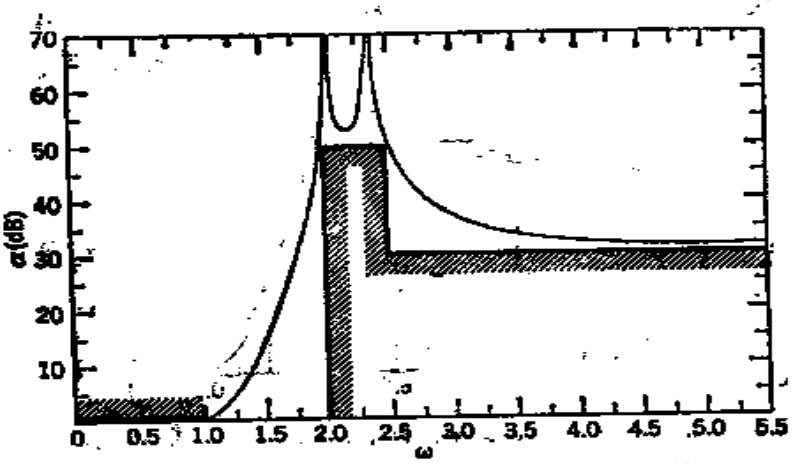


图 2-13 阻带衰减指标随频率变化的滤波器特性

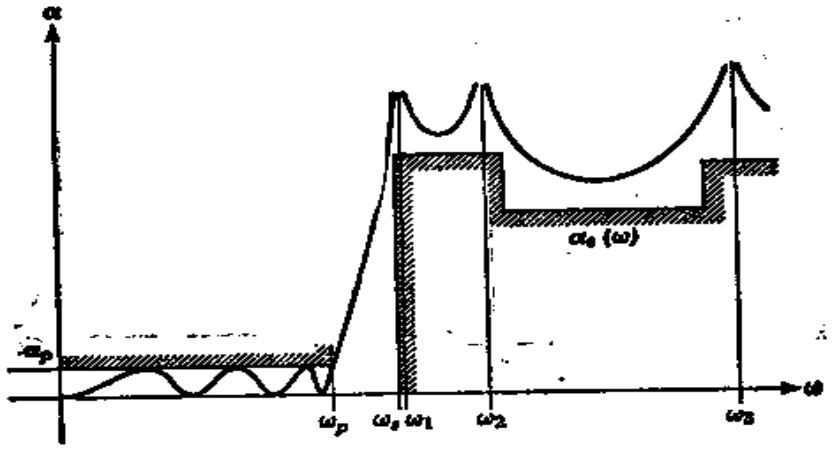


图 2-14 等波纹通带，任意阻带滤波器响应

$$E(z^2)+zF(z^2)=\prod_{i=1}^{n}(z+z_i) \qquad (2.42)$$

式中 z_i 为已变换的衰减极点，$z_i=\sqrt{1-\omega_s^2/\omega_i^2}$。$E$ 和 F 为偶多项式，从而 E 为全式的偶部，zF 为全式的奇部。重要的是要记住：(2.41) 把 s 平面中位于 $+j\omega_i$ 和 $-j\omega_i$ 两处的衰减极点，都变换到 $+\sqrt{1-\omega_s^2/\omega_i^2}$ 处，从而所有有限 $j\omega$ 轴极点都以

重阶出现在 z 平面内，而且 $\omega\to\infty$ 处的极点的确以 $(z+1)$ 的因数形式进入了 $E+zF$。现在研究 z 平面内函数

$$|K|^2=k_p^2\frac{E^2}{E^2-z^2F^2}=\frac{k_p^2}{1-\left(\dfrac{zF}{E}\right)^2} \tag{2.43}$$

的性能。由 (2.42)，这个 z 平面函数在阻带内的 z_i 处有极点。在已变换通带内，即在 jy 轴上，zF/E 形同电抗，因为 zF 和 E 分别是赫维茨多项式 $E+zF$ 的奇部和偶部（参看(2.41)和 (2.42))。因此，yF/E 为 y 的单调上升函数，具有交错的零点和极点。结果，$1-(zF/E)^2=1+(yF/E)^2$ 变化在 1（当 $yF/E=0$）和∞（当 $yF/E\to\infty$）之间；因而 $|K|^2$ 振荡在 0

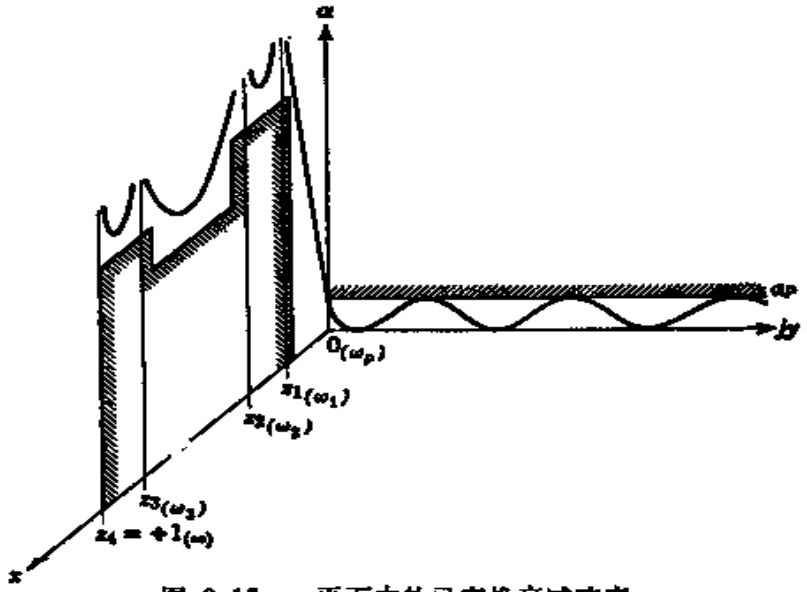


图 2-15　z 平面内的已变换衰减响应

和 k_p^2 之间。所以，最后 $|K|^2$ 具有所需要的极点和要求的切比雪夫通带性能。因为它只是 z^2 的函数，所以只需简单的把 $z^2=1+\omega_1^2/s^2$ 代入 (2.43) 就可得到 s 域的特征函数。因此对于已

规定的 ω_i，就可以按直截了当的步骤找到 $|K|^2$。对于已规定随频率变化的衰减 $\alpha_s(\omega)$，为了寻求 ω_i，使 $|K|^2$ 分解为

$$|K|^2=k_p^2\frac{E^2}{E^2-z^2F^2}=\frac{k_p^2}{2}\left[1+\frac{1}{2}\frac{E+zF}{E-zF}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{E-zF}{E+zF}\right] \qquad (2.44)$$

这里，由 (2.2)，

$$k_p^2=10^{\alpha_p/10}-1 \qquad (2.45)$$

从而在 $\alpha_p<3$ dB 的常规情况下，$k_p^2<1$。从另一方面来说，我们注意到在已变换阻带内一般地 $\alpha\geqslant 30$ dB，结果 $|K|^2\gg 1$。因此，在 (2.44) 的极右端，不是第二项就是第三项必然比 1 大得很多（二者不能都大，因为它们互为倒数。）。在阻带 ($0<z\leqslant 1$) 内，$E-zF$ 有 n 个零点 z_i，而 $E+zF$ 则一个也没有。因此，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{E+zF}{E-zF}\gg 1\gg\frac{1}{2}\cdot\frac{E-zF}{E+zF} \qquad (2.46)$$

和

$$|K|^2\cong\frac{k_p^2}{4}\cdot\frac{E+zF}{E-zF}=\frac{k_p^2}{4}\prod_{i=1}^{n}\frac{z_i+z}{z_i-z}. \qquad (2.47)$$

因而在阻带内

$$\alpha(\omega)\cong 10\log_{10}|K|^2=10\log_{10}(10^{\alpha_p/10}-1)-6.02+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}10\log_{10}\frac{z_i+z}{z_i-z} \qquad (2.48)$$

引进新变数

$$\gamma=\frac{1}{2}\ln(1-\omega_p^2/\omega^2)=\ln z, \qquad (2.49)$$

则求和号中的项变成

$$10\log_{10}\frac{e^{\gamma_i}+e^{\gamma}}{e^{\gamma_i}-e^{\gamma}}=10\log_{10}\frac{e^{\gamma_i-\gamma}+1}{e^{\gamma_i-\gamma}-1}=$$

$$=10\log_{10}\coth\frac{\gamma_i-\gamma}{2}. \tag{2.50}$$

把对应于有限 $\pm\omega_i$ 的重阶极点 z_i 分开，所以

$$\alpha(\omega)\cong 10\log_{10}(10^{\alpha_s/10}-1)-6.02+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}20\log_{10}\coth\frac{|\gamma-\gamma_i|}{2}+10(n-$$

$$-2m)\log_{10}\coth\frac{|\gamma|}{2}. \tag{2.51}$$

因此，$\alpha(\omega)$ 为形状相同但中心定在不同值 $\gamma=\gamma_i$ 处的几个“样板函数”的加权和。样板函数

$$\alpha_i=20\log_{10}\coth\frac{|\gamma-\gamma_i|}{2} \tag{2.52}$$

表示于图 2.16。利用图解法，或者采用更好的易为计算机编程序的迭代算法[3]，就可以求出参数 γ_i。

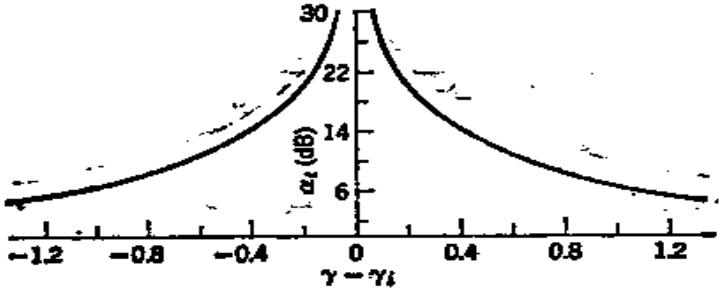


图 2-16 等波纹通带滤波器的样板曲线

例 2-3 试求具有 $n=3$、衰减极点一个在 $\omega_{1,2}=\pm 2$，一个在无限大频率的切比雪夫通带低通滤波器的 $|K(s)|^2$。在通带（$|\omega|\leqslant 1$）内，最大容许衰减为 0.3 dB。

解：由于 $\omega_s=1$，方程（2.41）给定

$$z=\sqrt{1+\frac{1}{s^2}},\quad \mathrm{Re}(z)\geqslant 0.$$

因此

$$s_{1,2}=\pm j\ 2\Rightarrow z_1=z_2=\sqrt{3}/2,$$
$$s_3\to\infty\Rightarrow z_3=1.$$

由 (2.42)，

$$E+zF=\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot(z+1)=z^3+(1+\sqrt{3})z^2+$$
$$+\left(\frac{3}{4}+\sqrt{3}\right)z+\frac{3}{4}$$

和

$$E-zF=\left(-z+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot(-z+1)=-z^3+$$
$$+(1+\sqrt{3})\,z^2-\left(\frac{3}{4}+\sqrt{3}\right)z+\frac{3}{4}.$$

所以方程 (2.43) 给定：

$$|K(z)|^2=\frac{k_p^2\left[(1+\sqrt{3})\,z^2+\frac{3}{4}\right]^2}{\left(\frac{3}{4}-z^2\right)^2(1-z^2)}$$

式中 k_p^2 由 (2.45) 给定 (对 $\alpha_p=0.3$ dB)，即

$$k_p^2=0.071519305.$$

利用 (2.41) 变换到 s 平面：

$$|K(s)|^2=\frac{16(0.0715193)\,(-s^2)(3.48205\,s^2+2.73205)^2}{(s^2+4)^2}$$
$$=\frac{-1.144309\,s^2(3.48205\,s^2+2.73205)^2}{(s^2+4)^2}.$$

显然，衰减极点如同所规定那样，确实在 $\omega=\pm 2$ 和无限大频率处。

这类滤波器的一种重要特殊类别，具有 $\alpha_s(\omega)\equiv\alpha_{s0}=$定值的特征，所以在通带和阻带内两者都要求切比雪夫响应（图2-17）。可以准确地解算这类电路，而且得出含有椭圆函数的表达式，因此，把它们叫做椭圆滤波器。对它们的分析虽不太复杂，但非常冗长，因而予以省略。感兴趣的读者可参考优秀的参考文献[6]。

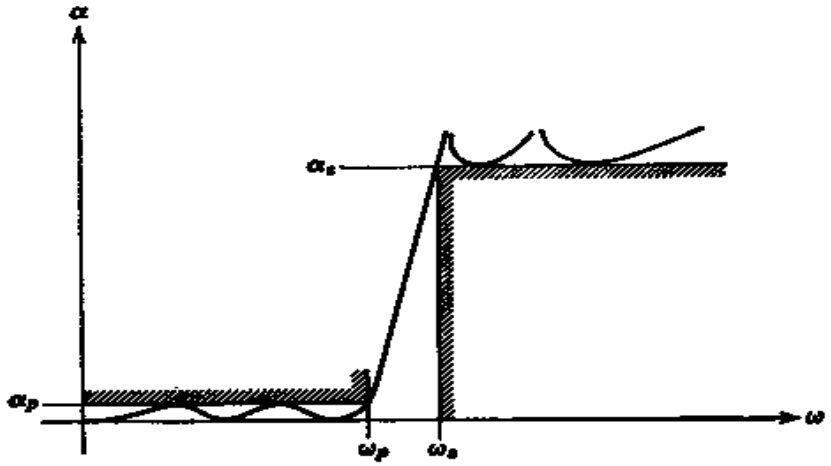


图 2-17　椭圆滤波器响应

必须注意到：把椭圆滤波器看作仅是另一种切比雪夫通带滤波器并使用样板法来近似其阻带中规定的 $\alpha_s=\alpha_{s0}$，是实际的。其计算工作量和准确度，和用椭圆滤波器设计的常规方法[6,7]所能得到的不相上下。

最后必须注意到，对于已知的 α_p、α_s、ω_p 和 ω_s，在所有有理特征函数中，椭圆函数需要的阶次最低。这是由于它在两种频带中都具有切比雪夫特性。因此，如果仅仅衰减响应具有

重要性，可以认为椭圆函数是对图 2.3 所示理想响应的最有效而且经济的逼近。

2.2 线性相位函数

在许多实际应用中，应该保持非正弦信号通过滤波器的波形，没有显著的失真。这通常需要滤波器在通带内的相位响应为线性的，或者说，相位延迟和群延迟两者，在通带内为常数。如同衰减响应的情况一样，这种平坦延迟可利用下面讨论的各种标准加以逼近。

最平群延迟多项式

为在 $\omega=0$ 附近对恒定群延迟（从而对线性相位）得到最平逼近，可利用(1.26)并规定 $\beta_e(\omega)=\omega T_0$：

$$j\beta_e(\omega)=j\omega T_0 \triangleq \tanh^{-1}[H_0(s)/H_e(s)]_{s=j\omega}$$

$$\tanh sT_0=\frac{e^{2sT_0}-1}{e^{2sT_0}+1} \triangleq [e_0(s)/e_e(s)]^{\pm 1}$$

$$e^{2sT_0} \triangleq \pm\frac{e(s)}{e(-s)},\quad s=j\omega. \tag{2.53}$$

这里，＋号对偶数 $p(s)$有效，－号对奇数 $p(s)$有效。为了明确起见，采用偶数 $p(s)$，并写成

$$e(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_{n-1}s^{n-1}+s^n, \tag{2.54}$$

按泰勒（级数）展开，(2.53)给定

$$e^{2sT_0}\cdot e(-s) \triangleq e(s)$$

$$[1+(2sT_0)+\frac{(2sT_0)^2}{2!}+\frac{(2sT_0)^3}{3!}+\cdots]\cdot$$

$$\cdot[a_0-a_1s+a_2s^2-+\cdots]^{-1}=a_0+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ns^n.$$

(2.55)

对于最平逼近，在(2.55)两边的两个多项式的系数应该一致。因为右边并不含有 s^{n+1}、s^{n+2}、…的项，左边这些项直到 s^{2n}而且包括 s^{2n}项的系数也应该为零。因此，由 s^{n+1}、s^{n+2}、…s^{2n}的系数，

$$\begin{aligned}
&\frac{(2T_0)^{n+1}}{(n+1)!}a_0-\frac{(2T_0)^n}{n!}a_1+-\cdots+\\
&+(-1)^{n-1}\frac{(2T_0)^2}{2!}a_{n-1}+(-1)^n\frac{(2T_0)}{1!}=0\\
&\frac{(2T_0)^{n+2}}{(n+2)!}a_0-\frac{(2T_0)^{n+1}}{(n+1)!}a_1+-\cdots+\\
&+(-1)^{n-1}\frac{(2T_0)^3}{3!}a_{n-1}+(-1)^n\frac{(2T_0)^2}{2!}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{(2T_0)^{n+k}}{(n+k)!}a_0-\frac{(2T_0)^{n+k-1}}{(n+k-1)!}a_1+-\cdots+\\
&+(-1)^{n-1}\frac{(2T_0)^{k+1}}{(k+1)!}a_{n-1}+(-1)^n\frac{(2T_0)^k}{k!}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{(2T_0)^{2n}}{(2n)!}a_0-\frac{(2T_0)^{2n-1}}{(2n-1)!}a_1+-\cdots+\\
&+(-1)^{n-1}\frac{(2T_0)^{n+1}}{(n+1)!}a_{n-1}+(-1)^n\frac{(2T_0)^n}{n!}=0.
\end{aligned}$$

(2.56)

下面可以证明，这 n 个方程由 n 个系数

$$a_i=\frac{(2n-i)!}{i!(n-i)!}(2T_0)^{i-n},\quad i=0、1、2、\cdots、n-1$$

(2.57)

来满足*。把(2.57)所给定的 a_i 代入(2.56)，则第 k 个方程变成

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{(2n-i)!}{i!(n-i)!}\cdot\frac{(2T_0)^k}{(n+k-i)!}=0. \tag{2.58}$$

省略不重要的$(2T_0)^k$因数，并引进 $j\equiv n-i$，

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{(n+j)!}{j!(n-j)!}\cdot\frac{1}{(k+j)!}=$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(n+j)!}{(k+j)!}=0,k=1,2,\cdots,n. \tag{2.59}$$

容易看出：此式和 $x=1$ 的

$$\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}[x^n(1-x)^n],\ k=1,2,\cdots,n \tag{2.60}$$

一样。因为后面这个函数由于各项中都有$(1-x)$因数的存在对 $x=1$ 必定为零，证毕。

由(2.57)所给定的 a_i，也为(2.55) 中 s^0、s^1、s^2、s^3、$\cdots$ s^n的系数提供匹配，习题 2.20 的内容就为证实这基本事实。

(2.57)中所给定的系数 a_i，已经按 $T_0=1$ 制了表[27]。下面拟对大的 n 来考查 $e(s)$的性能。

对于 $n\to\infty$，

$$\frac{a_i}{a_0}=\left[\frac{(2n-i)!}{(2n)!2^{-i}}\right]\cdot\left[\frac{n!}{(n-i)!}\right]\frac{T_0^i}{i!}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{2}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{i-1}{2}\right)}\cdot\frac{T_0^i}{i!}\to\frac{T_0^i}{i!}$$

---

* 注意：(2.57)对 $a_n=1$ 也有效。

从而

$$e(s)=\sum_{i=0}^{n} a_i s^i \to \sum_{i=0}^{n} a_0 \frac{(sT_0)^i}{i!} \to a_0 e^{sT_0}. \qquad (2.61)$$

于是，对于常数 $p(s)$，理想系统所需要的特性就是 $H(j\omega)\propto e^{j\omega T_0}$。

对于大的但是有限的 n，

$$e(j\omega)\cdot e(-j\omega)=[e_e(j\omega)]^2-[e_0(j\omega)]^2\to a_0^2 e^{(\omega T_0)^2/(2n-1)} \qquad (2.62)$$

这可以用在大的 n 和 $\omega T_0 \ll n$ 时的泰勒(级数)展开式来证实。因此，选择 $p(s)\equiv a_0$，其极限衰减响应（用分贝）就是高斯(Gaussian)函数

$$e(\omega)=10\log_{10}e^{(\omega T_0)^2/(2n-1)}=(10\log_{10}e)\cdot\frac{(\omega T_0)^2}{2n-1} \qquad (2.63)$$

而 3 dB 频率就是 $\omega_{3dB}=T_0^{-1}\sqrt{(2n-1)\ln 2}$

利用级数展开也能够找到实际的群延迟性能。结果就是所期望的对恒定群延迟 T_0 的最平逼近：

$$T_G=T_0\left[1-\left(\frac{\omega^n}{a_0}\right)^2+-\cdots\right]$$

$$T_G\cong T_0\left[1-\left(\frac{2^n n!}{(2n)!}\right)^2\cdot(\omega T_0)^{2n}\right] \qquad (2.64)$$

方程(2.63)和(2.64)对低达 3 的 n 值保持完全有效，从而可以用来（对规定的 T_0 和在某些 ω_x 处所指定的衰减或延迟失真）确定所需要的阶次 n。

由(2.62)—(2.64)，对 $n>3$ 和 $\omega T_0<n$，逼近

$$H(j\omega)\cong\exp\left[\frac{(\omega T_0)^2}{2(2n-1)}+j\omega T_0\right] \qquad (2.65)$$

是有效的。因此，如果在图 1-5 的电路中，选择 $R_1=R_2=1$ 和 $E(t)=2\delta(t)$，则该系统的冲激响应可以给定为

$$v_2(t)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\exp\left[-j\omega T_0-\frac{T_0^2\omega^2}{2(2n-1)}\right]\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{(2n-1)/\pi}}{\sqrt{2}\cdot T_0}\exp\left[-\frac{2n-1}{2T_0}(t-T_0)^2\right], \qquad (2.66)$$

式中已利用了傅里叶变换理论[9]的熟知关系

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-at^2}\leftrightarrow e^{\omega^2/4a}$$

$$f(t-T_0)\leftrightarrow\mathscr{F}^{-1}[f(t)]e^{-j\omega T_0}. \qquad (2.67)$$

因此，振幅响应和时间响应二者大致都是高斯函数。

上面所叙述的，在 $\omega=0$ 附近对恒定群延迟的最平逼近，原来是由 W. E. 汤姆森 (W. E. Thomson) 得来的[10]。用(2.57)中所给定的系数，使所得 $e(s)$多项式和贝塞尔(Bessel)多项式有联系，而且它们本身就是通常所说的龙梅尔(Lommel)多项式。为此，由这些 $e(s)$ 得来的电路通常就叫做贝塞尔和(式)汤姆森滤波器。

例 2-4 试求在 0－0.4 MHz 频率范围内，以 20%的最大误差来逼近 $T_0=2\ \mu sec$ 的贝塞尔/汤姆森滤波器的 n 和 $e(s)$ 以及它在 0.4 MHz 的衰减值。

解：由(2.64)，这里要求

$$\left(\frac{2^n n!}{(2n)!}\right)^2\cdot(2\pi\ 0.8)^{2n}\leqslant 0.2$$

以 $n=1、2、\cdots$代入，可找到 $n=8$ 就是需要的阶次。所以，由(2.57)所得到的系数 a_i 为：

$$a_0=\frac{2027025}{256}10^{48}=7918.0664\times10^{48}$$

$$a_1=\frac{2027025}{128}10^{42}=15836.1328\times10^{42}$$

$$a_2=\frac{945945}{64}10^{36}=14780.3906\times10^{36}$$

$$a_3=\frac{270270}{32}10^{30}=8445.9375\times10^{30}$$

$$a_4=\frac{51975}{16}10^{24}=3248.4375\times10^{24}$$

$$a_5=\frac{6930}{8}10^{18}=866.2500\times10^{18}$$

$$a_6=\frac{630}{4}10^{12}=157.5000\times10^{12}$$

$$a_7=\frac{36}{2}10^{6}=18.0000\times10^{6}$$

$$a_8=1$$

而由(2.54)，

$$a(s)=\sum_{i=0}^{8}a_is^i.$$

由(2.63)得到在 0.4 MHz 的衰减，

$$a[2\pi(0.4)10^6]=4.342945\frac{(2\pi(0.4)2)^2}{15}$$

$$=7.315311\ \text{dB}.$$

希望读者按归一化单位（例如，选择 $T_0=1$）重复这些计算，看看大的 10 次幂怎样消失在归一化的计算中。

等波纹群延迟逼近

在前节中已看出：在最平（巴特沃思）衰减响应被等波纹（切比雪夫）逼近代换的时候，就获得显著的改进。这样一种改

进在延迟逼近情况下也是期望得到[12]。因此，下面拟讨论恒定群延迟的等波纹逼近。

如果要产生恒定群延迟 T_0 的等波纹逼近获得多项式 $e(s)$ 所需要满足的方程，就必须分析群延迟函数 $T_g(s)$ 的特性。对于电抗二端对网络，由(1.29)

$$T_g(s)=E_v\left[\frac{e'(s)}{e(s)}\right]=E_v\left[\frac{d}{ds}\ln e(s)\right] \tag{2.68}$$

因此，如果 $e(s)=k\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)$ 则

$$T_g(s)=E_v\left[\sum_{i=1}^{n}(s-s_i)^{-1}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1/2}{s-s_i}-\frac{1/2}{s+s_i}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{s^2-s_i^2} \tag{2.69}$$

因此，对于具有负实部的任何共轭复数组 s_i，(2.69)代表可用电抗二端对网络实现的群延迟函数。注意其 $\pm 1/2$ 留数，以及当 $s\to\infty$，$T_g(s)\to\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\right)/s^2$。

下面拟考查所要求的响应(图 2-18)。对于 $|\omega|\leqslant\omega_p$，允许

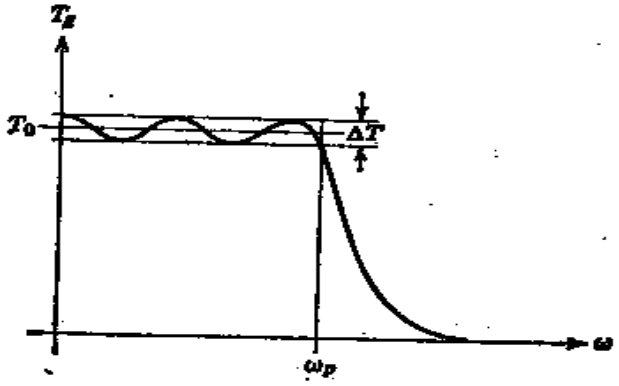


图 2-18 等波纹群延迟响应

在平均延迟 T_0 上下有 ΔT 的峰——峰波纹，$T_g(\omega)$可 以明显地写成如下形式

$$T_g(\omega)=T_0-\frac{\Delta T}{2}R(\omega). \tag{2.70}$$

这里，$R(\omega)$必须为 ω 的偶有理函数，还必须满足以下条件：

1．对于$|\omega|\leqslant\omega_p$，$R(\omega)$振荡在+1 和−1 之间。

2．$\lim_{\omega\to\infty}R(\omega)=2\,T_0/\Delta T$，以保证 $\lim_{\omega\to\infty}T_g(\omega)=0$。对于大的 ω，$R(\omega)\to 2\,T_0/\Delta T+$常数$/\omega^2$。

3．由解析延拓产生复函数* $R(s)$，它必须在 s 平面左半有共轭复数极点 s_i，而且在它们的负数$-s_i$ 也有极点。在 s_i 处的留数必须为$-1/\Delta T$；在$-s_i$ 处的留数则必须为$+1/\Delta T$。

所有这些条件，都是直接从(2.69)和(2.70)以及从图 2-18 得出的。

为了寻求满足条件 1-3 的函数 $R(s)$，我们再引进 (2.41) 的映射并考虑函数

$$R(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{E+zF}{E-zF}+\frac{E-zF}{E+zF}\right] \tag{2.71}$$

的性能，式中 $E+zF=\prod_{i=1}^{n}(z+z_i)$ 如前所述那样，而且这里所有 z_i 都在 z 平面的右半。在 jy 虚轴上，$R(z)$ 的两项表现得象全通函数$(1/2)e^{\pm j\alpha(y)}$一样，从而 $R(jy)=\cos\alpha(y)$ 振荡**在±1 之间。由(2.41)回忆到 jy 轴相当于$|\omega|\leqslant\omega_p$，可见 $R(z)$作为 ω 的函数满足条件 1。

因为当 $\omega\to\infty$时，$z\to 1$，条件 2 要求

---

* 用 S/j 替换 $R(\omega)$中的 ω，即得。

** 若注意 $R(Z)$和(2.44)的$|K|^2$有关系，而且它们间满足 $R(Z)=2\,k_p^{-2}|K|^2-1$，也可以推得这个同样结论。

$$R(1)=\frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{1+z_i}{-1+z_i}+\prod_{i=1}^{n}\frac{1-z_i}{-1-z_i}\right]=\frac{2T_0}{\Delta T}. \quad (2.72)$$

为了满足条件3，则由(2.70)所计算的T_g的部份分式展开式，就必须与（2.69）中所给定的$T_g(s)$一致，根据(2.70)和(2.71)，

$$T_g(z)=T_0-\frac{\Delta T}{4}\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{z_i+z}{z_i-z}+\prod_{i=1}^{n}\frac{z_i-z}{z_i+z}\right]$$

$$\lim_{z\to z_k}T_g(z)=-\lim_{z\to z_k}\frac{\Delta T}{4}\left[2z_k\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\frac{z_i+z_k}{z_i-z_k}\right]\frac{1}{z_k-z}, \quad (2.73)$$

把(2.69)的$T_g(s)$变换到z平面，则给出

$$T_g(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\pm\dfrac{\omega_p}{\sqrt{z_i^2-1}}}{\dfrac{\omega_p^2}{z^2-1}-\dfrac{\omega_p^2}{z_i^2-1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\pm\sqrt{z_i^2-1}(z^2-1)}{\omega_p(z_i^2-z^2)}$$

$$\lim_{z\to z_k}T_g(z)=\lim_{z\to z_k}\frac{\pm(z_k^2-1)^{3/2}}{\omega_p\,2\,z_k(z_k-z)}. \quad (2.74)$$

这里必须这样来选择±号，以使各个$s_i=\pm\omega_p(z_i^2-1)^{-1/2}$从而各个$(z_i^2-1)^{1/2}$都有负实部。使$z$平面留数相等

$$-\frac{\Delta T}{2}z_k\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\frac{z_i+z_k}{z_i-z_k}=\frac{\pm(z_k^2-1)^{3/2}}{2\omega_p z_k}$$

或

$$\frac{\pm(z_k^2-1)^{3/2}}{z_k^2}+\omega_p\Delta T\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\frac{z_i+z_k}{z_i-z_k}=0,\ k=1,2,\cdots n. \quad (2.75)$$

对于已知的ω_p和ΔT，从这n个非线性复数联立方程

(2.75) 就可以找到 n 个复 z_i。如果有好的 z_i 初始值可用，那么迭代技术(例如牛顿法)将迅速收敛得出解答。然后由(2.72)可以求出平均延迟 T_0。由达林顿(Darlington)所讨论的接近等波纹的线性相位函数[11]，提供了很好的逼近初始值，可是需要 T_0 的先验知识。得到了 z_i，于是就可以计算 $s_i=\omega_p(z_i^2-1)^{-1/2}$、$\mathrm{Re}(s_i)<0$。

在许多实际情况下，T_0 是准确规定的，而且对 ΔT(或 ω_p)也有限制。所以必须对(2.72)和(2.75)联立求解 z_i 和 ΔT (或 ω_p)。

(用规定的 ΔT)为 s_i 求解(2.75)所得到的自然模，已经完全制成了表[12]。

例 2-5 为了等波纹延迟逼近，对于 $\Delta T=0.04$ 秒和 $n=2$，试求 s_1、s_2 和 T_0。假定 $\omega_p=1$ 弧度/秒。

解：由(2.72)和(2.75)，

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1+z_1}{-1+z_1}\cdot\frac{1+z_2}{-1+z_2}+\frac{1-z_1}{-1-z_1}\cdot\frac{1-z_2}{-1-z_2}\right]=50\,T_0$$

$$\frac{\pm(z_1^2-1)^{3/2}}{z_1^2}+0.04\frac{z_2+z_1}{z_2-z_1}=0$$

$$\frac{\pm(z_2^2-1)^{3/2}}{z_2^2}+0.04\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=0.$$

求解 z_1 和 z_2，并利用(2.41)变换为 s 平面，我们找到

$$s_{1,2}=-1.236807\pm j\,0.918276$$

和 $T_0=1.062$。

具有切比雪夫阻带的线性相位滤波器

本节中迄今所讨论的线性相位滤波器的一项共同缺点，就是它们并不能提供可观的衰减选择性，即使 $H(s)$ 具有很高阶

次也如此。这可从例如，将高斯衰减响应 $\alpha=3(\omega/\omega_{3dB})^2$(具有大 n 值的贝塞尔滤波器所趋近的响应）与高次切比雪夫或椭圆滤波器的衰减响应相比看出。如果要求尖锐选择的衰减特性，有限衰减极点 w_i 的引进就是有益的。这等于把分母 $\Pi_{i=1}^{m}(s^2+\omega_i^2)$ 合并于 $H(s)$。因为这个分母为偶函数，在通带(这里$|\omega|<\omega_i$)中，其值为正实数，因而它决不会影响相位或延迟。通过规定切比雪夫阻带，就得出选择 ω_i 的直截了当的方法[13,14]。考虑复频率变数

$$w=\sqrt{1+s^2/\omega_i^2}\,,\quad \mathrm{Re}(w)\geqslant 0 \tag{2.76}$$

的映射。这很类似于(2.41)中所引进的 z 变换，但它把 $j\omega$ 轴的 $\omega_s\leqslant\omega\leqslant\infty$ 部分(即阻带)映射在 w 平面的虚轴上。现定义

$$E(w^2)+wF(w^2)=\prod_{i=1}^{n}(w+w_i) \tag{2.77}$$

并选择

$$|H|^2=10^{\alpha_s/10}\cdot\frac{E^2-w^2F^2}{E^2} \tag{2.78}$$

我们结论出：$E+wF$ 为赫维茨多项式，因而，对于 $w=jv$，wF/E 为 v 的电抗函数。所以 $-(wF/E)^2$ 振荡在 $+0$ 和 $+\infty$ 之间，总是正值，而衰减

$$\alpha(w)=10\log_{10}|H|^2=\alpha_s+10\log_{10}\left[1-\left(w\frac{F}{E}\right)^2\right] \tag{2.79}$$

则振荡在 α_s 和 $+\infty$ 之间，无论 W_i 取什么值。

(2.77)和(2.78)的比较说明：w_i 就是已变换的自然模。因此，无论把哪种线性相位 $e(s)$ 多项式(贝塞尔[10]、达林顿[11]和乌尔布里希-皮洛蒂 (Ulbrich-Piloty) [12]) 的零点的变换作为w_i，所得出的 $H(s)$ 函数都在通带内给出线性相位并对$\omega\geqslant\omega_s$给出切比雪夫阻带性能。

必须注意到：(2.78)并不保证通常要求的条件，即对 $\omega=0$，$\alpha=0$。但这是能够作到的，只要选择 α_s 使满足

$$1=10^{\alpha_s/10}\left[1-\left(\frac{wF(w^2)}{E(w^2)}\right)^2_{w=1}\right], \qquad (2.80)$$

因为按照(2.76)，$w=1$ 相当于 $\omega=0$。此外，在无限大频率的衰减极点(即对 $\omega\to\infty$，$\alpha\to\infty$)，只需选择奇数 n 就可得到，因为 $\omega\to\infty$ 相当于 $w\to\infty$，而且因为对于奇数 n，多项式 $E^2-w^2F^2$ 比(具有 $2n-2$ 次的)E^2 具有较高阶次($2n$)。对于偶数 n，也可能达到 $\omega\to\infty$ 的 $\alpha\to\infty$ 条件，但需要迭代程序[13]。

对于给定的线性相位多项式 $e(s)$ 以及 ω_s，其步骤则是把 $e(s)$ 的根 s_i 经由(2.76)变换为

$$w_i=\sqrt{1+s_i^2/\omega_s^2}\,,\quad \mathrm{Re}(w_i)\geqslant 0. \qquad (2.81)$$

其次，把多项式

$$E+wF=\prod_{i=1}^{n}(w+w_i)$$

的偶部 $E(w^2)$ 找到*。它可获得的最小阻带衰减 α_s，可由(2.80)求出。利用(2.76)再变换 $E(w^2)$ 到 s 域，则所需的换能器函数为

$$H(s)=10^{\alpha_s/20}\left[\frac{E(w)|_{w=0}}{e(s)|_{s=j\omega_s}}\right]\cdot\frac{e(s)}{E(s)}. \qquad (2.82)$$

为了保证 $H(j\omega_s)=10^{\alpha_s/20}$ 这里方括弧内的因数是需要的。(这种特性，借助于(2.78)在 w 平面内自动出现，但必须在 s 平面内加以重建。)

例 2-6 试从 $T_0=1$ 的二阶汤姆森多项式 $e(s)$ 求 $H(s)$，这里

---

* 因为 $E+wF$ 是赫维茨多项式，所有 $E(w^2)$ 的根都落在 jv 轴，因此 $E(w^2)$ 具有形式 $C\prod_{i=1}^{n}(w^2+v_i^2)$。在 S 平面，这个式子变成 $C\prod_{i=1}^{n}(\omega_i^2-\omega^2)/\omega_i^2$。

$$e(s)=s^2+3s+3=\left(s+\frac{3+j\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{3-j\sqrt{3}}{2}\right).$$

取 $\omega_s=3$ 时 α_s 为多少？

解：如果我们规定 $\omega_s=3$，那么

$$w_1=\left[1+\left(\frac{3+j\sqrt{3}}{2}\right)^2\Big/9\right]^{1/2}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{52}}{12}}+j\sqrt{\frac{-7+\sqrt{52}}{12}}$$

$$w_2=w_1^*(w_1\text{ 的共轭})$$

$$E=w^2+|w_1|^2=w^2+\sqrt{13}/3$$

$$F=[(7+\sqrt{52})/3]^{1/2}.$$

因此，由(2.80)

$$10^{\alpha_s/10}=\left[1-\frac{F^2}{E^2}\right]^{-1}_{w=1}=22+6\sqrt{13}\cong 43.62$$

$$\alpha_s\cong 16.4\text{ dB}.$$

由(2.82)，所以

$$H(s)=\sqrt{43.62}\,\frac{\sqrt{13}/3}{|-\omega_s^2+3\,j\omega_s+3|_{\omega_s=3}}\cdot\frac{s^2+3s+3}{1+s^2/9+\sqrt{13}/3}$$

$$H(s)=\sqrt{43.62}\,\frac{s^2+3s+3}{s^2+19.81}.$$

衰减极点是在 $\pm j\sqrt{19.81}\cong j\ 4.45$。正如所要求那样，$H(0)=1$。

切比雪夫阻带显著地改进了线性相位滤波器的选择性。但是即使如此，它的选择性在许多应用中仍嫌不够。虽然也曾作过其他各种尝试，使线性相位与理想低通衰减响应结合［15，16］，但没有一个已完全成功。因此，在大部分实际情况下，先按衰减指标设计滤波器，然后通过级联全通网络来作相位补偿的“生硬”途径，看来似乎是最好的方法。

最后，还必须注意到通常要求的条件$H(0)=1$和$H(\infty)\to\infty$，对于从(2.78)所得到的$|H|^2$并不自动地满足。但是，如果采用有源实现，则不会造成困难。

2.3 带通滤波器函数

具有不对称衰减指标的带通滤波器

前章的电抗变换和频率变换，可以用来把巴特沃思、切比雪夫和反切比雪夫滤波器以及椭圆型滤波器，变换为带通滤波器。但是，即便是最一般的频率变换，这种方法可能达到的带通特性仍受严重限制。所幸的是用来得到具有最平或等波纹通带和任意阻带低通滤波器特性的方法，可很容易推广到带通滤波器。把最平通带情况(图 2-19)的特征函数平方给定为

$$|K|^2=C^2\cdot\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^{2n}}{\prod_{i=1}^{m}(\omega^2-\omega_i^2)^2}\cdot \tag{2.83}$$

显然可见，这个$|K|^2$具有在ω_0的最平衰减响应，而且具有在ω_i的衰减极点。如果通带衰减在ω_{p1}和ω_{p2}应为α_p，则

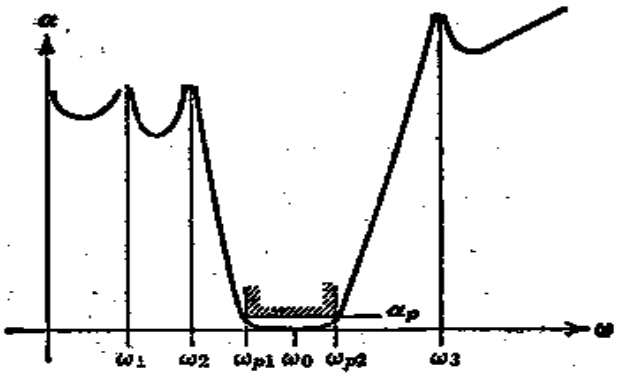


图 2-19 最平通带带通滤波器响应

有

$$C^2=(10^{\alpha_p/10}-1)\frac{\prod_{i=1}^{m}(\omega_p^2-\omega_i^2)^2}{(\omega_p^2-\omega_0^2)^{2n}} \tag{2.84}$$

式中 ω_p 可以是 ω_{p1} 或 ω_{p2}。

设计过程的剩余部分，与低通滤波器情况下所给的一样。

把用于切比雪夫通带任意阻带低通滤波器的 Z-映射推广到带通滤波器特性，也是相当直截了当的。通过变换*

$$z=\sqrt{\frac{s^2+\omega_{p2}^2}{s^2+\omega_{p1}^2}},\quad \mathrm{Re}(z)\geqslant 0 \tag{2.85}$$

把通带($s=j\omega$，$\omega_{p1}\leqslant|\omega|\leqslant\omega_{p2}$)映象在 z 平面的 jy 虚轴上；下阻带($s=j\omega$，$|\omega|<\omega_{p1}$)移到 Z 域正实轴的 $\omega_{p2}/\omega_{p1}\leqslant z<\infty$ 范围，上阻带($s=j\omega$，$|\omega|>\omega_{p2}$)则移到 Z 域正实轴的 $0<z\leqslant 1$ 范围(图 2.20)。

在低通情况所作的推导现在仍适用，不同点只是有理函数 $K(s)$的总阶次 n 必须是偶数。把 (2.49) 中所给 γ 的定义稍作修改，得

$$\gamma=\ln z=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\omega^2-\omega_{p2}^2}{\omega^2-\omega_{p1}^2}\right), \tag{2.86}$$

则样板法也变成可适用的。

属带通特性的一类滤波器函数，是参量滤波器的。这些电路在 S 平面的实轴(σ 轴)上具有反射零点(K 的零点)。为此，它们需要专门的逼近方法，拟在第三章中加以讨论。

---

* 灵活的读者会注意：在最平通带的 $\omega_0\to 0$ 或等波纹通带的$\omega_{p1}\to 0$ 的时候，带通函数和关系就简化为对低通情况有效的对应函数和关系。

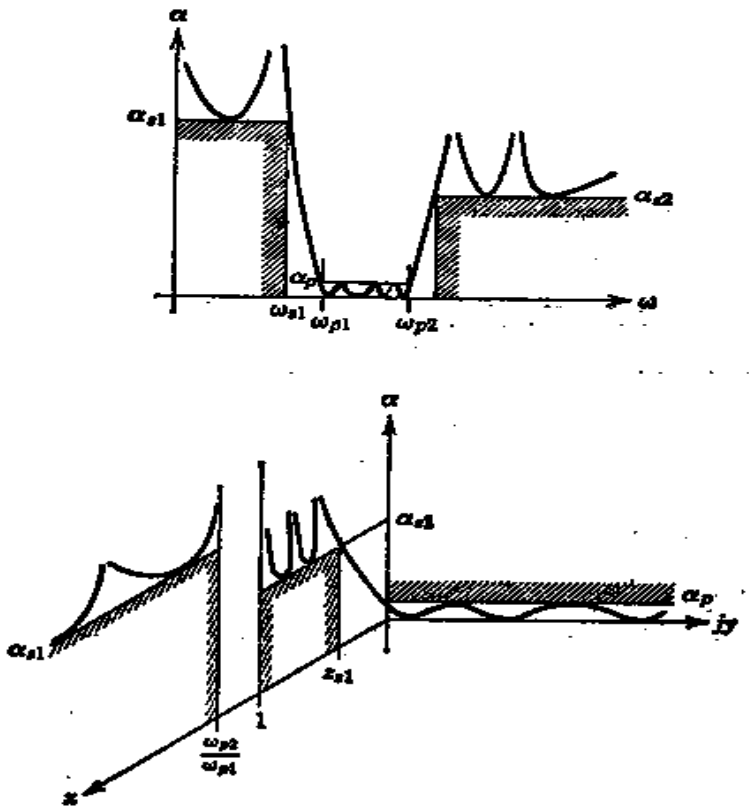


图 2-20　在 S 和 Z 平面中的等波纹通带带通滤波器响应

线性相位带通滤波器

如同早先所叙述的那样，在前节所讨论的电抗变换或频率变换当中，没有一个能把线性相位低通滤波器变换成线性相位带通电路。对于窄带通特性(即，在带宽 $\omega_{p2}-\omega_{p1}$ 比 $(\omega_{p1}+\omega_{p2})/2$ 小得多的时候)，按下面所讨论的方式，可以获得近似地线性通带相位响应。如果在 $-\hat{\omega}_p \leqslant \hat{\omega} \leqslant \hat{\omega}_p$ 范围内有线性相位低通响应，那么变量变换

$$\omega=\frac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{2\,\hat{\omega}_p}\,\hat{\omega}+\frac{\omega_{p2}+\omega_{p1}}{2} \tag{2.87}$$

将把低通特性沿着 $j\omega$ 轴线性地向上位移。新的响应将集中在 $(\omega_{p2}+\omega_{p1})/2$，而不在 0，低通频带界限 $-\hat{\omega}_p$、$\hat{\omega}_p$ 则将分别移动到 ω_{p1} 和 ω_{p2}。由于该位移的线性性质，线性低通相位响应在变换以后依旧是线性的。

唯一的困难就是：可实现的低通函数 $\hat{H}(\hat{s})$，应具有实系数，从而具有实的和共轭的复零点/极点，但是在相当于(2.87)的 S 变量变换

$$S=\frac{\omega_{p2}-\omega_{p1}}{2\,\hat{\omega}_p}\hat{S}+j\frac{\omega_{p2}+\omega_{p1}}{2} \tag{2.88}$$

进行以后，将不再保留这些根本的特性。

这种改变会引进复系数，并等于无共轭伴随的复零点和极点(图 2-21(a)和(b))。

为了重新建立可实现性，可人为地把所有零点和极点的共轭都附加到函数上(图 2.21(c))。全部新的式子因此变成

$$H(s)=\hat{H}\left[\frac{2\,\hat{\omega}_p}{\omega_{p2}-\omega_{p1}}\left(s-j\frac{\omega_{p2}+\omega_{p1}}{2}\right)\right]\cdot\hat{H}\left[\frac{2\,\hat{\omega}_p}{\omega_{p2}-\omega_{p1}}\left(s+j\frac{\omega_{p2}+\omega_{p1}}{2}\right)\right], \tag{2.89}$$

式中 $\hat{H}(\hat{s})$ 为原来的低通响应。

附加的下半平面的零点和极点，当然对通带响应有点影响，并且对相位的线性不利。不过由于它们离得是非常远的(大致相距 $\omega_{p1}+\omega_{p2}$ 的距离)，所以对于窄带滤波器(具有接近 $j\omega$ 轴的极点和零点*)它们的影响是小的。

---

* 在这方面，注意低通零点和极点的 $\hat{\sigma}$ 座标也要乘以 $(\omega_{p2}-\omega_{p1})/2\,\hat{\omega}_p$。

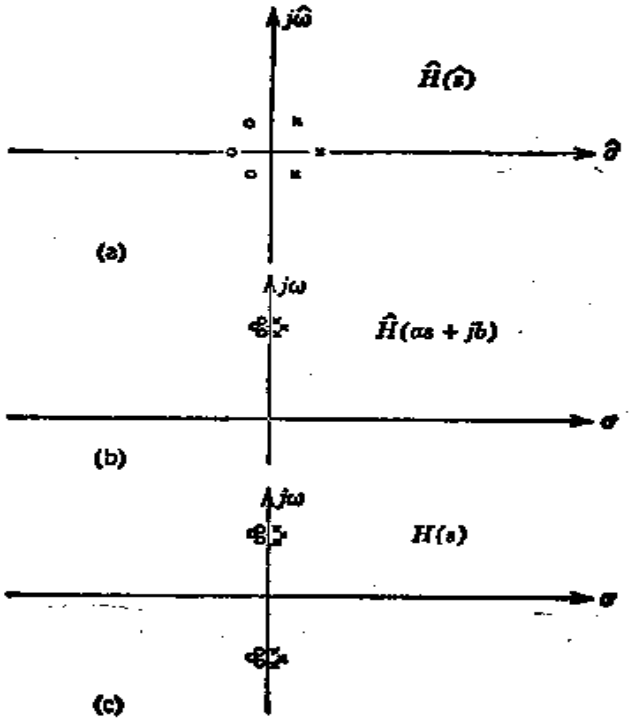


图 2-21　低通到带通滤波器的频带变换

对于并不满足这些条件的带通电路，精确的最平和等波纹延迟，则可由 2.2 节中所讨论的设计过程的适当改进来得到。

为了寻求在 $s=j\omega_0$ 处为最平带通延迟的多项式 $e(s)$，回忆

$$e(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0 \qquad (2.90)$$

的相角 β，对于 $s=j\omega$ 满足

$$\tan\beta=\frac{a_1\omega-a_3\omega^3+a_5\omega^5-+\cdots}{a_0-a_2\omega^2+a_4\omega^4-+\cdots}. \qquad (2.91)$$

从另一方面来说，所需要的线性相位 β_e 则可给定为

$$\beta_e=\beta_0+(\omega-\omega_0)T_0=\beta_0+xT_0$$

$$\tan\beta_s \doteq \frac{\sin(\beta_0+xT_0)}{\cos(\beta_0+xT_0)} = \frac{\tan\beta_0\cdot\cos xT_0+\sin xT_0}{\cos xT_0-\tan\beta_0\cdot\sin xT_0}, \tag{2.92}$$

式中 $x\equiv\omega-\omega_0$，而 β_0 和 T_0 分别是规定的在 ω_0 的相角和延迟。

对于在 $\omega=\omega_0$ 即 $x=0$ 附近的最平逼近，表示 $\tan\beta$ 和 $\tan\beta_s$ 的式子应该相符直到 x（不是 ω!）的最高可能幂次。为此，利用 $b\triangleq\tan\beta_0$ 和 $\omega_0=1$，得到

$$\frac{a_1(x+1)-a_3(x+1)^3+a_5(x+1)^5-+\cdots}{a_0-a_2(x+1)^2+a_4(x+1)^4-+\cdots}$$

$$\frac{b\cos xT_0+\sin xT_0}{\cos xT_0-b\sin xT_0}$$

$$[a_0-a_2(x+1)^2+a_4(x+1)^4-+\cdots]$$

$$\cdot\left[b\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(xT_0)^{2i}}{(2i)!}+\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(xT_0)^{2i+1}}{(2i+1)!}\right]=$$

$$[a_1(x+1)-a_3(x+1)^3+a_5(x+1)^5-+\cdots]$$

$$\cdot\left[\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(xT_0)^{2i}}{(2i)!}-b\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(xT_0)^{2i+1}}{(2i+1)!}\right]. \tag{2.93}$$

使 (2.93) 中 x^0、x^1、x^2、x^3、$\cdots$ 的系数相等，得到线性系统方程

$$\begin{aligned}
&ba_0-a_1-ba_2+a_3+ba_4-a_5-+\cdots=0\\
&T_0a_0-(1-bT_0)a_1-(2b+T_0)a_2+(3-bT_0)a_3\\
&+(4b+T_0)a_4-(5-bT_0)a_5-+\cdots=0\\
&-b\frac{T_0^2}{2}a_0-\left(-bT_0-\frac{T_0^2}{2}\right)a_1-\left(b+2T_0+b\frac{T_0^2}{2}\right)\\
&a_2+\left(3-3bT_0-\frac{T_0^2}{2}\right)a_3+-\cdots=0
\end{aligned} \tag{2.94}$$

就可以求解 $a_0、a_1、\cdots、a_{n-1}$。

将第一和第三、第二和第四等等方程结合起来，式子可稍微简化。所得系数已制成了表[26]。

根据在低通情况所用的相同分析，可以得到等波纹带通延迟。方程(2.68)—(2.73)仍然有效，但为了在 ω_{p1} 和 ω_{p2}（而不是 0 和 ω_p）之间得到等波纹延迟，Z 变量必须用 (2.85) 而不是(2.41)来定义。（对于有理的 $T_g(s)$，n 又必须为偶数。）因此，把(2.69)的群延迟函数 $T_g(s)$变换到 Z 平面，得到的是

$$T_g(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\pm\sqrt{\dfrac{\omega_{p2}^2-z_i^2\omega_{p1}^2}{z_i^2-1}}}{\dfrac{\omega_{p2}^2-z^2\omega_{p1}^2}{z^2-1}-\dfrac{\omega_{p2}^2-z_i^2\omega_{p1}^2}{z_i^2-1}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\pm\sqrt{(\omega_{p2}^2-z_i^2\omega_{p1}^2)(z_i^2-1)}\cdot(z^2-1)}{(\omega_{p2}^2-\omega_{p1}^2)(z_i^2-z^2)}$$

$$\lim_{z\to z_k}T_g(z)=\frac{\pm(\omega_{p2}^2-z_k^2\omega_{p1}^2)^{1/2}\cdot(z_k^2-1)^{3/2}}{(\omega_{p2}^2-\omega_{p1}^2)2\,z_k(z_k-z)}\qquad(2.95)$$

而不是(2.74)*。这里，±号的选择，应使所有 $s_i=\pm[(\omega_{p2}^2-z_i^2\omega_{p1}^2)/(z_i^2-1)]^{1/2}$都有负实部。

使(2.73)和(2.95)中在 $z=z_k$ 处的留数相等，给出

$$-\frac{\Delta T}{2}z_k\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\frac{z_i+z_k}{z_i-z_k}=\pm\frac{(\omega_{p2}^2-z_k^2\omega_{p1}^2)^{1/2}(z_k^2-1)^{3/2}}{2\,z_k(\omega_{p2}^2-\omega_{p1}^2)}$$

$$\pm\frac{(z_k^2-1)^{3/2}}{z_k^2}+\Delta T\frac{\omega_{p2}^2-\omega_{p1}^2}{(\omega_{p2}^2-z_k^2\omega_{p1}^2)^{1/2}}\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}$$

---

* 注意：对于 $\omega_{p1}\to 0$，$\omega_{p2}\to\omega_p$，则(2.95)和(2.74)一致，如同 (2.96) 和 (2.75)一致那样。

$$\frac{z_i+z_k}{z_i-z_k}=0, k=1、2、\cdots、n. \qquad (2.96)$$

方程(2.96)仍是含有 n 个未知数的 n 个非线性联立方程。它们必须由好的初值来迭代求解。好的初值可以通过应用(2.87)—(2.89)中所描述的搬移过程，从低通等波纹延迟来得到，它具有大致相同的 ΔT 和阶次 $\hat{n}=n/2$。

已经得到恒延迟多项式 $e(s)$之后，如果把它除以（仅仅含有 $j\omega$ 轴零点，或更一般地仅仅含有 s 平面象限对称零点的）第二个多项式 $p(s)$，则它的最平或等波纹延迟仍然不会改变。因此，这样一个纯偶或纯奇的 $p(s)$ 可以用来为带通衰减响应提供附加的选择性。

要得到切比雪夫阻带、线性相位通带带通滤波器响应，必须把(2.76)所示的变换（针对带通滤波器情况）加以推广。考查映射[14]

$$w=\sqrt{\frac{s^2+\omega_{s2}^2}{-s^2-\omega_{s1}^2}}\quad \mathrm{Re}(w)\geqslant 0. \qquad (2.97)$$

它把通带($\omega_{s1}<\omega<\omega_{s2}$)变换到 w 的正实轴；把下阻带($|\omega|\leqslant\omega_{s1}$)和上阻带($|\omega|\geqslant\omega_{s2}$)两者都分别变换到 jv 虚轴上的 $\omega_{s2}/\omega_{s1}\leqslant|v|\leqslant\infty$和 $0\leqslant|v|\leqslant 1$。在 1 和 ω_{s2}/ω_{s1} 之间的间隙，则被 s 域实轴（σ 轴）的影象所占有。

现在如果把线性相位 $e(s)$ 的根利用 (2.97) 变换成 w_1、w_2、$\cdots$、w_n 诸值，那么就可以如前在(2.77)中所述那样组成 $E+wF$，而且(2.78)的 $|H|^2$ 所确定的响应在 s 平面具有 $e(s)$ 的相位线性、并同时具有切比雪夫阻带衰减性能。由于 $H(s)$ 是有理的，阶次 n 必须为偶数。

要在通带和阻带之间达到要求的衰减鉴别，在通带内某些

点的衰减 $\alpha(\omega)$必须为零。此外为了要实现为无源梯形网络的形式，还必须在 $\omega=0(|v|=\omega_{s2}/\omega_{s1})$和 $\omega\to\infty(|v|=1)$有衰减极点，但在 s 的实轴$(1<|v|<\omega_{s2}/\omega_{s1})$ 上应该没有衰减 极 点。对于从(2.97)、(2.77)和(2.78) 所 得到的$|H|^2$，这些条件并不是自动满足的。如果它们必须在给定的课题中满足，那么迭代法可以用来适当地修正$|H|^2$。

2.4 摘　　要

本章的目的，是打算给滤波器逼近法作一个简短的叙述。这些方法，使有源或无源的集总、线性、非时变滤波器的设计者，能够得到可以实现的复变量 s 的有理函数，后者在衰减响应或者相位或延迟响应方面能满足要求。此外还叙述了允许同时控制相位和衰减的特殊技术。最初为低通衰减响应而得来的很多结果，利用低通滤波器元件或网络函数的适当变换，就能够推广到高通、带通或带阻滤波器。

最后，为了直接求解重要的带通网络滤波器类的逼近问题而给定了方法。可以把这些方法，用于不能由低通滤波器通过频率变换或者电抗变换而得来的电路上去。

以下几章将说明：利用本章引进的逼近方法所得到的函数，怎样构成滤波器实现的基础。还将介绍这些方法推广到：参量滤波器（第 3 章内），一般条件（第 6 章），分布网络（第 7 和第 9 章），以及开关滤波器和数字滤波器（第 10—12 章）去的问题。不过，这类推广，在相当程度上都以刚提出的很经典的理论为基础。

习　题

2.1 试证明：如果

$$F(s)=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}$$

式中 $s=j\omega$ 而且所有 a_i、b_i、ω 都是实数，那么

$$F(s)\cdot F(-s)=|F(s)|^2.$$

2.2 试证明：有限的集总线性电路不能够实现图 2.3 中所示的衰减响应。

（提示：假定 $H(s)$是具有有限阶次 n 的分子的有理形式。挑 $n+1$ 点具有$|\omega|<\omega_c$，并试图找到分子系数以便满足所需响应。）

2.3 试计算巴特沃思滤波器的 $K(s)$和 $H(s)$，满足

$$\alpha\leqslant 0.2\text{ dB}\qquad \text{对}f\leqslant 4\text{ kHz}$$

$$\alpha\geqslant 40\text{ dB}\qquad \text{对}f\geqslant 10\text{ kHz}.$$

如果在 10 kHz 正巧达到 40 dB 衰减，则在 4 kHz 的实际衰减是多少？为什么？

2.4 如果 α 用分贝表示，并在按十倍频程的对数标度上测量 ω，则巴特沃思滤波器的 $\alpha(\omega)$的渐近线上升率是多少？

2.5 试证明：

$$|K|^2=k_p^2\cos^2(n\cos^{-1}\omega/\omega_p)$$

为 ω（对于 $\omega\geqslant\omega_p$）的单调上升函数。

（提示：研究$\frac{d|K|^2}{d(\omega^2)}$的阶次。对于 $\omega^2<\omega_p^2$，它有多少零点？）

2.6 对于切比雪夫滤波器的自然模，试证明(2.32)。

（提示：从费尔特凯勒方程着手，并对 $\cos(x+jy)$利用(2.31)的关系。）

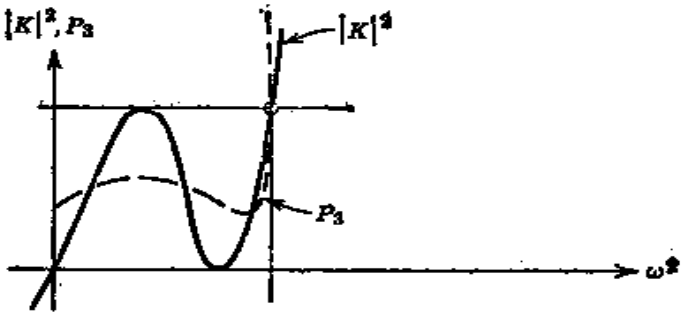
2.7 试证明：

$$|K|^2=\cos^2(3\cos^{-1}\omega)$$

在 $\omega^2=1$ 处它比通过（1，1）点并在 $0\leqslant\omega^2\leqslant 1$ 满足 $0\leqslant P_3(\omega^2)\leqslant 1$

的任何其他三次多项式 $P_3(\omega^2)$，都有较大的斜率。

（提示：假定相反的情况。那么下面所示的曲线就有效。会出现多少交点呢？）



2.8 试证明：$|K|^2=\cos^2(n\cos^{-1}\omega)$在任意 $\omega^2>\omega_p^2$ 处，它比在 $0\leqslant\omega^2\leqslant\omega_p^2$ 满足 $0\leqslant P_n(\omega^2)\leqslant 1$ 的任何其他 n 次多项式 $P_n(\omega^2)$，都具有较大值。

（提示：推广对习题 2.7 所取得的反证。）

2.9 试证明：如果在切比雪夫滤波器中不仅 $\omega_p\to 0$ 而且 $k_p\to 0$，并有 $\omega_p/k_p^{1/n}\to$常数，则切比雪夫滤波器就变成巴特沃思滤波器。

（提示：检查自然模的位置。）

2.10 试证明：切比雪夫滤波器的反射零点是在

$$\omega_p\cos[(2k-1)/n]\times(\pi/2),\quad k=1、2、\cdots、n.$$

2.11 试证明：对于同样阶次 n、通带衰减 α_p 和界限 ω_p，切比雪夫滤波器衰减响应的渐近线（$\omega\gg\omega_p$ 处），比巴特沃思滤波器的大 $(n-1)6.02$ dB。

2.12 试求切比雪夫滤波器的 $K(s)$和 $H(s)$，设

$\alpha_p=0.3$ dB、$\alpha_s=52$ dB、$\omega_p=125$ kHz、$\omega_s=200$ kHz。

2.13 对于固定的 n、ω_p 和 ω_s，需要把 α_p 增加多少以使 α_s 增益 10 dB？增加是不是取决于滤波器为巴特沃思、切比雪夫或者椭圆滤波器呢？为什么呢或为什么不？

2.14 试求反切比雪夫滤波器的 $K(s)$，其 $\alpha_s=40$ dB、$\alpha_p=3$ dB、$\omega_p=26$ MHz、$\omega_s=40$ MHz。

2.15 试求巴特沃思滤波器的自然模，其 $n=5$、$\alpha_p=1$ dB、$\omega_p=1$ kHz。利用(2.41)把它们变换到 z 平面。对具有相同指标的切比雪夫滤波器重复上述要求。

2.16 试在 z 和 s 平面内，构成具有切比雪夫通带性能的 $|K|^2$，其 $n=5$、$\alpha_p=0.2$ dB、$\omega_p=1$、$\omega=1.1$、$\omega_a=2$。

2.17 对于巴特沃思和切比雪夫滤波器在 $\alpha_p=0.2$ dB、$\alpha_a=60$ dB、$\omega_p=1.5$ MHz、$\omega_a=1.7$ MHz 的情况下，试比较其所需要的阶次。

2.18 试证明：对于已知 α_p、α_a、ω_p 和 ω_a，准确满足要求的椭圆滤波器总是比相应的巴特沃思滤波器具有较低阶次。
(提示：标绘两种滤波器的 $|K|^2$，例如，以 $n=3$。计算曲线的交点，并作出适当结论。)

2.19 用已知 n、ω_a 和 α_a，试为反切比雪夫滤波器的自然模，推导出显式。

2.20 试通过匹配 s^0、s^1、s^2、$\cdots$、s^n 的系数来导出 (2.55) 中诸 a_i 之间的关系式。说明 (2.57) 中所给定的 a_i 是满足这些关系式的(把这些 a_i 代入开头几个关系式来验证)。

2.21 试计算和标绘一阶、二阶和三阶汤姆森-龙梅尔多项式的相位延迟和群延迟。

2.22 试证明：龙梅尔多项式满足递推关系

$$L_n(s)=(2n-1)\cdot L_{n-1}(s)+s^2L_{n-2}(s).$$

(提示：利用(2.57)。)

2.23 试证明：等波纹群延迟函数的参数满足

$$-\sum_{i=1}^{n}s_i^{-1}=T_0-(-1)^n\cdot\Delta T/2.$$

2.24 (a) 选择方便的归一化单位，试重写(2.21)—(2.34) 和 (2.53)—(2.67)。
(b) 利用 $\omega_a=C^{-1/n}$ 作为频率单位，试重写(2.7)—(2.20)。

2.25 (a) 从低通原型经由

$$\omega_{LP}=A\frac{(\omega^2-\omega_2^2)(\omega^2-\omega_4^2)}{\omega(\omega^2-\omega_3^2)}$$

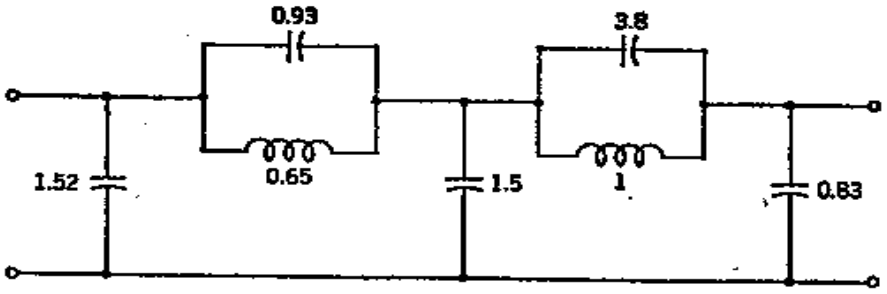
所导出的滤波器的衰减响应是什么？

(b) 将怎样变换原型滤波器的电抗？

2.26 (a) 几何对称带通滤波器的通带宽度为1350 Hz。阻带界限为 $f_{s1}=575\ Hz$ 和 $f_{s2}=2000$ Hz。

试求通带界限。

(b) 假定 $R_1=R_2=10^4\ \Omega$，试从下面所示的归一化低通原型来设计带通滤波器。原型设计是对 $R_1=R_2=1$，$\omega_p\cdot\omega_s=1$ 而作出的。



2.27 利用窄带关系 (2.89)，把五阶汤姆森低通延迟函数变换成在 999 Hz 和 1001 Hz 之间具有平坦延迟的一种函数。设低通函数的 $T=1$ 和 $\hat{\omega}=1$。

参 考 文 献

[1] E. A. Guillemin, *Synthesis of Passive Networks*, John Wiley, New York, 1957, Chapter 14.

[2] A. Papoulis, "On the approximation problem in filter design," *IRE Conv. Rec.*, 5, Pt. 2, 175—185 (1957).

[3] B. R. Smith and G. C. Temes, "An iterative approximation procedure for automatic filter synthesis," *IEEE Trans. Circuit Theory*, 12, No. 1, 107—112 (*March*, 1965).

[4] F. I. Kuo and W. Magnuson, Eds., *Computer-Oriented Circuit Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969, Chapter 6.

[5] G. Szentirmai, "Nomographs for designing elliptic-function filters,"

PIRE, **48**, No. 1, 113—114 (January, 1960).
[6] A. J. Grossman, "Synthesis of Tchebycheff parameter symmetrical filters," *PIRE*, **45**, No. 4, 454—473 (April, 1957).
[7] H. J. Orchard, "Computation of elliptic functions of rational fractions of a quarterperiod," *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-5**, No. 4, 352—355 (Dec. 1958).
[8] H. J. Orchard and G. C. Temes, "Filer design using transformed variables," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-15**, No. 4, 385—408 (Dec., 1968).
[9] A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.
[10] W. E. Thomson, "Delay networks having maximally flat frequency characteristics," *Proc. IEE (London)*, **96**, 487—490 (Nov., 1949).
[11] S. Darlington, "Network synthesis using Tchebyshev polynomial series," *Bell Syst. Techn. J.*, **31**, 613—665 (July, 1952).
[12] E. Ulbrich and H. Piloty, "Uber den Entwurfvon Allpässen, Tiefpässen und Bandpässen mit einer in Tschebyscheffschen Sinne approximiert konstanten Gruppenlaufzeit," *Arch. Elek. Uebertr.*, **14**, No.10, 451—457 (Oct., 1960).
[13] R. Unbehauen, "Low-pass filters with predetermined phase or delay and Chebyshev stopband attenuation," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-15**, No.4, 337—341 (Dec., 1968).
[14] G. C. Temes and M. Gyi, "Design of filters with arbitrary passband and Chebyshev stopband attenuation," *IEEE Internat. Conv. Rec.*, **15**, Pt. 5, 2—12 (1967).
[15] B. J. Bennett, "Synthesis of electric filters with arbitrary phase characteristics," *IRE Internat. Conv. Rec., Pt.* 5, 19—26 (1953).
[16] Y. Peless and T. Murakami, "Analysis and synthesis of transitional Butterworth-Thomson filters and bandpass amplifiers," *RCA Rev.*, **18**, 60—94 (March, 1957).
[17] H. Ruston, "Synthesis of RLC Networks by Discrete Tschebyscheff Approximationsin the Time Domain," *Tech. Rept.* No 107, *Electr. Def. Group, Dept. of Electr. Engn.*, U. of Michigan (April, 1960).
[18] E. A. Guillemin, op. cit., Chapter 15.
[19] See, e. g., D. C. Handscomb, Ed., *Methods of Numerical Approximation*, Pergamon Press, Oxford, 1966, Sec. III. 15.
[20] R. Fischl, "Optimal Chebyshev approximation at discrete points in the time domain," *Proc. Seventh Midwest Symp. Circuit Theory*, 33—43 (May, 1964).
[21] J. Jess and H. W. Schüssler, "A class of pulse-forming networks,"

IEEE Trans. Circuit Theory, **CT-12**, No.2, 296—299 (June, 1965); also, "On the design of pulse-forming networks," ibid., No.3, 393—400 (Sept., 1965).

[22] D. A. Spaulding, "Synthesis of pulse-shaping networks in the time-domain," *Bell Syst. Techn. J.*, **48**, 2425—2444 (Sept., 1969).

[23] W. E. Thomson, "The synthesis of a network to have a sine-squared impulse response," *Proc. IEE (London)*, **99**, Pt. 111, 373—376 (Nov., 1952); *Discussion*, **100**, 110 (1953).

[24] H. E. Kallmann, "Transversal filters," *PIRE*, **28**, No.7, 302—310 (July, 1940).

[25] E. Christian and E. Eisenmann, *Filter Design Tables and Graphs*, John Wiley, New York, 1966.

[26] H. J. Orchard and G. C. Temes, "Maximally flat approximation techniques," *proc IEEE*, **56**, No. 1, 65—66 (Jan., 1968).

[27] N. Balabanian, *Network Synthesis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1958, Chapter 9.

3 具有集总元件的无源滤波器

H. J. 奥查德(H. J. Orchard)和 G. C. 特默斯(G. C. Temes)
加利福尼亚大学
洛杉矶，加利福尼亚

本章我们将讨论：用于设计具有集总元件的无源滤波器的插入衰减理论的原理。然而大部分这种基础资料也可直接应用于设计由其他元件(如机械谐振器、微波谐振器和有源器件)所构成的滤波器；并且在阅读有关这类更专业化网络的后几章之前，特建议读者熟习这里所叙述的概念。

3.1 一般电抗二端对网络

假定滤波器是集总电感和电容器的二端对网络，在端对 1 由内阻抗为 R_1 和电动势为 E 的发生器驱动，在端对 2 则由电阻 R_2 加载，如图 3-1 (a) 所示。该电阻性发生器的最大可用功率为 $E^2/4R_1$；并且可以送到 R_2 上，如果电抗网络被理想变量器代换，使 R_1 正确匹配到 R_2，如图 3-1 (b) 所示那样，这时跨在 R_2 的电压将为 V_2 的最大可能值 $V_2'=(E^2R_2/4R_1)^{1/2}$。

取这个作为参考，那么我们可以把换能器函数 $H(s)$ 定义

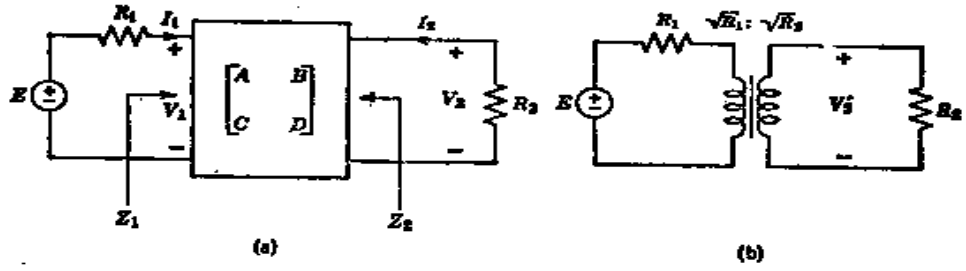


图 3-1 (a) 具有电源和负载的电抗二端对网络
(b) 定义参考电压 V_2' 的电路

为

$$H(s)=\frac{V_2'}{V_2}=\frac{E}{2V_2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}. \tag{3.1}$$

由定义得出：$|H(j\omega)|^2$ 为从发生器的最大可用功率和 R_2 中的实际功率之比，因而所有实 ω 的 $|H(j\omega)|\geqslant 1$。

单位用奈培表示的衰减 α，和单位用弧度表示的相位 β 与 H 的关系为

$$\alpha+j\beta=\ln H(j\omega).$$

在实际应用中，通常把 α 和 β 分别用分贝和度来表示。由相位（单位用弧度），我们导出包迹延迟 $T\triangleq d\beta/d\omega$（单位用秒）。

从换能器函数（它描述运用在电阻性终端之间的电抗网络的外特性），我们必须能够导出一组参数，它本身能描述未终接的电抗二端对网络。这可以方便地通过链矩阵而实现，链矩阵表示网络的输入电压和电流与其输出电压和电流之间的关系为

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_2\\-I_2\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

式中 V_1、I_1、V_2 和 I_2 如图 3.1 (a)所示。

此矩阵的四个元素，都是具有实系数的复频率变量 s 的有理函数，它们并共有一个公分母多项式，其根就是无限大衰减的频率。对于电抗网络，A 和 D 为 s 的偶函数，而 B 和 C 则为 s 的奇函数。而且对于互易网络，矩阵的行列式为一，即 $AD-BC=1$。如果需要的话，网络的阻抗和导纳矩阵可以从链矩阵元经过方程：

$$\boldsymbol{Z}=\frac{1}{C}\begin{bmatrix} A & 1 \\ 1 & D \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y}=\frac{1}{B}\begin{bmatrix} D & -1 \\ -1 & A \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

得出，而不需进一步计算。这说明：所有四个函数 A/C、D/C、B/D 和 B/A、都是电抗网络的策动点阻抗。

在(3.2)中引入对图 3.1 (a)中电路显然适用的下列关系式

$$E=V_1+I_1R_1$$
$$O=V_2+I_2R_2,$$

人们可以迅速地证明

$$H(s)=\frac{(AR_2+DR_1)+(B+CR_1R_2)}{2\sqrt{R_1R_2}} \tag{3.4}$$

$H(s)$的偶部和奇部显然为

$$H_e(s)=\frac{AR_2+DR_1}{2\sqrt{R_1R_2}}$$

$$H_0(s)=\frac{B+CR_1R_2}{2\sqrt{R_1R_2}} \tag{3.5}$$

但在试图从已知 $H(s)$寻求 A、B、C 和 D 的时候，如果没有一些进一步条件，就不可能使 A 和 D 分开或使 B 和 C 分开。

为了求解矩阵元素，得到可用的类似于 $H(s)$ 的辅助函数是有帮助的，但其中 C 和 D 的符号是相反的，即：

$$K(s)\triangleq\frac{(AR_2-DR_1)+(B-CR_1R_2)}{2\sqrt{R_1R_2}}。\qquad(3.6)$$

那么 $K(s)$的偶部和奇部便会是：

$$K_e(s)=\frac{AR_2-DR_1}{2\sqrt{R_1R_2}}$$

$$K_0(s)=\frac{B-CR_1R_2}{2\sqrt{R_1R_2}}\qquad(3.7)$$

而且给定这些函数，就能立即对链矩阵求解(3.5)和(3.7)而得到：

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\begin{bmatrix}(H_e+K_e)R_1 & (H_0+K_0)R_1R_2\\ (H_0-K_0) & (H_e-K_e)R_2\end{bmatrix}\qquad(3.8)$$

因而从已知换能器函数寻求链矩阵的问题，就会简化为从 $H(s)$构成 $K(s)$的问题。

这两个函数之间的关系，经过对 $H(s)\cdot H(-s)$和 $K(s)\cdot K(-s)$式子的考查就可以找到。因为把 s 反号，就是把函数的奇部反号，但并不影响其偶部，由此得出：

$$H(s)\cdot H(-s)=\frac{(AR_2+DR_1)^2-(B+CR_1R_2)^2}{4R_1R_2}$$

和

$$K(s)\cdot K(-s)=\frac{(AR_2-DR_1)^2-(B-CR_1R_2)^2}{4R_1R_2}$$

展开这些式子中的平方项，然后相减，给出：

$$H(s)\cdot H(-s)-K(s)\cdot K(-s)=AD-BC=1$$

因而导致设计过程中的基本方程*

* 这里，读者会注意到(3.6)所定义的 $K(s)$，和用(1.22)从不同观点已定义过的特征函数一样。

$$H(s)\cdot H(-s)=1+K(s)\cdot K(-s). \qquad (3.9)$$

现在将说明，这个方程允许我们从规定的 $H(s)$ 求 $K(s)$，或者作为更通常的情况，从规定的 $K(s)$ 求 $H(s)$。

$H(s)$ 和 $K(s)$ 两者都是具有实系数的 s 的有理函数，具有同样阶次。它们两者都有和链矩阵元一样的极点；这些极点就是网络传输的无限大衰减的频率。因为链矩阵元不是 s 的偶函数就是奇函数，从而这些极点必须或为偶多项式的根或是奇多项式的根。因此在 H 和 K 中的各复极点必须既伴有共轭的根，又伴有其负值的根，这四个根一起构成对称安排在原点周围的四点组。

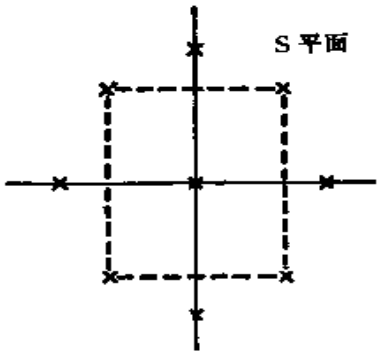


图 3-2 换能器函数 $H(s)$ 在 S 平面有限部分的极点的可能位置

当极点在 j 轴上的时候，属例外情况，这时共轭根和负根重合，当极点为实数的时候也属例外，这时按正、负成对出现。极点也可以出现在原点和在无限大频率，虽然后者存在是由于 H 和 K 的分子阶次超过分母阶次所致。图 3-2 表示所有这些不同的可能性。这些极点中的无论哪个，都可以具有任何重阶。

H 的零点，就是终接以电阻的电抗网络的自然频率。由于网络是无源的因而为稳定系统，这些零点必须在 s 平面的左半以内。除此以外，对零点别无其他限制，因而 H 的分子多项式是很普遍的、严格的实赫维茨(Hurwitg)多项式。我们用 $e(s)$ 来表示它。关于 K 的零点则没有这类限制，而对应的多项式叫做 $f(s)$，对 $e(s)$ 起着伙伴作用。

用

$$H(s)=\frac{e(s)}{p(s)} \text{ 和 } K(s)=\frac{f(s)}{p(s)} \tag{3.10}$$

代入(3.9)，我们得到*

$$e(s)\cdot e(-s)=p(s)\cdot p(-s)+f(s)\cdot f(-s). \tag{3.11}$$

如果给定 $K(s)$，而且希望找到 $H(s)$，我们着手如下。因为 $f(s)$和 $p(s)$假定为已知，我们就可把(3.11) 的右边形成为 s^2的单一多项式，然后求它的根。通常这将不得不在数字上作工作，虽然在特殊情况下**，有可能导出求根的显式。右边的根也自然是左边的根，因而可在 $e(s)$和 $e(-s)$之间分配。这种分配方法完全是唯一的，因为必须把所有左半平面的根都配置给 $e(s)$，把它们的所有负数都配置给 $e(-s)$。重行组合包含 $e(s)$的根的因式，就得到整个多项式。

相反地，如果给定 $H(s)$，而且希望找到 $K(s)$，我们就可把(3.11)重写为

$$f(s)\cdot f(-s)=e(s)\cdot e(-s)-p(s)\cdot p(-s) \tag{3.12}$$

为了得到左边的根，应和以前一样地对右边进行组合并作因式分解。知道了这些根，我们就必须决定哪些应配置给 $f(s)$和哪些应配置给 $f(-s)$。但只要把复根的共轭对一起保持在同一多项式中，而且只要把 $f(s)$ 中每个根的负值都置于 $f(-s)$中，其余我们就可以自由地把根随意配置。

对 $f(s)$中左半和右半平面根的各种不同安排，会对应不同的链矩阵，因而对应不同的网络。所有这些不同的网络都会有同样的换能器函数 $H(s)$，但它们要呈现不同的入端阻抗。

---

* 注意：因为$|H(j\omega)|\geqslant 1$，$e(s)$的阶次至少和 $p(s)$的阶次一样高，因而[由(3.11)]，也至少和$f(s)$的一样高。

** 如同第 2 章所讨论的巴特沃思和切比雪夫多项式逼近那样。这些可认为是椭圆函数滤波器的极限情况，对此也存在显式。

图 3-1 (a)中用 $Z_1(s)$和 $Z_2(s)$所表示的这些阻抗，通过对应的反射系数

$$\rho_1(s)=\frac{Z_1(s)-R_1}{Z_1(s)+R_1} \text{ 和 } \rho_2(s)=\frac{Z_2(s)-R_2}{Z_2(s)+R_2} \quad (3.13)$$

就可方便地确定出来了。

我们能容易地导出用链矩阵元素和终端电阻表示的，$\rho_1(s)$和 $\rho_2(s)$的式子为

$$\rho_1(s)=\frac{(AR_2-DR_1)+(B-CR_1R_2)}{(AR_2+DR_1)+(B+CR_1R_2)}$$

$$\rho_2(s)=\frac{(-AR_2+DR_1)+(B-CR_1R_2)}{(AR_2+DR_1)+(B+CR_1R_2)} \quad (3.14)$$

由此可得

$$\rho_1(s)=\frac{K(s)}{H(s)}=\frac{f(s)}{e(s)}$$

$$\rho_2(s)=-\frac{K(-s)}{H(s)}=\mp\frac{f(-s)}{e(s)} \begin{matrix} -\text{对应于偶的 } p(s) \\ +\text{对应于奇的 } p(s) \end{matrix} \quad (3.15)$$

这些公式说明$\rho_1(s)$和$K(s)$有完全相同的零点。在对特征函数的构成中设法决定 $f(s)$的根分配时，考虑这种选择不对反射系数产生影响常常是有帮助的。由于(3.15)的结果，我们注意到，$\rho_2(s)$的零点就是 $\rho_1(s)$的零点的负数，因为用 $H(s)\cdot H(-s)$除整个(3.9)，得到

$$1=\frac{1}{H(s)\cdot H(-s)}+\frac{K(s)\cdot K(-s)}{H(s)\cdot H(-s)}$$

对于实频率则变成

$$1=|H(j\omega)|^{-2}+|\rho_1(j\omega)|^2 \quad (3.16)$$

方程(3.16)就是电抗二端对网络的、有名的费尔特凯勒

(Feldtkeller)能量方程；可把左边看做是归一化为一的、从发生器输出的最大可用功率，而右边则表示怎样把这个功率分成：经过网络传到端对 2 的电阻性终端那部分和反射回到发生器那部分。从而对于给定的 $H(s)$，我们看出$|\rho_1(j\omega)|$是固定的。

对应于 $f(s)$的根的各种可能分配的不同网络，不仅会有不同的端对阻抗 Z_1、Z_2，而且会有不同的内部电路结构。这些网络中的一半，只是另一半的对偶，但在任何具有相同电路图的诸网络中，我们可以看到每个网络都具有不同的元件值。为了元件值的最佳（即，最均匀）分配，并没有简单的规则引导人们在 $f(s)$中选择根的分配，而且在任何特殊情况下，唯一实用解法，看来应该设计所有的可能网络，并通过观察选择最好的。在 $H(s)$具有高阶次的时候，会有许多的网络，而选择也许不得不用计算机来进行。

在选择根的分配中，另外的考虑也许是希望控制转移函数对终接电阻器 R_1 和 R_2 容限的灵敏度。简单的计算说明：如果人们希望$|H|$对终接电阻之一具有最小灵敏度，那么在有关端对的反射系数就应该只具有在 S 左平面的零点。这会使得这个反射系数为最小相位函数，从而其零点和极在同一个半平面内，即有尽可能接近的零点和极点。而另一个反射系数按(3.15)将是最大相移函数，而且这会导致$|H|$对那个端对终接电阻具有最大灵敏度。

在两个半平面之间交换两个反射系数的零点，当然会导致一折衷情况，而使$|H|$对两个终接电阻的变化具有中等的灵敏。

例 3-1 已知 $K(s)=s^3$，试求 $H(s)$ 和链矩阵。（假定 $R_1=R_2=1$。）

解：由(3.11)：

$$e(s)\cdot e(-s)=1.1+s^5\cdot(-s^3)=1-s^6=(1-s^2)(1+s^2+s^4)$$
$$=(1+s)(1-s)\cdot(1+s+s^2)(1-s+s^2)$$

因此，赫维茨因式为

$$H(s)=e(s)=(1+s)(1+s+s^2)=1+2s+2s^2+s^3$$

所以链矩阵由(3.8)给定如下：

$$H_e(s)=1+2s^2$$
$$H_0(s)=2s+s^3$$
$$K_e(s)=0$$
$$K_0(s)=s^3$$

从而

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2s^2 & 2s+2s^3\\ 2s & 1+2s^2\end{bmatrix}.$$

3.2 滤波器电路

对于大多数用途来说，较好的滤波器电路就是：双端负载的电抗二端对。其优点包括：

1．具有得到任何实际上可实现的衰减响应的能力；

2．具有实现梯形网络的可能性；

3．对于大多数滤波器指标其元件数量近于最少；

4．在通带内传输最大功率（平衰减为零），导致对元件变化的通带灵敏度低。

为了说明最后这一点，考虑图 3-3(a) 的电路。设标称衰减响应如图 3-3(b)所示，并考查在$\omega=\omega_1$处的衰减响应随某元件 C_7 的变化。图 3-3(c)表明：$\alpha(\omega_1)$ 随 C_7 从其标称值 C_7^0 的变化而变化；显然，灵敏度 $\partial\alpha/\partial C_7$在 ω_1 为零，因为 $\alpha(\omega_1)=0$ 而且 $\alpha\geqslant 0$。如图 3-3(d)所示，对 $\omega=\omega_2$作类似的论证表明：

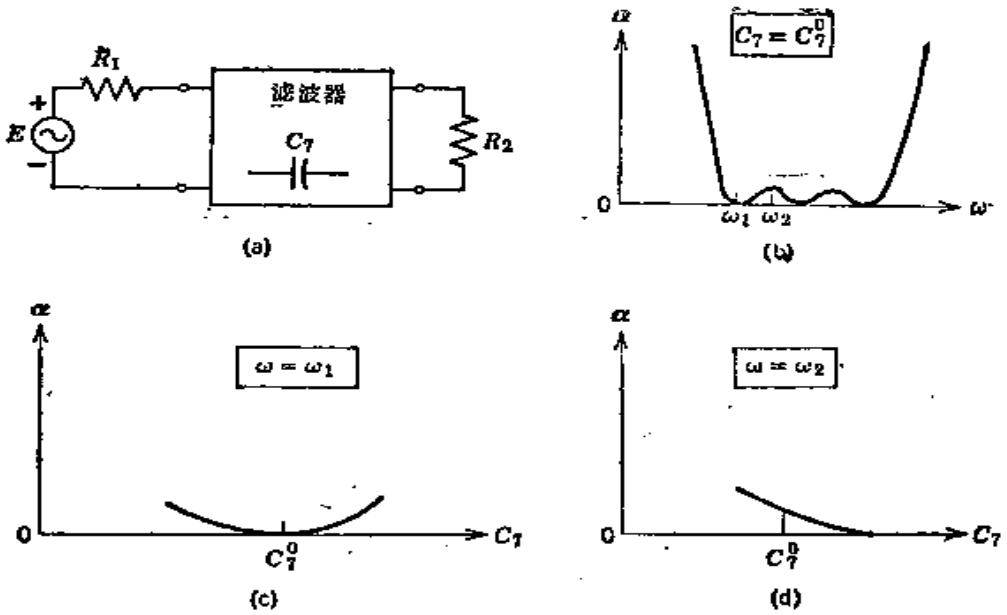


图 3-3 说明在通带频率的换能器衰减对典型元件的误差的灵敏度低

如果衰减小(但不为零)，灵敏度一般是低的（虽然也不确切为零)。就是通带中这个固有低灵敏度才使得可能用实际元件构成很复杂的滤波器电路*。

终接电阻的电抗二端对网络所提供的最大功率传输特性，基于其他原因，例如抗噪声，需要低增益的系统中、等等无疑也是需要的。基于所有这些考虑，设计具有大的平衰减或只具有一个电阻性终端的电抗滤波器，通常不是好的策略。

电抗梯形

历史上第一个（而且还最广泛使用的）结构一梯形网络示

* 注意：不一定把上面所概述的灵敏度论据、限于电抗二端对网络；例如对定阻网络、乃至有源网络，只要它能进行最大功率传输就仍然有效。

于图 3-4。除上面所讨论的通带灵敏度低以外，根据以下事实梯形电路还在它们的阻带内具有有利的特性：

梯形网络只有当其并臂导纳或串臂阻抗有极点，才可能有衰减极点。

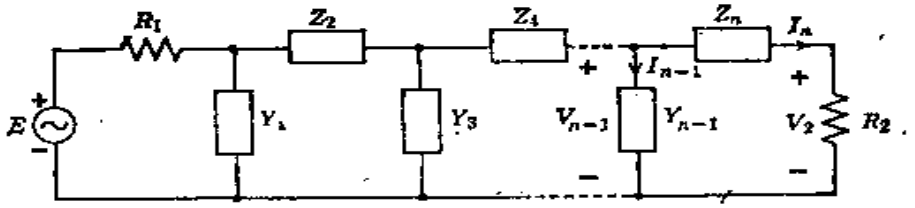


图 3-4 梯形网络

这个特性是显而易见的，正规的证明可参考章末的习题 3.2。因此，每个支路都可产生衰减极点，而且反过来也成立，各个有限非零衰减极点可由支路辨认出来。(在零和无限大频率的极点，往往由两个或两个以上的支路产生。)这使梯形滤波器的调谐比较简单。同等重要的是，基于这种特性，梯形滤波器的衰减极点对元件变化的灵敏度，与依赖于几个支路阻抗的桥式平衡来获得衰减极点的电路所具有的相比，要小得多。

显然，电抗梯形所具有的全部衰减极点必须都在 $j\omega$ 轴上。因此，它不能实现具有 s 实轴极点或象限对称四点组极点（图 3-2)的 H 或 K 函数。事实上也不是所有只具有 $j\omega$ 轴极点的转移函数都能用梯形来实现而不招致负元件值。因此，梯形并不是最一般（典型）的电抗二端对网络。虽然这样，但就大部分实际情况来说，它们仍然是可用的，而且对其适用性的这点限制与它们的优点相比是很次要的。

格形

假定 $K(s)$ 是奇函数。那么，由(3.7)有

$$AR_2 = DR_1,$$

因而由(3.14)，$\rho_1(s)=\rho_2(s)$从而 $Z_1/R_1=Z_2/R_2$。由(3.3)，还有 $Z_{11}/R_1=Z_{22}/R_2$。因而，如果 $R_1=R_2$(可以由理想变量器和二端对网络级联来实现)，则该网络的端对可以互换、而不改变其电特性。这样的一种电路叫做电对称。

容易证明，对于这类受约束但重要的二端对网络，总可以实现为对称格形网络的形式(图 3-5(a))，其方便的简化符号如图 3-5(b)。通过观察，该电路的开路阻抗参数是：$z_{11}=z_{22}=(Z_a+Z_b)/2$ 和 $z_{12}=(Z_a-Z_b)/2$。由此得出 $Z_b=z_{11}-z_{12}$

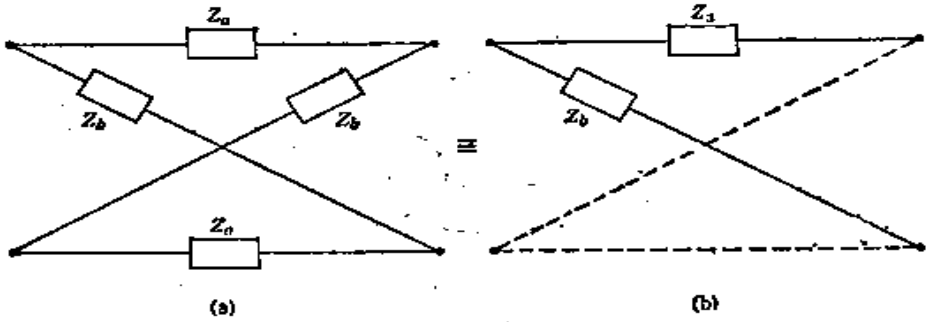


图 3-5　对称格形网络和它的简化图

和 $Z_a=z_{11}+z_{12}$。现设N为任意的对称二端对网络(图 3-6(a))。按图 3-6(b)和(c)中所示的方法，使±1:1 理想变量器与N连接所得到的两个阻抗显然就等于 $2(z_{11}\mp z_{12})$，即 $2Z_a$ 和 $2Z_b$。因此，如果N可实现，则其等效格形的所有支路阻抗，也都可实现。

对称格形的一个主要缺点，就是需要大量元件，这个数目等于多项式 $e(s)$ 阶次的两倍，即理论上所需最小数目的两倍。另一缺点就是：其衰减极点是通过电桥所有支路的平衡来获得，即在各极点频率使 $Z_a=Z_b$。最后，为了得到满意的性能，桥的两个直臂中的阻抗必须在所有频率都保持相等，两个

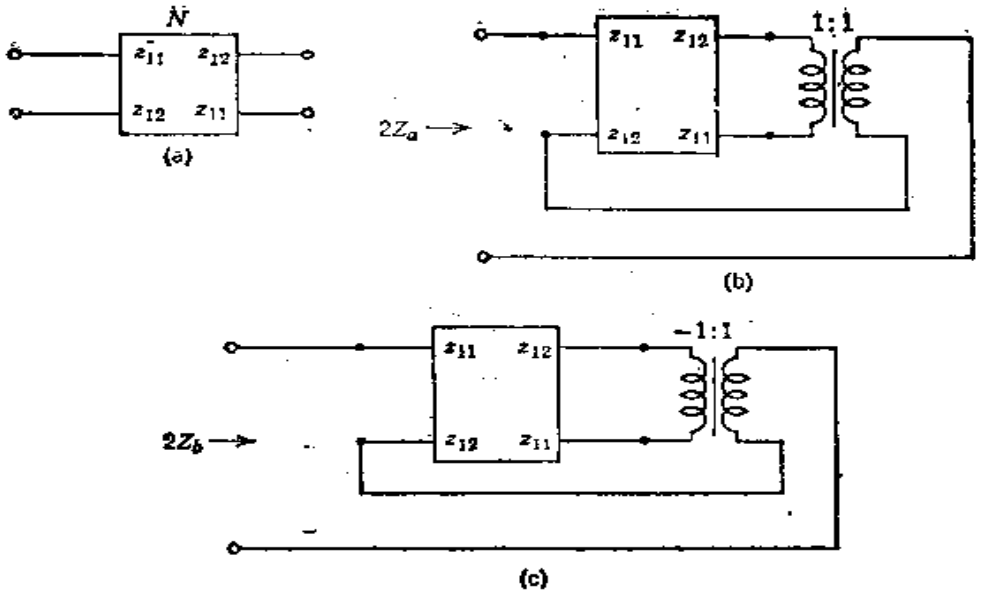


图 3-6 说明等效格形网络的臂阻抗与给定对称网络的关系

交叉臂中的阻抗也必须如此。这些特性要求使用大量小误差的元件，使格形网络成为在制作和调整上都不经济的网络。有些缺点，可以利用图 3-7 所示的等效不平衡电路来消除。这些电路主要是用理想变量器来置换格形的半数*元件。把它们(不恰当地）叫做半格形或经济电桥。可是这些电路在它们的阻带也比可资比较的梯形（如果可实现的话）灵敏得多。

格形和半格形主要是用来实现具有复衰减极点的滤波器，以及而且特别是采用机电振子的滤波器。它们的结构可以比梯形更加容易地容纳这样的振子。

考乌尔(Cauer)的典型二端对网络

一种使用元件最少，并总能实现的二端对网络是由考乌尔

* 对称格形中出现大量的元件数目是因为网络既对端对对称，又对地平衡。

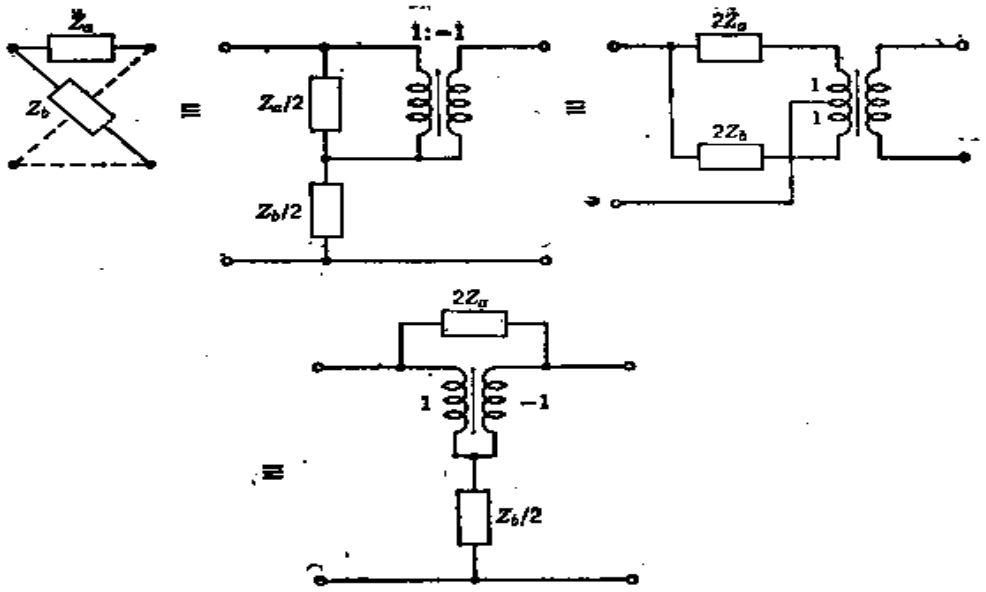


图 3-7　对称格形的几种不平衡的等效二端对

给出的。电路（对应于“紧密”型阻抗矩阵[3]）如图 3-8(a)所示。电路内的每个串联二端对网络，与阻抗参数部分分式展开式中的一项相对应，并可由它简单地求出。有关详细情形，读者可查阅参考文献[3]。图 3-8(b)表示这种电路的对偶（对应于“紧密”型导纳矩阵）。

这类网络依靠所有元件值的错综平衡来决定它们的衰减极点。它们还使用理想的多绕组变量器或大量的全耦合电感器。由于这些原因，在实际应用中几乎从来没有用过它们。

达林顿(Darlington)的典型串列型实现

据达林顿和皮洛蒂(piloty)指出，图 3-9 中所示各种电路节的级联，可得到任何可实现的电抗二端对特性。这些节对应于一对衰减极点或四点组衰减极点。A 节和 B 节当然是梯形网

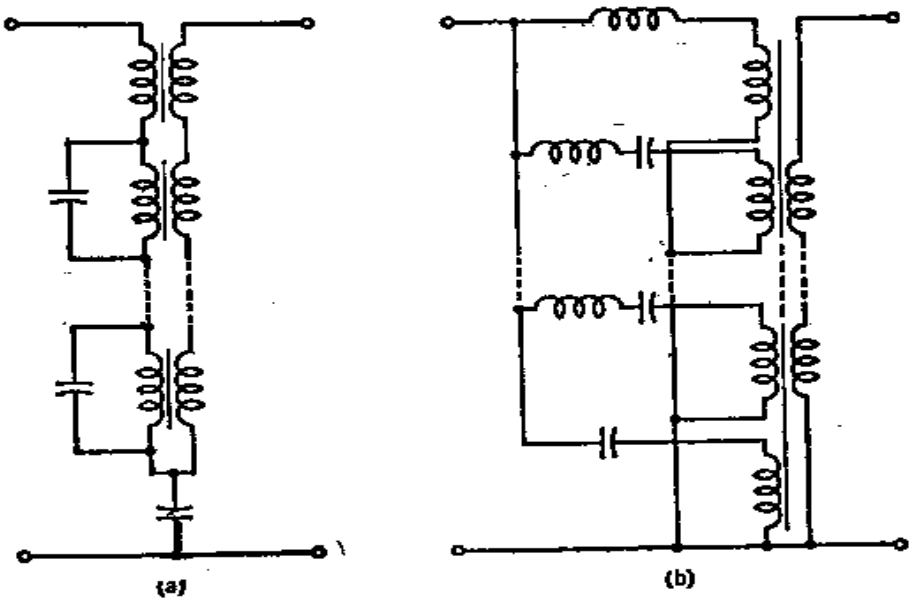


图 3-8　考乌尔的典型电抗二端对网络

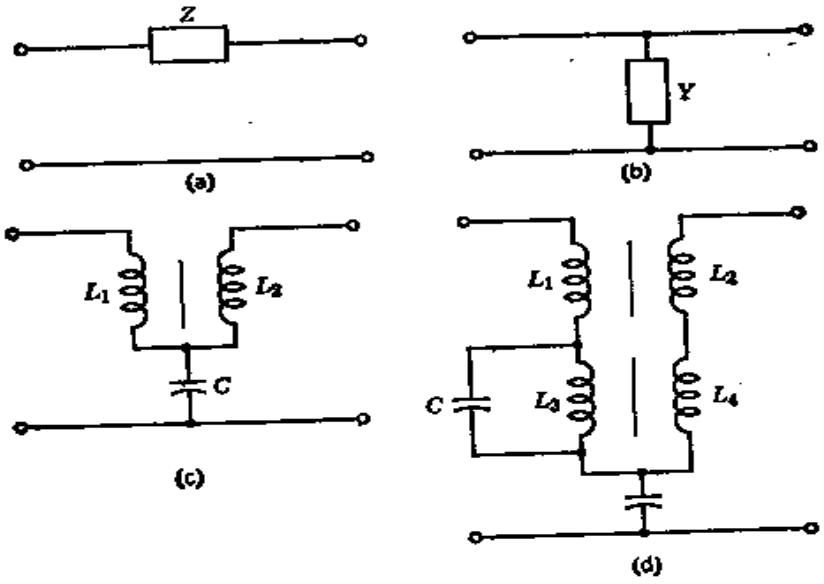


图 3-9　达林顿和皮洛蒂的典型串列节网络。所有电感器的耦合系数都为 1

络实现$j\omega$轴极点的标准单元电路。C节与布龙（Brune）节类似，实现$j\omega$轴极点时，互感为正，实现实（即σ轴）极点时，则互感为负。实现复四点组极点则需要用D型节。显然，它是考乌尔二端对网络(图 3-8(a))的（四阶）简单模型。

达林顿二端对网络的设计，可使用特殊算法直接进行（参

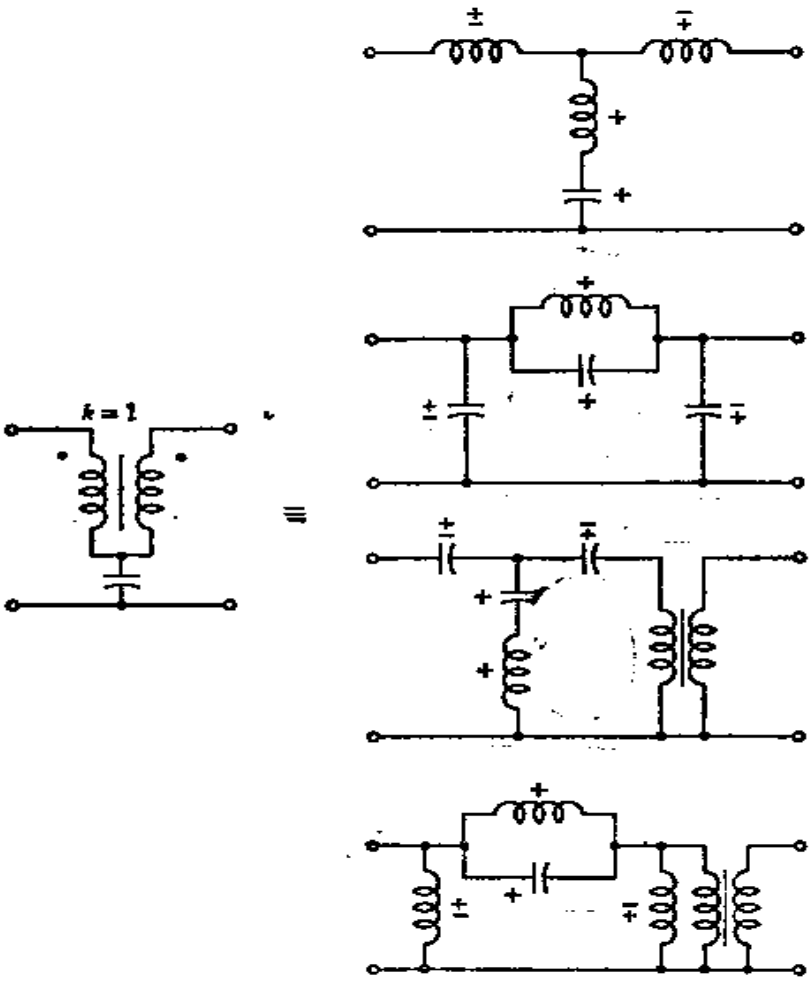


图 3-10 衰减极点在$j\omega$轴的C型节的四种可能的等效梯形。注意有一个元件总是负的。

看参考文献[4])。不过，更方便的设计方法是，首先找到具有负元件或复元件的等效梯形电路，然后把它变换为最终电路。

如果所有衰减极点都在 $j\omega$ 轴上，而且它们中至少有一个在零或无限大频率处，那么梯形的实现也许就是可能的。明确地说就是，不会需要 D 节，并且所有 C 节都具有正耦合。因此，在它们的诸等效梯形电路图（图 3-10)中，中间支路的元件都为正值。这就有可能通过级联节正、负元件的合併来消去负值元件。例如考查衰减极点在 $\pm j\omega_1$、$\pm j\omega_2$ 和 ∞ 的五阶滤波器，其达林顿网络就是图 3-11(a)所示的网络；利用图 3-10 的等效，就得到图 3-11(b)的电路。它是否已实现了只具有正元件的梯形网络，显然要取决于具体的元件值。

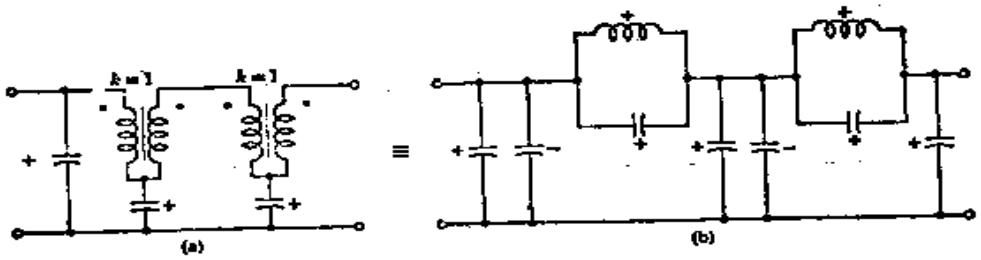


图 3-11　说明怎样从典型串列节网络导出梯形网络

3.3　梯形网络的设计

设计梯形网络首先从网络的链矩阵开始，而该链矩阵不是从 $H(s)$ 就是从 $K(s)$，经由 3.1 节所叙述的步骤得到的。网络的衰减极点和链矩阵的极点是相同的，因而可确切地知道；对于电抗梯形网络，它们必须都落在 $j\omega$ 轴上。而且根据(3.3)，就能立刻得出任何一个端对(当另一端对开路或者短路时)的策动点阻抗或策动点导纳。

能提供给定换能器函数的电抗梯形网络的合理结构，可以从网络的典型串列节模型导出。在这种网络中：

1．对于每个有限非零 $j\omega$ 轴衰减极点共轭对，都有一个C型节。

2．对于零频率的 r 阶极点，则有由 A 型和 B 型交替联成的 r 节电路；各 A 型由单个串臂电容器组成，各 B 型则由单个并臂电感器组成。

3．对于无限大频率的 m 阶极点，则有由节的序列A型和B型交替联成的 m 节电路；各A型由单个串臂电感器组成，各B型则由单个并臂电容器组成。

只要对于零和无限大频率的极点能保持A型节和B型节交替相联，而且各电路序列起始节的安排(用A节或者B节)应使电路的端对阻抗特性在零和无限大频率处，与链矩阵所确定的特性一致，那么就可以把所有以上各节按任何期望的次序来安排，以形成典型串列节的电路。

例 3-2 试从给定特征函数

$$K(s)=\frac{-76s^4+11s^3-33s^2+12s-4}{\sqrt[4]{3}(s^2+4)}$$

设计梯形网络。

解：通过观察看到：在 $\pm j2$ 有一个有限非零衰减极点共轭对，在无限大频率则有二重阶衰减极点。因此，电路将如图3.9所示那样由一个C型节、一个A型节（单个串臂电感器)和一个B型节（单个并臂电容器）的级联组成。通常也需要理想变量器。为了选择各节的恰当顺序，必须导出链矩阵。为了元件值的计算，也需要这个矩阵。

由(3.10)和(3.11)

$$
\begin{aligned}
e(s)\cdot e(-s) &= 48(s^2+4)^2+(-76s^4+11s^3-33s^2+12s-4)\\
&\quad\cdot(-76s^4-11s^3-33s^2-12s-4)\\
&= 5776s^8+4895s^6+1481s^4+504s^2+784\\
&= (76s^4+125s^3+135s^2+84s+28)\\
&\quad\cdot(76s^4-125s^3+135s^2-84s+28).
\end{aligned}
$$

因此，

$$
H(s)=\frac{76s^4+125s^3+135s^2+84s+28}{4\sqrt{3}\,(s^2+4)}
$$

从而

$$
H_e=\frac{76s^4+135s^2+28}{4\sqrt{3}\,(s^2+4)}
$$

$$
H_0=\frac{125s^3+84s}{4\sqrt{3}\,(s^2+4)},
$$

$$
K_e=\frac{-76s^4-33s^2-4}{4\sqrt{3}\,(s^2+4)}
$$

$$
K_0=\frac{11s^3+12s}{4\sqrt{3}\,(s^2+4)}.
$$

假定 $R_1=R_2=1$，于是(3.8)给出链矩阵为

$$
\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{102s^2+24}{4\sqrt{3}\,(s^2+4)} & \dfrac{136s^3+96s}{4\sqrt{3}\,(s^2+4)} \\ \dfrac{114s^3+72s}{4\sqrt{3}\,(s^2+4)} & \dfrac{152s^4+168s^2+32}{4\sqrt{3}\,(s^2+4)} \end{bmatrix}.
$$

检查这个矩阵在无限大频率附近的特性，即可表明，适合的电路结构将如图 3-12(a)所示。

那么C式节可由图 3-10 所给定的四个等效梯形之一来代

换。在衰减极点高于滤波器通带频率的时候，应该使用"低通"式等效梯形，在衰减极点低于通带频率的时候，则应该使用"高通"式等效梯形。出现在这些等效梯形中的负元件，现在必须与在其他等效C型中的，或者在A型或B型节中的同类正元件合併。在任何复杂的滤波器中，能够导出的各种可能的梯形结构的数目是极多的，对于具体的实际应用来说，选用哪一个最好，必须留待设计者决定。

继续上述例题，因为该滤波器显然要传通零频率，所以应该选用C型节的低通式等效梯形（参看图 3-10）。因此电路结构变为如图 3-12(b)所示的形式。使C型节的并臂电容与B型节的正电容合併，给出图 3-12(c)的最后结构。在此阶段，C型节中并臂电容的符号是待定的，而恰好必须指望通过它的选择使图 3-12(c)中的C_1和C_3是正的。

如例题所提到的，原则上，在网络中也需要理想变量器，把它接在端对上是很方便的。但在实际上，理想变量器几乎总是被省掉，因为可以在滤波器内部引入阻抗变换，来消去理想变量器的影响，或者是在变量器出现的端对，设法改变终接阻抗。

在已经找到合适的梯形结构之后，尚须从事计算元件值的工作。在此阶段，梯形由串臂和并臂支路的序列组成，该支路将是下列两种类型之一：

1．串臂支路中的并联调谐电路、或并臂支路中的串联调谐电路，它们谐振于 $j\omega$ 轴某个衰减极点处。这些谐振频率是知道的。

2．在串臂或并臂中的单个电感器或电容器。这些元件提供了零频率和(或)无限大频率的（也许多重的）衰减极点。

元件值的计算，现在可用四个入端阻抗（在端对 1 或端对

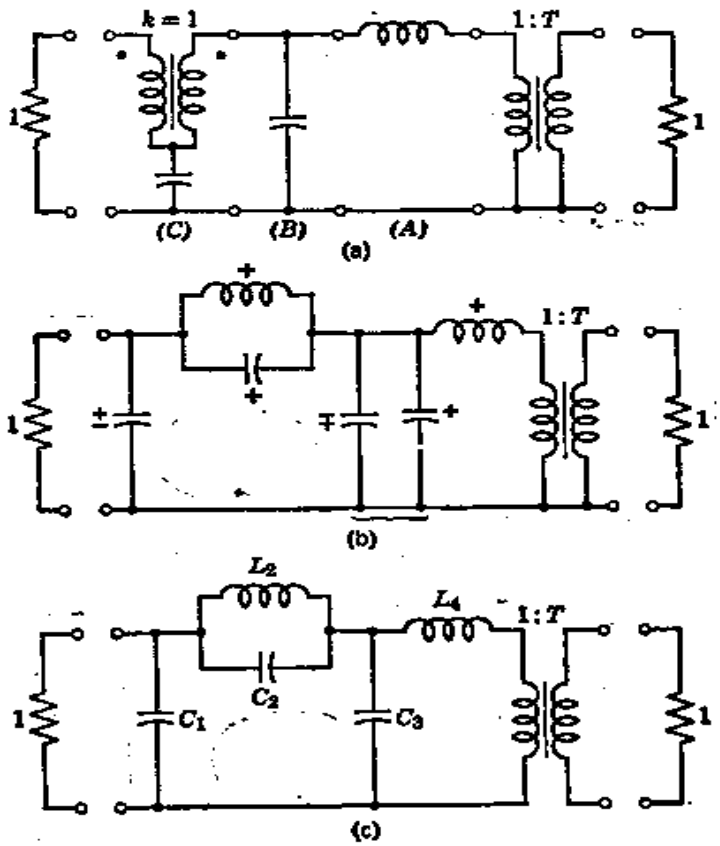


图 3-12　说明四阶低通滤波器网络的演变过程

2 开路或短路情况下）之一或一个以上来进行，并按照为网络所选择的具体梯形形式把它们展开。通常选用某个端对的较低阶的阻抗，这一方面是因其较简单，另一方面则因其条件较好(参看 3.5 节)。这意味着：一个在梯形终端的支路，对另一端对的这类阻抗毫无影响，因而不会从其展开中找到。这个"落空"的支路，同理想变量器匝数比一起，要从另一端对阻抗的展开中来求得。

梯形展开是由一系列在电路实现过程中各点阻抗或导纳极

点的部分移除或全部移除所组成。上面第 1 类中的调谐电路总是相应于全部移除。电路中紧接于全部移除调谐电路之前的那些属第 2 类的元件，则对应于在零频率或无限大频率极点的部分移去，它们是为全部移除调谐电路作准备的。电路中其它属于第 2 类的元件就对应于极点的全部移除。这个过程是大家所熟知[3,4]，因而只是通过先前的例子来说明。上面已证实了，图 3-12 所给定的网络就是由典型串列节导出的所需要的梯形，而且并联调谐电路在给定衰减极点 $s=\pm j\,2$ 处谐振。原来的要求是，网络应该运行在单位终端电阻之间。从端对 1 出发，我们挑较低阶的导纳，在本例中就是当端对 2 开路时，端对 1 的导纳；这里，它就是：

$$Y_1=\frac{C}{A}=\frac{19s^3+12s}{17s^2+4}.$$

因而电感 L_4 和理想变量器在决定 Y_1 时不起作用，因此得出图 3-13(a)所示的情况。当 L_2 和 C_2 谐振时第一个电容 C_1 的导纳就等于 Y_1，据此可找到 C_1。因而在 $s=j\,2$ 时

$$j\,2\,C_1=Y_1(j\,2)=j\,2$$

从而 $C_1=1$ 法。从 Y_1 减去 C_1 的导纳，给出

$$Y_2=Y_1-C_1s=\frac{19s^3+12s}{17s^2+4}-s$$

$$=\frac{2s(s^2+4)}{17s^2+4}$$

$1/Y_2$ 在 $s=\pm j\,2$ 有极点，而 L_2C_2 组合的阻抗，则可由 $1/Y_2$ 在这些极点的部分分式展开中的项给定：

$$\frac{1}{Y_2}=\frac{17s^2+4}{2s(s^2+4)}=\frac{8s}{s^2+4}+\frac{1}{2s}$$

所以 $L_2=8/4=2$ 亨和 $C_2=(1/8)$法。余数

$$\frac{1}{Y_2}-\frac{8s}{s^2+4}=\frac{1}{2s}$$

给出 C_3 的阻抗，从而 $C_3=2$ 法。这就从端对 1 完成了展开，除 L_4 和理想变量器的匝数比 T 外，给出了所有元件。

其次我们转向端对 2，那里较低阶的阻抗它是端对 1 短路时的阻抗：

$$Z_1=\frac{B}{A}=\frac{68s^2+48s}{51s^2+12}.$$

这时，最简单的方法是，首先展开理想变量器已经移去时的阻抗，因而对变量器左边的那部分网络，已按因数 T^2 作了阻抗定标，即电感都乘以 T^2，而电容都除以 T^2。于是，通过比较由端对 1 和端对 2 求出的那些元件值，就能算出 T 值。

照这个思路，我们得到图 3-13(b)所示的情况。T^2L_4的阻抗提供 Z_1 在无限大频率的极点，因此：

$$T^2L_4=\lim_{s\to\infty}Z_1/s=68/51=4/3$$

其次从 Z_1 减去 T^2L_4 的阻抗，给出：

$$Z_2=\frac{68s^3+48s}{51s^2+12}-\frac{4s}{3}=\frac{32s}{51s^2+12}$$

在 $s=\pm j\,2$ 处，由 T^2L_2和 C_2/T^2 所形成的并联调谐电路，具有无限大阻抗，因而 C_3/T^2 的导纳就等于 $1/Z_2$ 的。即

$$\frac{j\,2\,C_3}{T^2}=\frac{1}{Z_2(j\,2)}=j\,3$$

从而 $C_3/T^2=3/2$。从 $1/Z_2$ 减去 C_3/T^2 的导纳给出

$$\frac{1}{Z_3}=\frac{1}{Z_2}-\frac{sC_3}{T^2}=\frac{51s^2+12}{32s}-\frac{3s}{2}=\frac{3s^2+12}{32s}$$

Z_3 为 T^2L_2 的阻抗，它与 C_2/T^2 并联，因此

$$T^2L_2=32/12=8/3$$

$$C_2/T^2=3/32.$$

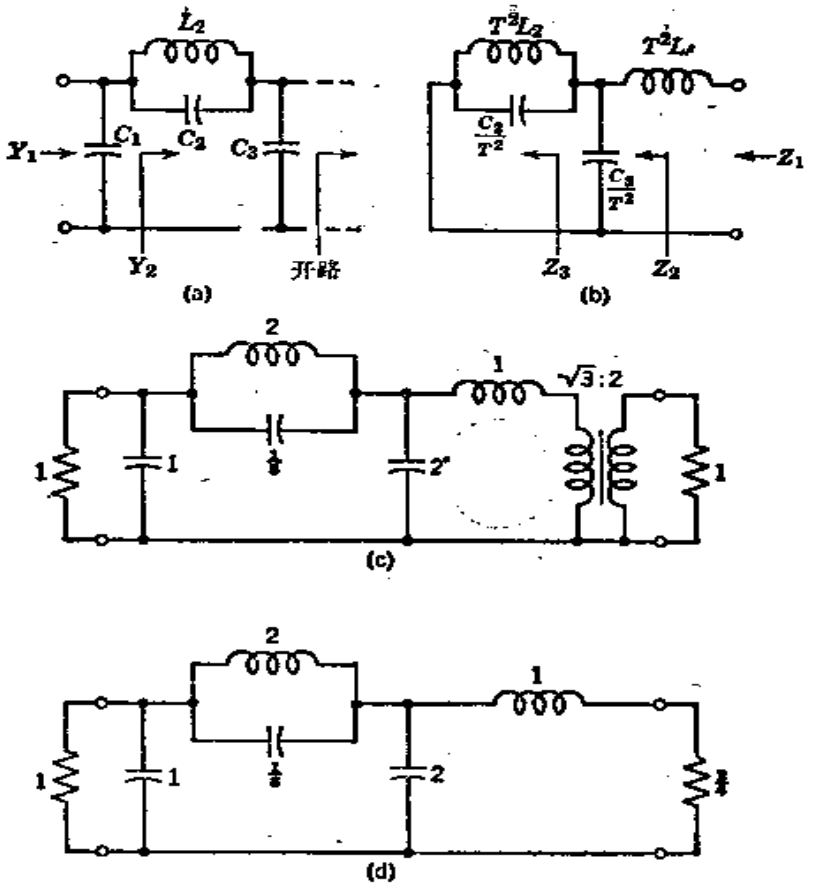


图 3-13　在图 3-12(C)的滤波器中，由端对 1 和端对2的阻抗来说明元件的计算

因为 $C_2=(1/8)$法(在从端对 1 展开的过程中所得到)，可见 $T^2=4/3$。知道了 T^2，就能算出 L_4 为$(4/3)/T^2=1$。现在完成了图 3.12 的原来电路的设计，并把元件值表示在图 3-13(c)上。实际上人们通常总是用 3/4 欧终端来替换变量器和 1 欧终接电阻的组合，如图 3-13(d)所示，而不试图去作理想变量器。

改良的实现算法

上述对梯形展开的运算，是不必要地复杂化和多样化了。此外，它们还使数值精度有所下降，因为差不多在每一阶段都要作其值相近数间的减法。所有这些缺点，可以通过采用一种简单而通用的算法来避免，这种算法是专为梯形的实现[5]而导出的*。算法的使用将由图 3-14 所示的简单例子来说明。设

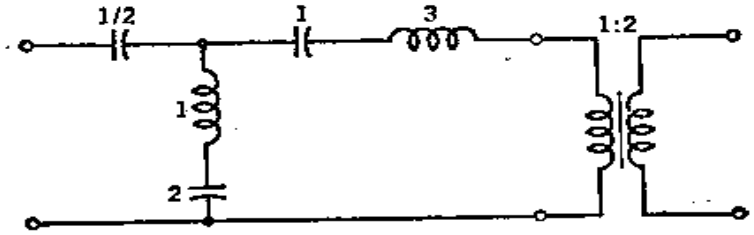


图 3-14　一般梯形实现算法的实例电路

计的第一步示于图 3-15(a)中。由图，

$$Z_1=\frac{1}{sC_1}+\frac{1}{\dfrac{s/L_2}{s^2+\omega_2^2}+\dfrac{1}{z_3}}$$

式中$\omega_2^2=1/L_2C_2$。设$Z_1=U(s^2)/sV(s^2)$和$Z_3=\overline{U}(s^2)/s\overline{V}(s^2)$，这里$U$、$V$、$\overline{U}$和$\overline{V}$是$s^2$的多项式。于是，在化成一简单分数之后，以上变为

$$\frac{U}{sV}=\frac{(1/C_1)[(1/L_2)\overline{U}+(s^2+\omega_2^2)\overline{V}]+(s^2+\omega_2^2)\overline{U}}{s[(1/L_2)\overline{U}+(s^2+\omega_2^2)\overline{V}]},\tag{3.17}$$

通过使分子和分母分别相等，并用简单的代替，我们得到

---

* 编辑注：这个算法是 H.J.奥查德发现的。

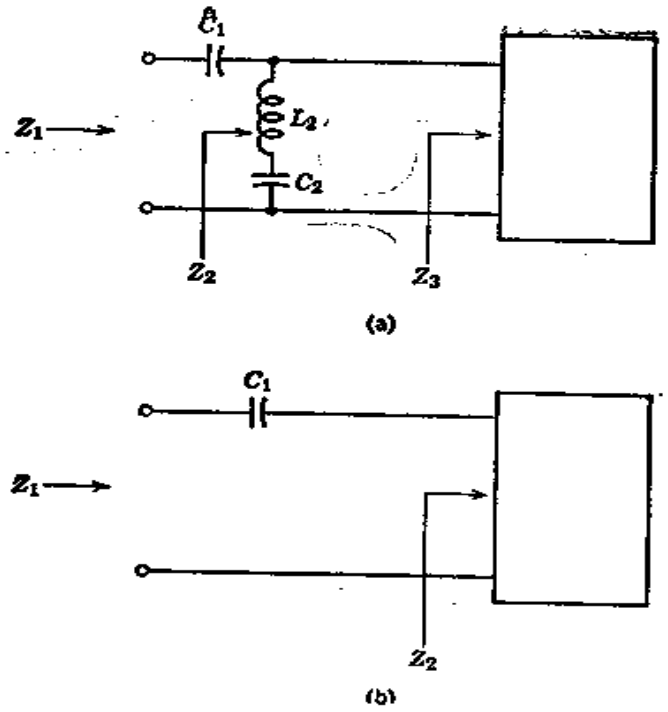


图 3-15　图 3-14 梯形电路实现的过程

以下两个方程：

$$U=(1/C_1)V+(s^2+\omega_2^2)\overline{U} \tag{3.18}$$

$$V=(1/L_2)\overline{U}+(s^2+\omega_2^2)\overline{V}. \tag{3.19}$$

在(3.18)中，U、V 和 ω_2^2 是已知的；未知数为 C_1 和多项式 $\overline{U}$ 的系数。同样在(3.19)中，认为 V、$\overline{U}$ 和 ω_2^2 是已知的($\overline{U}$ 由(3.18)解得)，而未知数则为 L_2 和 $\overline{V}$ 的系数。两个方程因而在形式上相同，而且可用一般的算法一个一个的解出。

如果梯形电路由本节早先所叙述的简单方法来设计，这等于照以下方法求解(3.18)(然后(3.19))。指定 $s^2=-\omega_2^2$，并得到 $1/C_1=U(-\omega_2^2)/V(-\omega_2^2)$。于是把 $(s^2+\omega_2^2)\overline{U}$ 表示为 $U-(1/C_1)V$。最后，以因子 $s^2+\omega_2^2$ 除最后这个多项式，就得 $\overline{U}$。

按照系数以代数方式进行刚才说的步骤，可明显看出，所得 $\bar{U}$ 的系数公式中包含对消项。在删除这些对消项以后，所得出的系数公式，从计算观点来说，就代表着可能导出的最准确公式。

使用这些公式直接对 $\bar{U}$ 的系数求值，比用简单方法要涉及更多的算术步骤，但它给出较高的准确性，因为在后一种情况下，应该对消的项是按分别运算来计算的，因而并不正确地匹配。系数的公式易于编出计算机程序，因而这额外的计算时间一般是无关紧要的。

为了说明公式的性质和对消的程度，设

$$U=u_0+u_1s^2+u_2s^4+u_3s^6+u_4s^8$$
$$V=v_0+v_1s^2+v_2s^4+v_3s^6+v_4s^8.$$

并为方便起见，设 $a_1=1/C_1$ 和 $x=-\omega_2^2$。求解的方程于是为

$$U=a_1V+(s^2-x)\bar{U}. \tag{3.20}$$

指定 $s^2=x$ 立刻给出 $a_1=U(x)/V(x)$。那么

$$U-a_1V=(u_0-a_1v_0)+(u_1-a_1v_1)s^2+(u_2-a_1v_2)s^4$$
$$+(u_3-a_1v_3)s^6+(u_4-a_1v_4)s^8.$$

按通常的方法用 s^2-x 除这个多项式，由 (3.20) 给出 $\bar{U}$ 的系数为：

$$\bar{u}_3=(u_4-a_1v_4)$$
$$\bar{u}_2=(u_3-a_1v_3)+(u_4-a_1v_4)x$$
$$\bar{u}_1=(u_2-a_1v_2)+(u_3-a_1v_3)x+(u_4-a_1v_4)x^2$$
$$\bar{u}_0=(u_1-a_1v_1)+(u_2-a_1v_2)x+(u_3-a_1v_3)x^2+(u_4-a_1v_4)x^3$$

例如考虑 $\bar{u}_1$ 的式子。以 $U(x)/V(x)$ 替换 a_1，而且以 $V(x)$ 遍乘，就得到

$$\bar{u}_1V(x)=u_2V(x)-v_2U(x)+xu_3V(x)-xv_3U(x)+$$
$$+x^2u_4V(x)-x^2v_4U(x)$$

$$=V(x)(u_2+u_3x+u_4x^2)-U(x)(v_2+v_3x+v_4x^2)$$
$$=(v_0+v_1x+\underline{v_2x^2+v_3x^3+v_4x^4})(u_2+u_3x+u_4x^2)$$
$$-(u_0+u_1x+\underline{u_2x^2+u_3x^3+u_4x^4})(v_2+v_3x+v_4x^2)$$
$$=(v_0+v_1x)(u_2+u_3x+u_4x^2)-(u_0+u_1x)(v_2+v_3x+v_4x^2)。$$

在$V(x)$和$U(x)$下面划线部分，乘以相伴的因式时显然要对消。同样的对消也发生在其他系数的式子中。把所有系数的最后式子（在对消之后）都列于表3.1中。为任何U和V求解这个问题的一般规则，通过对表中各项结构的考查，应该是明显的。

表 3-1

$\Delta\triangleq V(x)=v_0+v_1x+v_2x^2+v_3x^3+v_4x^4$
$a_1\Delta=u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+u_4x^4=U(x)$
$\tilde{u}_0\Delta=v_0(u_1+u_2x+u_3x^2+u_4x^3)-u_0(v_1+v_2x+v_3x^2+v_4x^3)$
$\tilde{u}_1\Delta=(v_0+v_1x)(u_2+u_3x+u_4x^2)-(u_0+u_1x)(v_2+v_3x+v_4x^2)$
$\tilde{u}_2\Delta=(v_0+v_1x+v_2x^2)(u_3+u_4x)-(u_0+u_1x+u_2x^2)(v_3+v_4x)$
$\tilde{u}_3\Delta=(v_0+v_1x+v_2x^2+v_3x^3)u_4-(u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3)v_4$

关于Z_1在$s=0$处极点的全部移除，如图3.15(b)所示那样，若$Z_1=U/sV$，则得到$Z_2=s\overline{U}/V$，即分母多项式V保持未变。联系这些多项式的方程简化为

$$U=(1/C_1)V+s^2\overline{U} \tag{3.21}$$

应用上述方程(表3-1)，以$x=0$，就给出C_1和$\overline{U}$。

图3-16(a)电路的分析可以按同样方式进行（参看习题3.10），以给出(3.18)和(3.19)的一般形式的一对方程。Z_1在无限大频率处极点的全部移除(图3-16(b))，它也只是一种特殊情况，这时仅需求解一个多项式方程。

容易证明，图3-17(a)和图3-17(b)的电路，分别是图

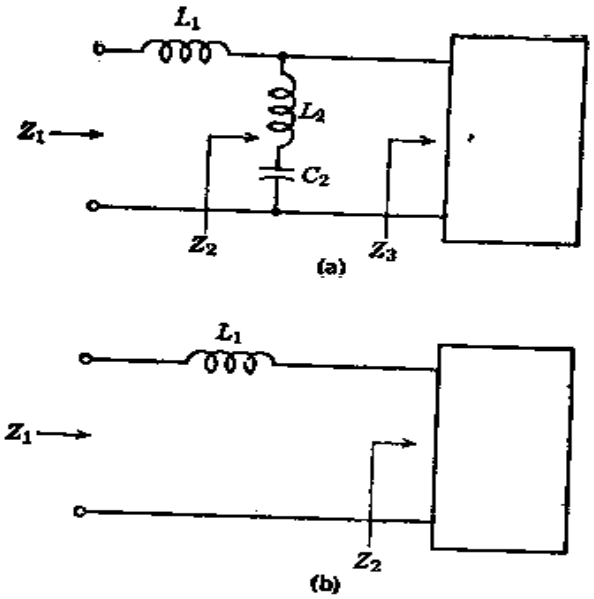


图 3-16　梯形实现的进一步说明

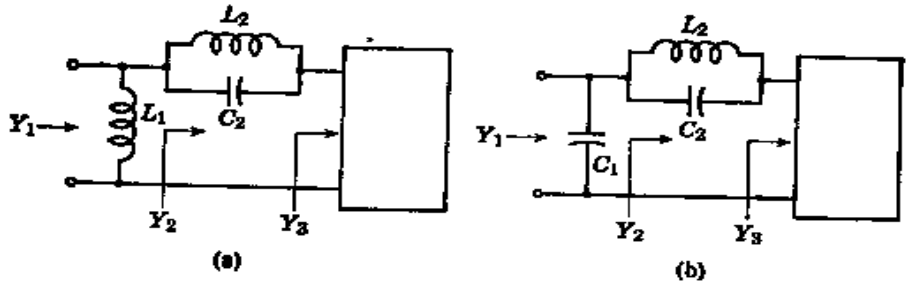


图 3-17　与图 3-15 和 3-16 对偶的电路

3.15(a) 和图 3.16(a) 中电路的对偶，因而它们的设计关系在数学上是相同的(习题 3.11)。

现在可以得出结论：包含在梯形展开中的所有关系，都具有下列形式：

$$P(s^2)=a_1Q(s^2)+(ys^2-x)\cdot R(s^2) \qquad (3.22)$$

式中 P 和 Q 为已知的多项式，而 (y,x) 可能是 $(1,-\omega_2^2)$、$(1,0)$、$(\omega_2^{-2},-1)$、$(0,-1)$ 四组的任何一组。多项式 $Q(s^2)$ 可以包含 s^2 因子。这时未知常数 a_1 和多项式 R 就可以从下列关系中找到：

$$\Delta=\sum_{i=0}^{n}q_i x^i y^{n-i}$$

$$a_1\Delta=\sum_{i=0}^{n}p_i x^i y^{n-i}$$

$$r_k\Delta=\Big[\sum_{i=0}^{k}q_i x^i y^{k-i}\Big]\Big[\sum_{i=k+1}^{n}p_i x^{i-k-1}y^{n-i}\Big]$$

$$-\Big[\sum_{i=0}^{k}p_i x^i y^{k-i}\Big]\Big[\sum_{i=k+1}^{n}q_i x^{i-k-1}y^{n-i}\Big]\quad k=0,1,\cdots(n-1),\tag{3.23}$$

式中

$$P(s^2)=\sum_{i=0}^{n}p_i s^{2i}$$

$$Q(s^2)=\sum_{i=0}^{n}q_i s^{2i}\quad\text{（注：}q_n\text{ 可以为零）}$$

$$R(s^2)=\sum_{i=0}^{n-1}r_i s^{2i},\tag{3.24}$$

（参看习题 3.12）。例如，对于 $n=3$，方程为

$$\Delta=q_0y^3+q_1xy^2+q_2x^2y+q_3x^3$$

$$a_1\Delta=p_0y^3+p_1xy^2+p_2x^2y+p_3x^3$$

$$r_0\Delta=q_0(p_1y^2+p_2xy+p_3x^2)-p_0(q_1y^2+q_2xy+q_3x^2)$$

$$r_1\Delta=(q_0y+q_1x)(p_2y+p_3x)-(p_0y+p_1x)(q_2y+q_3x)$$

$$r_2\Delta=(q_0y^2+q_1xy+q_2x^2)p_3-(p_0y^2+p_1xy+p_2x^2)q_3 \tag{3.25}$$

在特殊情况 $x=0$ 和 $y=1$ 的时候，相当于在 $s=0$ 处极点的全部移除，这些公式就简化成

$$\begin{aligned}\Delta&=q_0\\ a_1&=p_0/q_0\\ r_0&=(q_0p_1-p_0q_1)/q_0\\ r_1&=(q_0p_2-p_0q_2)/q_0\\ r_2&=(q_0p_3-p_0q_3)/q_0\end{aligned} \tag{3.26}$$

这里，r_k的表示式和在最简单方法中所得到的相同，这时这种算法并没有什么优点——使用它只是为了程序的统一性。

最少电感滤波器

使用磁心材料的电感器，和用在滤波器中的电容器相比是既大且重，成本也高*。因此，期望把它们在电路中的数目减到最少。一个有限非零 $j\omega$ 轴衰减极点共轭对的实现，当然需要一个电感器；不过，在零(或无限大)频率的一个衰减极点，可以只使用一个串臂（或并臂）电容器来得到。因此，这表明可能的最少电感器数目，就等于有限非零极点对的数目。但每对实极点（用C式节实现）也需要一个电感器，而四点组复极点则需要两个电感器(如果把带抽头的电感器看作单个元件)。这个最少数目，对于低通和高通滤波器确实是可以得到的；例如，图 3-18 (a) 和(b) 分别说明低通和高通电路，其所有电感器是为了有限非零衰减极点的实现而采用的**。

至于带通滤波器的情况就更复杂了。经验表明，在展开

---

* 一般说来比电容器贵五倍。

** 含有耦合线圈的部分是相应于复衰减极点的 D 式节的实际实现。

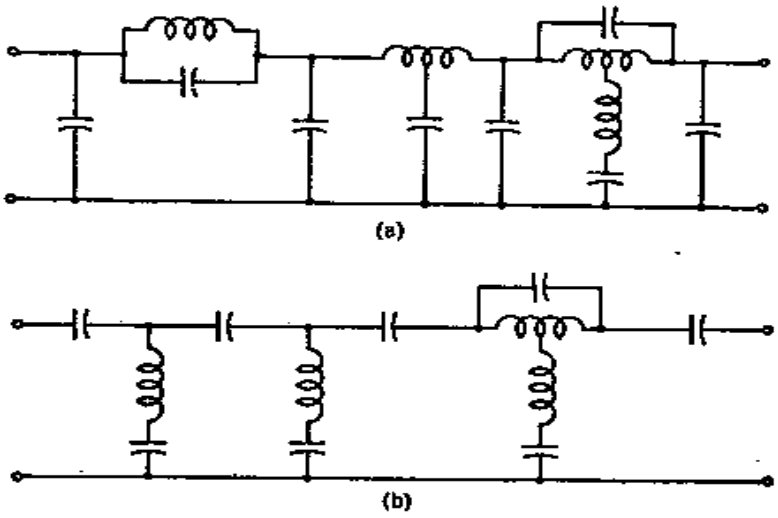


图 3-18　最少电感低通和高通滤波器的例子

梯形的时候，为了得到正元件值，上阻带中的衰减极点必须利用低通式节来实现（图 3-19 (a)和(b)），而下阻带中的衰减极点则需要用高通式节来实现（图 3-19 (c)和(d)）。于是，根据最少电感的要求，建议用图 3-19 (a) 和(c) 中所示型式的链接节来实现带通特性。图 3-20 所示就是一例，它的上下阻带各有两个极点，而且还有一个极点在零频率、一个极点在无限大频率。对于这一组衰减极点，该电路确实使用了最少可能数目的电感器，所以在这个意义上，该电路是高效率的。不过也有一些限制，使它只能经过特殊的设计技术才能作到。

要了解关于最少电感电路的限制，考虑下列反射系数

$$\rho_1(s)=\frac{f(s)}{e(s)}=\frac{Z_1(s)-R_1}{Z_1(s)+R_1}$$

$$\rho_2(s)=\mp\frac{f(-s)}{e(s)}=\frac{Z_2(s)-R_2}{Z_2(s)+R_2} \qquad (3.27)$$

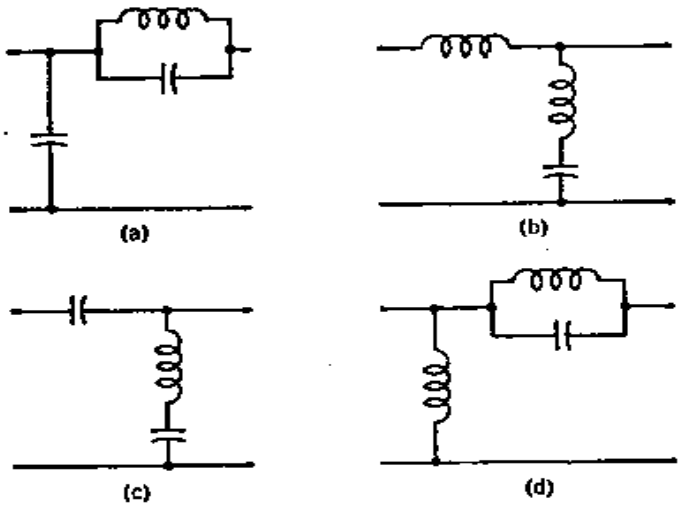


图 3-19　基本的低通和高通式节

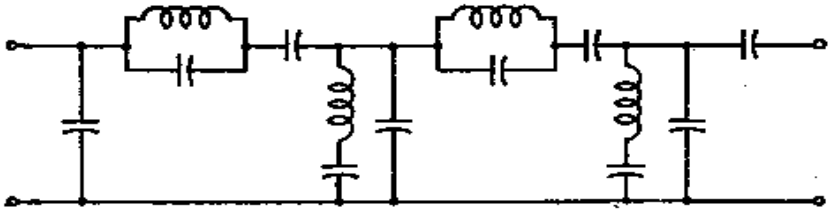


图 3-20　最少电感带通滤波器，在实S轴上具有两个反射零点

的特性。在零频率，Z_1 和 Z_2 两者都变为无限大；在无限大频率两个阻抗都趋于零。从而，

$$\rho_1(0)=\rho_2(0)=+1$$
$$\rho_1(\infty)=\rho_2(\infty)=-1 \qquad (3.28)$$

按照 $\rho_1(s)$和 $\rho_2(s)$沿正实 s 轴（这里 $e(s)$ 可以没有零点）的特性，因此必能找到 $f(s)$和 $f(-s)$ 两者的零点。结论是，图 3-20 的电路（而且可以直截了当的推广到只由图 3-19 (a)和(c)的节所组成的任何电路）沿正和负实轴都至少各有一个反射

零点。因为第 2 章所描述的，所有常用而且有效的转移函数，它们的反射零点在通带内或接近通带，所以图 3-20 所示的电路不能直接用来实现这些函数。事实上，实反射零点对响应没有多少影响，它们的值可看作几乎是“自由”或任意的设计参数。由于这种原因，这类真正最少电感滤波器往往称为**参量滤波器**。这种电路的设计，需要特殊的逼近方法[7,5]这已超出本书的范围。

现在考虑图 3-21 所示的带通滤波器。这个电路与图 3-20 的参量滤波器相似，但是它有两个附加的电感器，对应于在零频率和无限大频率都附加一个极点。容易看出：对于这种电路 $\rho_1(0)=\rho_1(\infty)=-1$，$\rho_2(0)=\rho_2(\infty)=+1$，因而无需出现实反射零点。因此，在零和无限大频率都至少具有两个衰减极点的带通电路，就能实现所有反射零点都在通带内或接近通带处的常规转移函数。如果在零和无限大频率的衰减极点数目分别为 1 和 3，或 3 和 1，那么也可得到同样的结论，正如习题 3-14 所证实的那样*。因此，“常用的”最少电感电路，一般说来有 $n/2$ 电感器，这里 n 为滤波器的等级，即衰减极点的总数，包括那些在零频率和无限大频率的极点。对于参量滤波器的对应数目

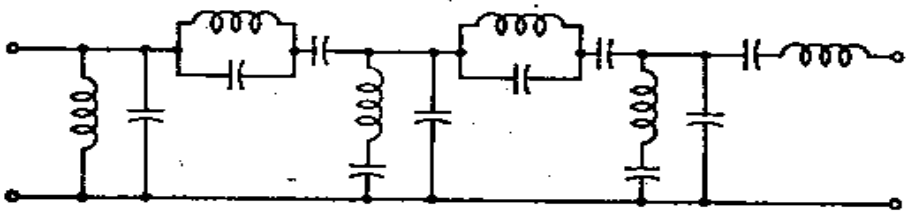


图 3-21　最少电感带通滤波器，其所有反射零点都可在通带范围内的 $j\omega$ 轴上

* 通常希望在零和无限大频率、都至少各有一个衰减极点，使图 3-18 至3-19 的实用节可以应用。

则为$(n/2)-1$。

3.4 格形网络设计

在3.2节中曾指出：对称格形和（或）其变量器耦合等效电路，是重要的设计媒介，对于谐振子滤波器尤其如此。这些电路的设计本质上包括：从规定的$H(s)$和$K(s)$寻求格形阻抗Z_a和Z_b。由于电抗性阻抗的实现、是发展很成熟而且很容易的任务（参看参考文献[3]），一旦Z_a和Z_b已经找到，设计就轻而易举了。

Z_a和Z_b按照$H(s)$和$K(s)$的计算，可以利用早先所得到的结果。如3.1节((3.3)—(3.6))所示那样，可以把$H(s)$、$K(s)$和阻抗参数Z_{ij}、用链矩阵元素A、B、C和D、以及滤波器的终端电阻R_1和R_2来表示。此外，在3.2节中曾导出了对称格形的臂阻抗Z_a、Z_b和Z_{ij}的关系为

$$Z_a = z_{11} - z_{12} = \frac{A-1}{C} \qquad Z_b = z_{11} + z_{12} = \frac{A+1}{C}$$

由此链矩阵为

$$T = \frac{1}{Z_b - Z_a}\begin{bmatrix} Z_b + Z_a & 2Z_aZ_b \\ 2 & Z_b + Z_a \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

把这些关系代入(3.4)—(3.6)，并利用$R_1 = R_2 = R$，我们得到

$$H(s) = \frac{(Z_b + R)(Z_a + R)}{R(Z_b - Z_a)}$$

$$K(s) = \frac{Z_aZ_b - R^2}{R(Z_b - Z_a)}. \tag{3.30}$$

也可以通过(3.8)和(3.29)，用 $H(s)$和 $K(s)$ 来直接表示 Z_a 和 Z_b。结果是

$$Z_a=R\frac{H_e+K_e-1}{H_0-K_0}=R\frac{H_e-1}{H_0-K_0}$$

$$Z_b=R\frac{H_e+K_e+1}{H_0-K_0}=R\frac{H_e+1}{H_0-K_0} \qquad (3.31)$$

式中第二步是因为对称二端对网络的 $K_e\equiv 0$。

可以把等式(3.31)看作我们课题的解。但是，可以容易地证明，(3.31)所给出的 Z_a 和 Z_b 的分子和分母，两者的阶次都太高，而必须进行公因子的对消（参看习题 3.15)。因为在实际设计中，这些因子可能不容易发觉，而且由于数字的不精确，甚至不可能保留为公共因子，因此，不如设想出一种设计途径来避免这些对消公共因子。这种方法介绍如下：

把有理函数 $H(s)$、$K(s)$、$Z_a(s)$ 和 $Z_b(s)$ 按照它们的分子和分母多项式，写作

$$H(s)=\frac{e(s)}{p(s)},\quad K(s)=\frac{f(s)}{p(s)} \qquad (3.32)$$

$$Z_a(s)=R\frac{n_a(s)}{d_a(s)},\quad Z_b(s)=R\frac{n_b(s)}{d_b(s)} \qquad (3.33)$$

并把这些关系代入 (3.30)，可得

$$H(s)=\frac{(n_a+d_a)(n_b+d_b)}{(n_bd_a-n_ad_b)}=\frac{e(s)}{p(s)} \qquad (3.34)$$

$$K(s)+1=\frac{(n_b+d_a)(n_a-d_b)}{(n_bd_a-n_ad_b)}=\frac{f(s)+p(s)}{p(s)}$$

$$K(s)-1=\frac{(n_a-d_a)(n_b+d_b)}{n_bd_a-n_ad_b}=\frac{f(s)-p(s)}{p(s)}. \qquad (3.35)$$

从 (3.34) 和 (3.35)，可以推论：

1．因为五个多项式 $p(s)=(n_ad_b-n_ad_b)$、n_a、d_a、n_b和

d_b 中的每一个，都必须是纯偶或纯奇，可能的奇偶性选择如表 3-2 所示。

表 3-2

$p(s)$	n_a	d_a	n_b	d_b
偶	偶 奇	奇 偶	奇 偶	偶 奇
奇	偶 奇	奇 偶	偶 奇	奇 偶

2．那些自然模即 $e(s)=(n_a+d_a)(n_b+d_b)$ 的零点，分成两组。在属于 (n_a+d_a) 的第一组中的那些，也是 $f(s)+p(s)$ 的零点。在属于 (n_b+d_b) 的第二组中的那些，则是 $f(s)-p(s)$ 的零点。

根据这些观察，提出以下的设计方法：

1．找到所有自然模。

2．把自然模代入 $f(s)+p(s)$ 和（或）$f(s)-p(s)$。用那些是 $f(s)+p(s)$ 零点的模来构成多项式 (n_a+d_a)；用那些是 $f(s)-p(s)$ 零点的模，构成 (n_b+d_b)。

3．根据表 3.2 所列举的这种或那种可能性，把 (n_a+d_a) 和 (n_b+d_b) 的奇部和偶部分别用作 n_a、d_a、n_b、d_b 四个多项式。

如前所述，余下的设计涉及 Z_a 和 Z_b 的实现，是直截了当的。

应该指出，根据 $f(s)+p(s)$ 或 $f(s)-p(s)$ 的分解因子的另一种设计方法也是可能的，而且它本质上就等效于这里所

提出的方法。所述方法的一项优点就是，容易利用频率变换变量来进行（参看 3.5 节）。

把 $H(s)$ 重写成

$$H(s)=\frac{(Z_b+R)(Z_a+R)}{R(Z_b-Z_a)}=-\frac{(Z_a+R)(Z_b+R)}{R(Z_a-Z_b)}$$

$$=-\frac{(R^2/Z_b+R)(R^2/Z_a+R)}{R(R^2/Z_b-R^2/Z_a)}$$

$$=\frac{(R^2/Z_a+R)(R^2/Z_b+R)}{R(R^2/Z_a-R^2/Z_b)} \tag{3.36}$$

说明具有阻抗 Z_a、Z_b 或 Z_b、Z_a 或 R^2/Z_a、R^2/Z_b 或 R^2/Z_b、R^2/Z_a 的格形电路，除了极性倒转以外，在它们的转移特性方面则是等效的。

例 3-3 利用本节所叙述的两种设计方法，试从已知 $K(s)=s^3$ 设计格形滤波器。

解：（a）从前例（3-1 节），

$$K(s)=s^3 \text{ 给出 } H(s)=s^3+2s^2+2s+1,$$

因而

$$H_e(s)=2s^2+1,\quad H_0(s)=s^3+2s,\quad K_0(s)=s^3.$$

假定 $R_1=R_2=1$，(3.31) 给出：

$$Z_a=\frac{2s^2}{2s},\quad Z_b=\frac{2s^2+2}{2s}.$$

在公因数的对消之后，Z_a 和 Z_b 变为：

$$Z_a=s,\quad Z_b=s+\frac{1}{s}$$

对应的格形电路示于图 3-22。

（b）利用设计步骤 1 到 3：

1. 因为 $H(s)=(s+1)(s^2+s+1)$，自然模为 -1、$-0.5\pm j\,0.866$。

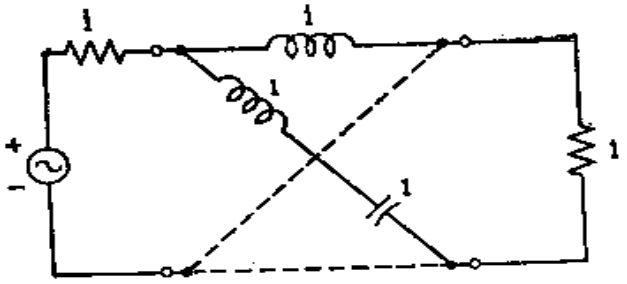


图 3-22 格形滤波器设计实例的电路

2. 这里 $f(s)=s^3$、$p(s)=1$、$f(s)+p(s)=s^3+1$ 和 $f(s)-p(s)=s^3-1$。显然，$s_1=-1$ 为 $f(s)+p(s)$ 的零点，因而 $n_a+d_a=s+1$。同样，自然模 $s_{2,3}=-0.5\pm j\,0.866$ 为 $f(s)-p(s)$ 的零点，因而 $n_b+d_b=s^2+s+1$。

3. 对于偶的 $p(s)$，利用表 3-2，并选择由表所提供的第二种可能性，得以下结果：

$$n_a(s)=s;\qquad d_a(s)=1$$
$$n_b(s)=s^2+1;\ d_b(s)=s.$$

最后，由 (3.33)：

$$Z_a(s)=s;\quad Z_b(s)=\frac{s^2+1}{s}=s+\frac{1}{s}.$$

利用这种方法，不需要对消就得到格形电路的阻抗。

3.5 滤波器设计中的数值病态

本章先前的讨论可能意味着，只要设计步骤确如所叙说的那样进行，将不难得到滤波器元件的值。不幸，情况并不这样。虽然该设计方法对大约五阶以下的简单低通滤波器不会有什么问题，但是在设计更复杂的滤波器时，就发现将某个端对阻抗梯形展开所得出的元件值，将稍微不同于在另一端对经过对应

展开所得到的那些元件值。

在这两组元件值之间的差异，随滤波器的等级而迅速增加，到还很中等大小的网络时，在它们之间几乎就没有相关性了。结论自然是，大概没有一套元件值是正确的，并且是在设计过程中的某处损失了精度。

曾经有人以为，这种精度损失是由接近相等数互减的重复计算引起，例如在ϵ与a相比是很小时计算$\sqrt{a+\epsilon}-\sqrt{a}$，会损失精度。在这种简单情况下的解法，只需去计算$\epsilon/(\sqrt{a+\epsilon}+\sqrt{a})$即可，因此，人们也希望能找到类似的技巧，以解决滤波器设计中的精度问题。

其实，虽然某些不精确性无疑是由于上述的原因造成，但已弄清，其最主要的来源实际上是这样或那样形式的**病态**。（病态是用来描述在工程中通常称作高灵敏度的通用数学名词。）

滤波器设计中最重要的病态，就发生在把有关滤波器的信息存储在构成链矩阵（或相等地Z或Y矩阵）的多项式的系数中的时候。这些系数中的很小变化，就在梯形网络的元件值中导致大的变化，换句话说，元件值对系数中的误差是极为灵敏的。

这个灵敏度是这么高，以致对于只是中等复杂的滤波器，仅仅把准确的系数截尾到十位小数，也许就足以很猛烈地影响某些元件值，有时甚至使它们成为负数。在后一情况下，链矩阵就不再是实际上可实现的！在已把系数作这样截尾之后，再用较高精确度（甚至无限精确度）来进行随后的算术步骤是无益的，由截尾所造成的损伤是无法挽回的。

例 3-4 为了说明元件值对系数容差的这种灵敏度，考查图3-23所示的简单七阶低通滤波器，其元件值给定于表3-3

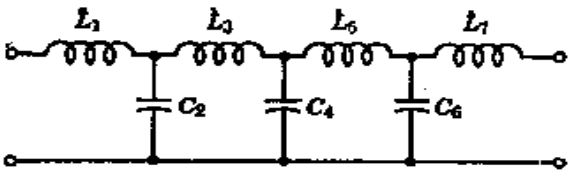


图 3-23　关于说明病态的例子的电路

的横行 1。

端对 2 短路时在端对 1 的入端阻抗为

$$Z(s)=\frac{32\,s^7+64\,s^5+38\,s^3+6\,s}{32\,s^6+48s^4+18\,s^2+1}.$$

如果把 $Z(s)$中 s^5 的系数从 64 变到 64.64 改变 1%，并通过展开这个已变更的阻抗，求出对应的梯形网络，其元件值变成表 3-3 第 2 横行中所给定的那些值。可见，甚至在这种很简单的情况下，在 s^5 的系数中误差 1%就在 L_7 中被放大到 19%的误差。

表 3-3

元 件 值	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7
最 初 值	1	2	2	2	2	2	1
在 s-域系数中变化1%	1	1.923	1.745	1.775	2.062	2.184	1.193
在 z-域系数中变化1%	1.006	1.988	1.994	2.025	1.994	1.988	1.006

元件对链矩阵多项式系数的高灵敏度，是两种效应的结果。首先，多项式本身就是非常病态的[8]。一般说来，病态的多项式就是其零点对系数中的误差非常敏感的多项式。零点的几何排列及其对原点的关系，决定着病态的程度。这里链矩

阵多项式的病态，是由于根沿 j 轴分布的方式，如果零点趋向于集结在通带边缘的附近，情况就变得更坏*。在窄带带通滤波器中，由于通带两个边缘很接近，这种影响就进一步增大了。

其次，各多项式的零点需要交错排列，因为它们属于正实函数，而且有关元件值的信息主要存在于多项式零点间的距离。零点的微小移动，因而能在元件中引起大的变化。显然这种影响恰恰又增强了多项式的基本病态。

设计中导致精度损失的其它因数，就是多项式 $e(s)$ 和 $f(s)$ 的病态。这虽不和链矩阵中出现的多项式的那种病态一样厉害，但也足以使人们安排诸零点位置时应具有的精度（无论用什么方法）受到一定的限制，而这在链矩阵中又要引起小的误差。

克服病态的最简单方法，明显的一种就是在所有计算中都用多倍精度算法。不过，因为必要的位数很粗略地就等于滤波器的等级，这就导致多倍精度的浪费，对于大的滤波器并导致冗长的计算机时间。更有效而且成熟的是以下两种方法：

1．乘积法[9]。在这种方法中，所有多项式都按因子分解形式(或"乘积"形式)来存储和操作，因而 $P(s)=k\Pi_i(s-s_i)$。因此，信息是存储在零点中而不是系数中。这就改进了设计的条件，因为它消除了多项式的病态。不过，它对接近通带边缘的零点的密集无能为力，因而改善不了从这种来源的病态。

2．变换变量法[5]。这种方法用 z^2 的双线性表示式替换各处的 s^2，这里 z 就是已变换复频率。这种映射的选择，使在 z 平面中能把诸关键频率显著地分散开，因而使所有有关的多

---

* 甚至象 $P(s)=(s-1)(s-2)\cdots(s-19)(s-20)$ 这样一类表面上单纯的多项式，显示几乎不集结，如威尔金森(Wilkinson)[8]所指出的，也许就是非常病态的。

项式都变得具有很好的条件。结果是：梯形元件对 z 变量多项式系数的灵敏度，甚至比它们对 s 变量多项式零点的灵敏度还低。

两种方法的客观比较包含着几种考虑。乘积法在概念上简单，而且易于编程序*。可是，它在设计过程的每一个步骤都需要对因式型多项式的线性组合进行因式分解，因此甚至会导致比多倍精度算法更冗长的计算。以后将证明，变换变量法虽较难理解和编程序，但执行起来是很快的，而且对精确度的改进是优于乘积法。当然没有理由为什么不能把这两种方法结合起来，用 z（而不是 s）的因式型多项式来进行所有的计算。

利用双线性变换比其他任何数学形式优越，因为它是两个变量之间在正反两个变换方向上都具有一一对应关系的唯一简单函数，而且，对任何有理函数的变量作这种变换时，函数的阶次保持不变。这里变换必须用两个变量的平方来表示，以便它能同时对正频率和负频率中的病态进行校正。

能导致最佳准确度的 s^2 的双线性映射，对各种滤波器稍有不同。可是人们发现，在第二章有关等波纹通带逼近所描述的变换，就是有用的折中：

$$z^2=\frac{s^2+\omega_2^2}{s^2+\omega_1^2},\quad \mathrm{Re}(z)\geqslant 0,\ \text{对带通滤波器；}$$

$$z^2=1+\omega_2^2/s^2,\quad \mathrm{Re}(z)\geqslant 0,\ \text{对低通滤波器。}\qquad (3.37)$$

式中 ω_1 和 ω_2 分别是通带的下限和上限。利用这种变换，就使等波纹通带滤波器的设计特别容易。而且，因为它把两个通带界限变换到 z 平面中的零和无限大，可以指望它将各类滤波器的(在 s 平面中是围绕这两点紧密集结的)关键频率按近于最优

---

* 它多次使用同样的牛顿式子程序。

的方式分散开。事实上，这种分散在无数的应用中都已观察到了。

采用 z 变量法对病态的改进程度，可以用上面所给定的简单例子来说明。用 z 变量表示的，图 3-23 的七阶低通滤波器的短路入端阻抗为：

$$Z=\frac{6z^6+20z^4+6z^2}{\sqrt{z^2-1}(z^6+15z^4+15z^2+1)}.$$

式中假定了 $\omega_2=1$。

在分子中，如果把 z^4 的系数从 20 变到 20.2，增加 1%，这时的元件值变成如表 3-3 横行 3 中所给定的那些值。和横行 2 中的数字对照，这些值表明，它与横行 1 中原始值的偏离误差决不超过 1.25%。

由于从 s 到 z 的变换是用两个变量的平方表示的，在 s 和 z 间的关系式中含有平方根。因而，例如在低通情况下，象 $e(s)$之类的多项式（它能写成形式 $U(s^2)+sV(s^2)$，这里 U 和 V 为 s 的偶多项式）将变换成：

$$\frac{\overline{U}(z^2)+\sqrt{z^2-1}\,\overline{V}(z^2)}{(z^2-1)^{n/2}}，\text{对 } n \text{ 偶数}$$

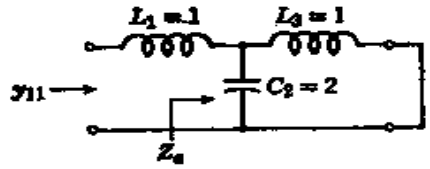
或

$$\frac{\sqrt{z^2-1}\,\overline{U}(z^2)+\overline{V}(z^2)}{\sqrt{z^2-1}(z^2-1)^{(n-1)/2}}，\text{对 } n \text{ 奇数。}$$

这里 $\overline{U}$ 和 $\overline{V}$ 为对应的 z 的偶多项式。根式因子 $\sqrt{z^2-1}$ 决不会完全消去，而且留为乘数来区别 s 变量多项式奇部和偶部的变换式。只在象 $e(s)\cdot e(-s)$ 这样一类的纯粹偶多项式中，根式才不存在。

表 3-4

公　　式	s 域 设 计	z 域 设 计
$K(s)$	$=s^3$	$=\dfrac{1}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}}$
$H(s)\cdot H(-s)=1+K(s)\cdot K(-s)$	$=1-s^6$ $=(1-s^2)(1+s^2+s^4)$	$=1-\dfrac{1}{(z^2-1)^3}$ $=\dfrac{z^6-3z^4+3z^2-2}{(z^2-1)^3}$ $=\dfrac{(z^2-2)(z^4-z^2+1)}{(z^2-1)^3}$
$H(s)$[$H(s)\cdot H(-s)$的赫维茨因子]	$=(1+s)(1+s+s^2)$ $=1+2s+2s^2+s^3$	$=\dfrac{(\sqrt{z^2-1}+1)\ (z^2+\sqrt{z^2-1})}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}}$ $=\dfrac{2z^2-1+(z^2-1)\sqrt{z^2-1}}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}}$
$R_1=R_2=1$，因此 $T=\begin{bmatrix}H_e+K_e & H_0+K_0\\ H_0-K_0 & H_e-K_e\end{bmatrix}$	$=\begin{bmatrix}1+2s^2 & 2s+2s^2\\ 2s & 1+2s^2\end{bmatrix}$	$=\dfrac{1}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}}$ $\begin{bmatrix}(z^2+1)\sqrt{z^2-1} & 2z^2\\ 2z^2-2 & (z^2+1)\sqrt{z^2-1}\end{bmatrix}$
$\dfrac{1}{y_{11}}=\dfrac{B}{D}$	$=\dfrac{2s+2s^3}{1+2s^2}$	$=\dfrac{2z^2}{(z^2+1)\sqrt{z^2-1}}$
$L_1=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{1}{sy_{11}}$	$=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{2+2s^2}{1+2s^2}=1$	$=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{2z^2}{z^2+1}=1$
$Z_a=\dfrac{1}{y_{11}}-1\cdot s$	$=\dfrac{2s+2s^3}{1+2s^2}-1\cdot s$ $=\dfrac{s}{1+2s^2}$	$=\dfrac{2z^2}{(z^2+1)\sqrt{z^2-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}=\dfrac{\sqrt{z^2-1}}{z^2+1}$
$\dfrac{1}{Z_a}$	$=\dfrac{1+2s^2}{s}=2s+\dfrac{1}{s}$ $=C_2s+\dfrac{1}{L_2s}$	$=\dfrac{z^2+1}{\sqrt{z^2-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{z^2-1}}+\sqrt{z^2-1}$ $=\dfrac{C_2}{\sqrt{z^2-1}}+\dfrac{\sqrt{z^2-1}}{L_2}$



在以 z 变量进行设计时，必须在一开始就把从 s 到 z 的改变作好，而且重要的是，在任何中间阶段都不用 s 变量表示式甚至其隐式也不行。在整个 z 变量设计中，最大的麻烦事就是，在多项式相乘的时候，需要用恰当的方式来处理根式乘数。对此漫不经心，就可能很容易破坏准确度。

稍稍注意，人们就能在 z 域中重建 s 域设计过程中（包括梯形展开）的所有步骤。有几个地方可能有不同的几种处理途径，而且对准确度有利的正确途径的选择不总是明显的。不可能在这里讨论这些细节，有关详细情形读者可查阅文献[5]。

为了说明这种方法的一般概念，表 3-4 给出了在三阶巴特沃思低通滤波器情况下 s 域和 z 域中的一一对应步骤，以资比较。这里，$\omega_2=1$，所以 $s=(z^2-1)^{-1/2}$。我们希望，这个表完全是不解自明的。

习　题

3.1 导出 ρ_1 和 ρ_2 的 (3.14) 式。(提示：利用 (3.2) 和 (3.3) 之后的关系。)

3.2 试证明：梯形只在串臂阻抗或并臂导纳的极点才能有衰减极点。(提示：参考图 3-4。在衰减极点处，$V_2=0$，因而 $I_n=0$。如 $Z_n<\infty$，所以 $V_{n-1}=0$。如果 $Y_{n-1}<\infty$，因而 $I_{n-1}=0$。按这反方向作下去，直至得到 $E=0$，即与前提矛盾。)

3.3 试证明，如果 $K(s)$为偶函数，那么链矩阵的元件满足 $B=CR_1R_2$，从而 $\rho_1(s)=-\rho_2(s)$和 $Z_1/R_1=R_2/Z_2$。这样的网络叫做反对称的。互换端对，并由其对偶代换反对称电路的影响是什么？(提示：首先证明对偶电路的$(z_{ij})_a=R_1R_2(y_{ij})_b$。)

3.4 试证明图 3-6 (b) 和 (c) 电路的入端阻抗，分别为 $2(z_{11}-z_{12})$ 和 $2(z_{11}+z_{12})$。

（提示：在端对连接 1 安电流源，并计算输入端的所得电压。）

3.5 试证明图 3-7 的两端对网络，在电气上等效于图 3-5 所示的对称格形。

3.6 试证明：图 3-10 的网络等效。

（提示：用 $Y-\triangle$ 变换，并利用 $k=1$ 的事实。）

3.7 试证明换能器函数可由阻抗参数按照下式计算：

$$H(s)=\frac{z_{11}R_2+z_{22}R_1+z_{11}z_{22}-z_{12}^2+R_1R_2}{2\sqrt{R_1R_2}\cdot z_{12}}.$$

（提示：利用(3.3)和(3.4)。）

3.8 试由阻抗参数

$$z_{11}=\frac{2s^2+5}{2s},\quad z_{22}=\frac{16s^2+6}{s}$$

实现图 3-14 的电路。衰减极点在 0、$\pm j/\sqrt{2}$ 和∞。假定 $R_1=R_2=1\ \Omega$。

3.9 试证明图 3-15 (b)电路的(3.21)式。

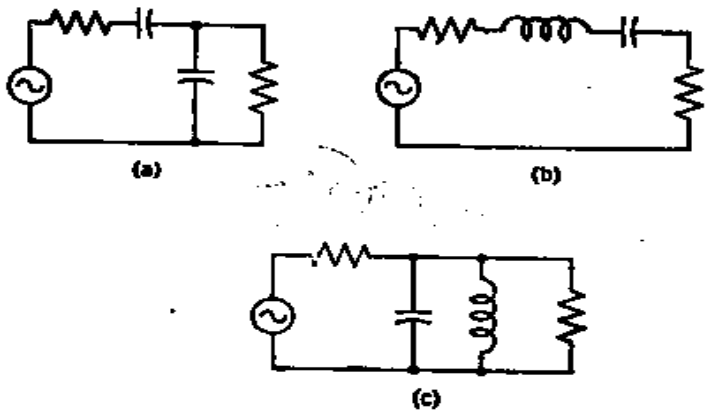
3.10 试说明：对于图 3-16 (a)的电路，$Z_1=sU/V$、$Z_2=s\overline{U}/\overline{V}$、$U=L_1V+(s^2/\omega_2^2+1)\overline{U}$、$V=C_2s^2\overline{U}+(s^2/\omega_2^2+1)\overline{V}$ 这一组公式，和 $Z_1=U/sV$、$Z_2=\overline{U}/s\overline{V}$、$U=L_1s^2V+(s^2/\omega_2^2+1)\overline{U}$、$V=C_2\overline{U}+(s^2/\omega_2^2+1)\overline{V}$。这一组公式都适用。

3.11 试导出图 3-17 所示电路的设计关系式。试证明：它们跟对图3-15 (a)和 3.16 (a)电路有效的关系式，是属于同一数学形式。

3.12 试由(3.22)证明(3.23)。

（提示：搭配 s^0、s^2、s^4、$\cdots$、s^{2n} 的系数，并按克拉默 (Cramer)规则求解所得方程，如课文中对较简单情况（$y=1$ 时）所描述的那样。）

3.13 通过比较图中所示基本滤波器的关键频率的位置，试说明参量滤波器的限制。



基本的带通滤波器

3.14 画出具有下列条件的简单带通滤波器，

(a) 一个衰减极点在零频率和三个衰减极点在无限大频率；

(b) 三个衰减极点在零频率，和一个衰减极点在无限大频率。

试证明两者都不需要有实数反射零点。

3.15 试由 $K(s)=s^n$ 进行对称格形网络的设计：

(a) 由(3.31)，把 Z_a 和 Z_b 中所有可能的公因数都约去；

(b) 利用 3.4 节的设计步骤 1 至 3。

由 K 设计梯形和"半格形"电路(图 3-7)。试在三种电路中比较元件的数目。

3.16 试考虑具有零点 $s_1=j\,0.9999$ 和 $s_2=j\,1.0001$ 的多项式，以说明窄带零点集结的影响。

(a) 计算多项式的系数；

(b) 证明通过只保留各系数的七位数，再对所得截尾多项式作因式分解，结果会得出错误零点 $s_1=s_2=j\,1$。

参 考 文 献*

[1] H. W. Bode, "A general theory of electric wave filters," *J. Math. Phys.*, 13, 275—362 (1934).

[2] H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, D. Van Nostrand, New York, 1945, Chapter X.

[3] N. Balabanian, *Network Synthesis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1958.

[4] E. A. Guillemin, *Synthesis of Passive Networks*, John Wiley, New York, 1957, Section 7.4.

[5] H. J. Orchard and G. C. Temes, "Filter design using transformed variables," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-15, No. 4, 385—408 (Dec., 1968).

[6] R. Saal and E. Ulbrich, "On the design of filters by synthesis," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-5, No. 4, 284—327 (Dec., 1958).

[7] H. Watanabe, "Approximation theory for filter-networks," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-8, No. 3, 341—356 (Sept., 1961).

[8] J. H. Wilkinson, *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

[9] J. K. Skwirzynski, "On synthesis of filters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, No. 1, 152—163 (Jan., 1971).

---

* 这里我们没有包括达林顿的经典论文 (J. Math. Phys., 18, 257—353 (1939)),本章所讨论的许多材料，已在其中首次发表。由于达林顿论文简要，使本书的一般读者难于阅读。

4 晶体和陶瓷滤波器

乔治·森特尔迈(George Szentirmai)
康乃尔大学
伊萨卡(Ithaca),纽约州

把压电晶体用在滤波器中，是因为它们有非常稳定的谐振频率和很小的损耗。如果在滤波器的带宽或从通带到阻带的过渡范围都很窄的情况下，这些特性就成为主要的了。

从另一方面来说，压电谐振器的等效电路至少包含有三个相互间具有某些关系的元件。设计具有这类元件的滤波器的困难，主要是在一般不受限制的滤波器结构中怎样容纳这种受有限制的元件组合问题。

在滤波器设计者中间，早期的影象参数设计法，在晶体滤波器设计中的应用，比在纯电气滤波器设计中持续了长得多的时间，就是因为人们用这种理论可更加直接地控制电路结构。而且，也可把由晶体等效电路元件值间的关系所引起的限制较易于转变成对可实现性能的限制。

然而，最近十年来插入衰减法大有进展。今天，我们已经取得了用这种现代方法来设计晶体滤波器的技术和方法的大量手段。

今后本章将只考虑插入衰减法；关于早期的、现仍沿用的

影象参数法，读者应查阅文献[1—5]。

4.1 压电晶体及其等效电路

我们自然不能在这里详细考虑压电（和陶瓷）谐振器的理论。只要讲清楚这是一些三维的机械振荡体就够了。它们通常有很多振荡模式，而且可以在每种模式的基频和许多高次谐频下产生振荡。这些振荡是由电极与晶体本身的安排和形状通过材料的压电特性而激发的。人们已经有了选择某些振荡模式和谐波而胜过其他的能力。

在接线端看入的等效电路，将含有无数（带耗的）串联谐振电路相并联（图 4-1），每一个串联谐振电路代表一特定模式的特定谐波。注意即使是属于同一模式的一些谐振频率，也不一定成谐波关系。电容 C_0 表示电极装置的静电容。

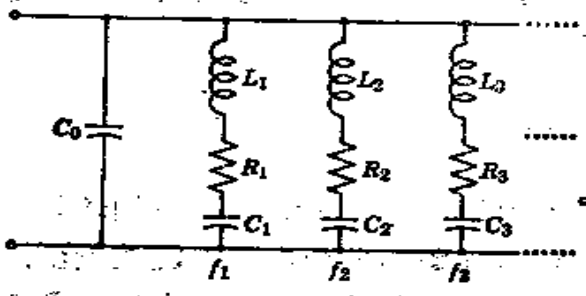


图 4-1 压电谐振器的等效电路

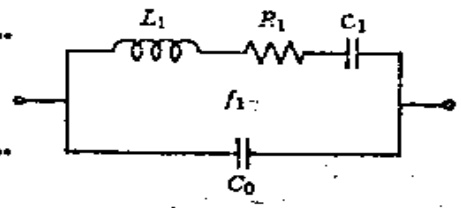


图 4-2 简化等效电路

如果我们希望晶体工作于其谐振频率之一，例如说 f_1 的附近（f_1 不一定是晶体的最低可能谐振频率），那么我们可以忽略所有其他支路、而利用图 4-2 的简化等效电路。然而，我们必须牢记，这只能是在 f_1 附近的一段窄频带内才是有效的，至于频带到底是多么窄，这要取决于许多因素。这个事实

在甚窄带带通滤波器的设计与结构中不会引起多少困难；但在其他类型滤波器的设计中，却使情况复杂化了。我们将在本章的较后部分再考虑这个问题。

现在来考虑图 4-2 的简化等效电路。串联谐振电路有非常高的Q值，对天然石英来说，无论如何总在 10,000 到百万以上的范围内。陶瓷谐振器的Q值约为几千的数量级。因此，在正常情况下，串联电阻 R_1 可以忽略不计。电容比

$$r=\frac{C_0}{C_1} \tag{4.1}$$

取决于机电耦合和所用谐振波的次数。对于石英晶体的基本谐振，这个比可能得到的最小值约为 125；陶瓷材料的稍低；而对新近发现的某些材料来说，可能降低到 20 至 30。当然，用一附加并联电容跨接到晶体的两端，总是可以把它增大的。

今后，我们将假定把压电晶体用如图 4-2 形式的等效电路来表示，其中 $R_1=0$，而电容比

$$r=\frac{C_0}{C_1}\geqslant r_{\min}, \tag{4.2}$$

式中的 $r_{\min}$ 是我们在设计开始时给定的一个参数。我们还要注意：不可能在制造过程中把等效电路的各个电气参数控制到比百分之几的容差还好，但却能控制谐振频率 f_1。所以通常是用(f_1、L_1 和 C_0)一组的三个参数而不是(L_1、C_1 和C_0)来表示一晶体。

最后，我们要注意：对最常用的石英晶体谐振器来说，其等效电路的总阻抗水平是偏高的。一般说来，L_1 的数量级为几亨。因此，晶体必须用于高阻抗电路；或另有一法，就是用变量器把阻抗降低到可容许值。

4.2 基窄带梯形滤波器

容纳晶体等效电路于带通滤波器的最简单方法，是去寻求已经含有一些适当形式支路的滤波器电路结构。

因为梯形结构有很好的灵敏度特性，是最常用的结构。所以人们总是首先指望求得不是含有纯电容性支路、就是含有可由晶体或晶体与电容器组合实现的支路的梯形结构。这样一种结构如图 4-3 所示，并可由第 3 章所述插入衰减设计法来求

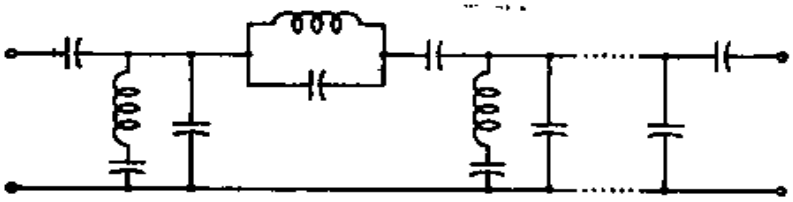


图 4-3 可实现的晶体电容器梯形滤波器

得。这种滤波器必然是在零频和在无限大频率都具有单个传输零点的对称参量型。含有电感性元件的那些支路，或已为正确形式，或可用基本变换使转换成这样的正确形式。这样的转换，不外乎采用以下两种变换：（电容性）阻抗变换(图 4-4)以及图 4-5 的等效。这种方法最好用一些简单例子来加以说明。

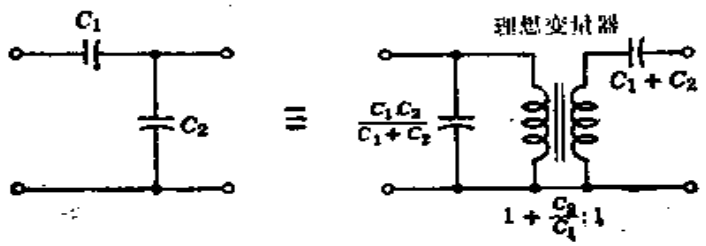
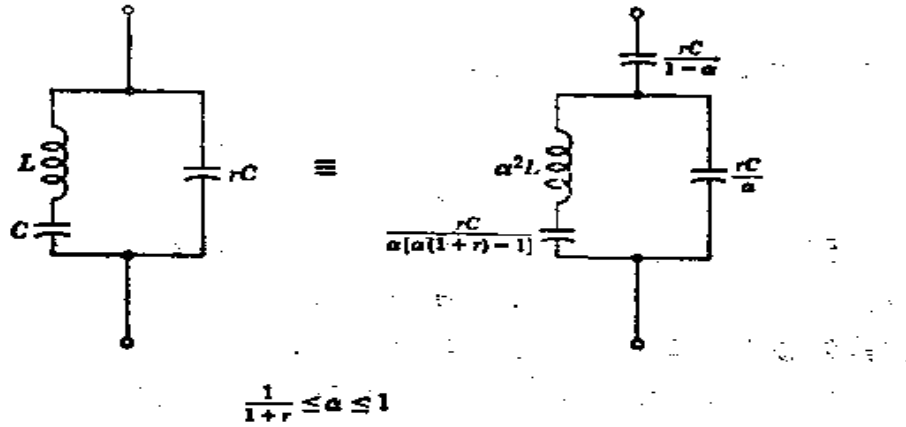


图 4-4 阻抗(诺顿)变换



$$\frac{1}{1+r} \leq \alpha \leq 1$$

图 4-5 二端等效

例 4.1 试设计一通带为 800 KHz至 800.4 KHz的带通滤波器。通带性能要求为具有 0.25 dB 波纹的等波纹式。在 799.75 KHz 以下和 800.65 KHz 以上的阻带衰减最小要有 50 dB。

解：规定的响应可以用分别在通带以下的两个有限传输零点

$$f_{10}=799.06\ \text{KHz}$$

$$f_{20}=799.71\ \text{KHz}$$

和通带以上的两个有限传输零点

$$f_{30}=800.69\ \text{KHz}$$

$$f_{40}=801.34\ \text{KHz}$$

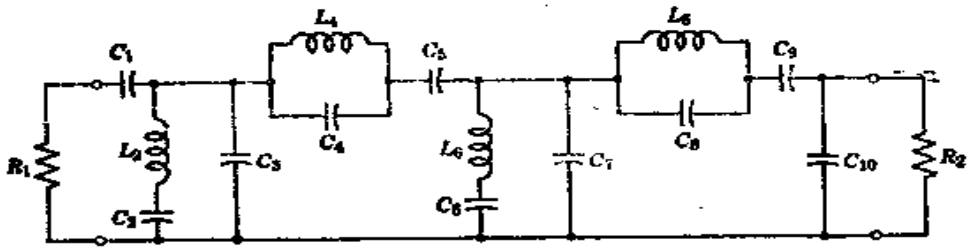
来达到。在实现中，传输零点的次序对元件值的分配稍有影响；在四种可能的交替*次序中最好的一种次序是 f_{20}、f_{40}、f_{10}、

---

* 即下阻带中的一个传输零点后面跟着有一个在上阻带中的传输零点，反之亦然。这是较可取的安排，因为它导致较好(较大)的电容比和较小的初始元件值范围。

f_{30}，这样导致如图 4-6 所示的电路结构和元件值。

这里第一步要核对电容比。这些已示于图上，此时它们是上限，因为阻抗变换需要一些电容，从而使最后的 r 值将小于所示数值。附带说明一下，如果把串臂变换成等效的并联福斯特(Foster)形式，则其电容比的计算可得到简化。对图 4-5 等效的快速核对，表明图 4-6 所用公式的正确性。



$R_1 =$	1000 欧	$C_9 =$	93.91 pF
$R_2 =$	1098 欧	$C_{10} =$	92.22 pF
$C_1 =$	390.7 pF	$L_2 =$	74.40 mH (f_{20})
$C_2 =$	.5323 pF	$r_2 = C_3/C_2 = 720.7$	
$C_3 =$	383.7 pF	$L_4 =$	5.241 μH (f_{40})
$C_4 =$	7526 pF	$r_4 = C_4/C_5 = 349.6$	
$C_5 =$	21.53 pF	$L_6 =$	8.287 mH (f_{10})
$C_6 =$	4.787 pF	$r_6 = C_7/C_6 = 349.6$	
$C_7 =$	1674 pF	$L_8 =$	.5838 μH (f_{30})
$C_8 =$	67680 pF	$r_8 = C_8/C_9 = 720.7$	

图 4-6　例 4·1 的梯形滤波器

电容比的数值表明，在只利用晶体和电容器来实现这种结构方面，困难不大。但是，在这样做以前，我们必须修正结构，以适应现有等效晶体元件值的狭窄范围。运算程序和最后结果都远不是唯一的，一种可能的解法示于图 4-7 中。

首先，把 C_5 分成 C_5' 和 C_5''，这里 $C_5'' = C_4/200$。其次是把 L_4、C_4 和 C_5'' 支路变换成 $r = 200$ 的晶体等效电路。这时会出现 L_4'成为 209.6 mH，比 L_2 大得多。所以要利用部分 C_3 和

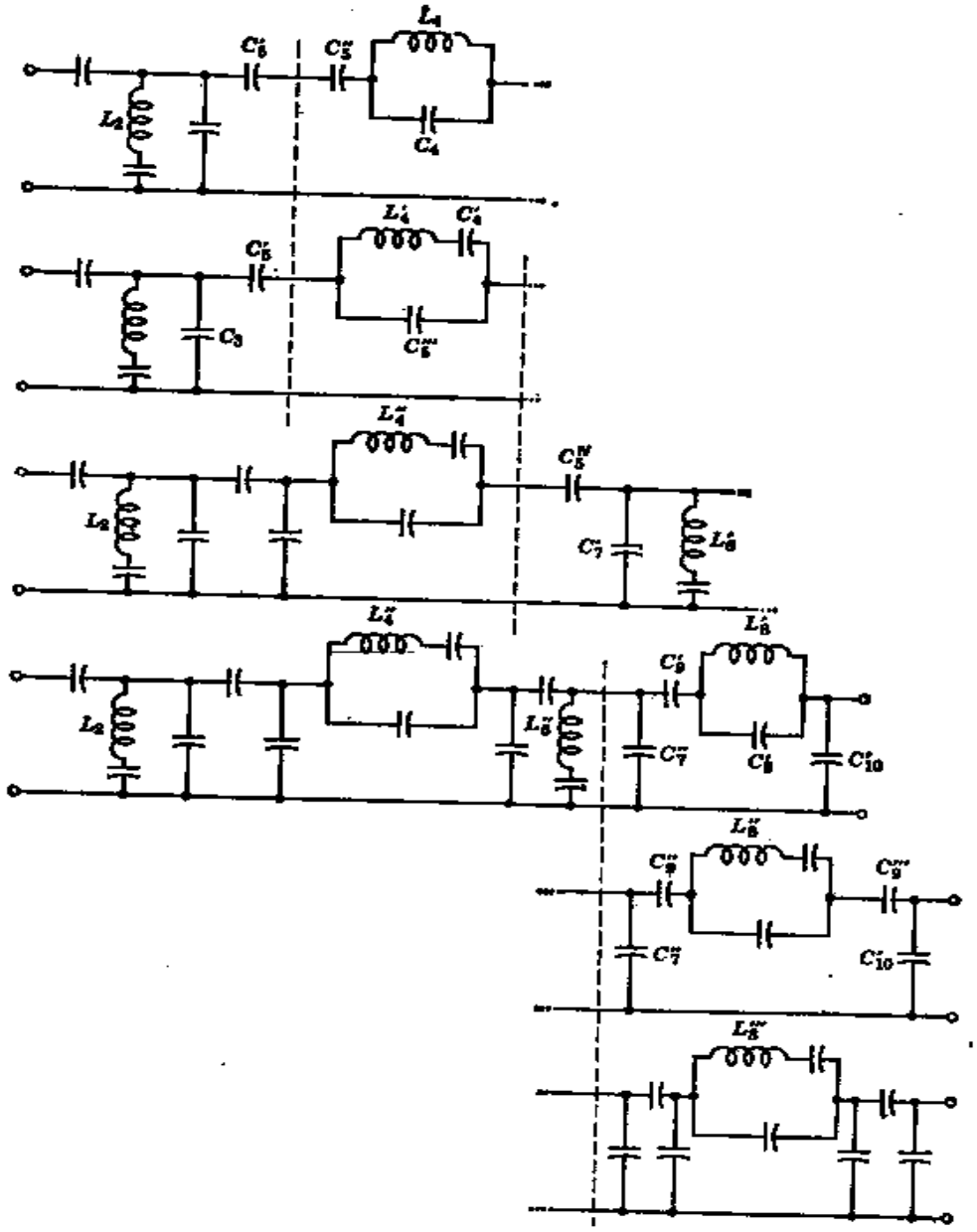


图 4-7　为采用晶体而对图 4-6 所示梯形网络的修正

C'_5 来降低它们右边所有元件的阻抗水平，直至 $L''_4 = L_2$。但这样一来，L'_6 变为 2.941 mH，又太低了。因此要用 C'^{IV}_5 和部分 C'_7 来使 L'_6、C'_8 支路及其右边所有元件的阻抗水平都得以提高，直至 L''_6 变为等于 L_2。

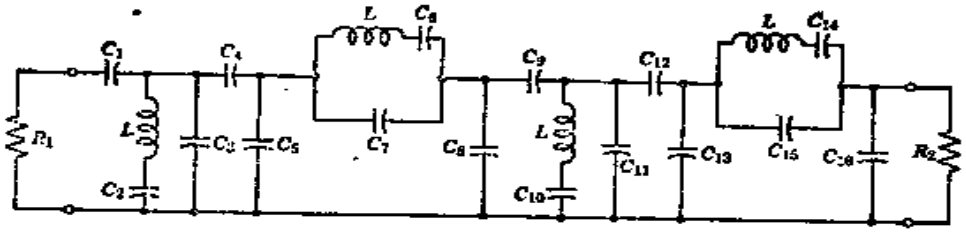
这时，或多或少是任意地把 C'_9 分成三部分。利用其一部分跟 L'_8、C'_8 一起来变换成所需并联福斯特形式。结果将出现过大的 L''_8 值。现用部分 C''_7 和 C''_9 来降低这个支路的阻抗水平，直至 L'''_8 也变为等于 L_2。最后利用 C'''_9 和 C'_{10} 来把出端阻抗水平恢复到 1000 欧。

如果把 C'_9 仅仅分成两部分，则末尾两个电容器可以取消，但只在这样一种独特情况下，这时在并联福斯特形电路变换完成之后，使 L'''_8 等于 L_2 的阻抗变换将同时得到正确的出端阻抗水平。

这样一种变换过程中的计算，虽然是初等的，但却要消耗不少时间，而且易于出错和遗漏。然而，靠数字计算机，用迭代的方式，就可以比较容易地办到。至少已有一种这样的程序[6]。

本例中最后所得网络和所有元件值示于图 4-8 中。注意最后的电容比，都小于原始结构中的电容比，但它们还是很合适的。最后，用 10 左右的因数把阻抗定标，将使元件值纳入可只用晶体和电容器来实现的范围。计算出的性能如图 4-9 所示。

现在有几点解释是必要的。如上所述，传输零点的次序会影响元件值，但最坏（最小）的电容比变动不大。按照上面选定的次序，它最小的初始电容比为 $r = 349.6$。这样，它在四种可能的次序中，是最好的。可是，最坏的次序导致的初始电容比为 $r = 306.2$，也并不太坏。虽然在这一情况下这个差异没有



R_1 = 1000 欧		C_7 = 105.5	pF
R_2 = 1000 欧		C_8 = 80.61	pF
L = 74.40 mH		C_9 = 20.00	pF
C_1 = 390.7	pF	C_{10} = .5332	pF
C_2 = .5323	pF	C_{11} = 123.9	pF
C_3 = 315.4	pF	C_{12} = 68.28	pF
C_4 = 168.9	pF	C_{13} = 146.1	pF
C_5 = 114.6	pF	C_{14} = .5296	pF
C_6 = .5275	pF	C_{15} = 198.1	pF
		C_{16} = 101.3	pF

图 4-8　例 4.1 的滤波器的最后结构

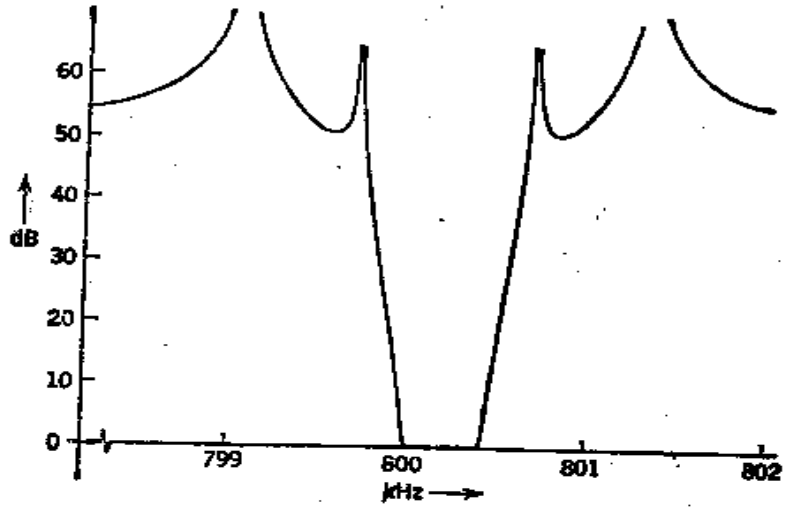


图 4-9　计算出的图 4-8 所示滤波器的衰减特性

多大意义，但在某些情况中却可能是重要的。
如果能在综合之前就推测出最小电容比的数值，那当然是极有用的。尽管目前还没有能作到这一点的严密方法，不过，且让我们暂时注意一下以下的事实。如果用 f_0 表示频带的中心频率，f_{max} 为离频带中心最远的传输零点，则在我们这个例子里，可得，

$$\frac{1}{2}\frac{f_0}{f_0-f_{max}}=351.0 \qquad (4.3)$$

这个量非常接近上面给定的最佳次序的最小电容比（$r=349.6$）。还应注意到，我们的确不需要通过几个完整的综合过程去计算它。

在上面所考虑的例子中，两个阻带内有着相同数目的传输零点。现在让我们来看看另一个极端的例子，其中所有传输零点都在一个阻带内。

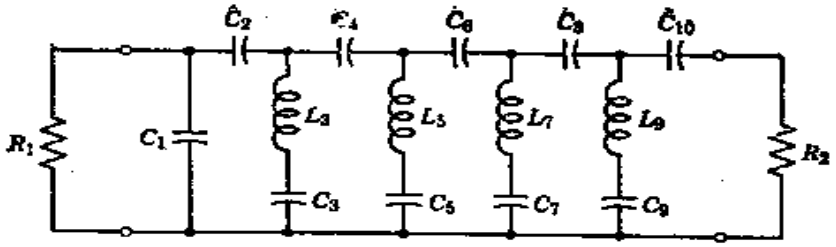
例 4.2 假定通带和上例相同，而且在下阻带中从零到 799.93 kHz 的范围内最小需要有 50 dB 的衰减以资鉴别。但在上阻带中没有什么要求。

解：这些要求可由下列频率下的四个传输零点来满足：

$$f_{10}=794.795\ \text{kHz}$$
$$f_{20}=799.498\ \text{kHz}$$
$$f_{30}=799.849\ \text{kHz}$$
$$f_{40}=799.921\ \text{kHz}$$

把实现这些特性的滤波器综合出来，并示于图 4-10 中。零点的实现次序是：$f_{20}, f_{30}, f_{40}, f_{10}$。

眼下我们不要被这样一些元件值所吓倒。它们只不过是表明需要实行几步阻抗变换罢了。但是，如果我们希望用晶体来实现滤波器，则无论如何也要把电容 C_1 分配到跨接于并臂谐振



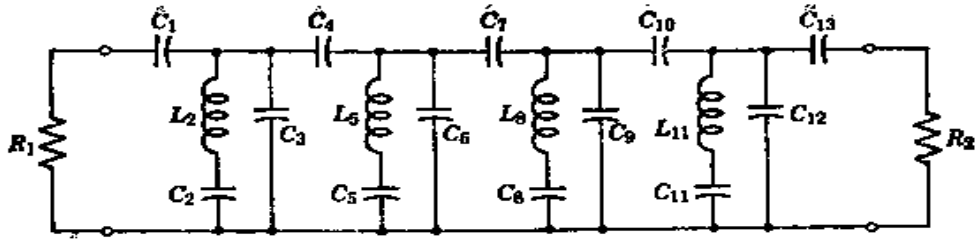
$R_1 = 1000$ 欧		$C_7 =$	.0007355 pF
$R_2 = 116.0$ 兆欧		$C_8 =$	.03241 pF
$C_1 = 198.8$	pF	$C_9 =$	.0004466 pF
$C_2 = 110.9$	pF	$C_{10} =$	.002437 pF
$C_3 =$ .1417	pF	$L_3 =$	.2796 H (f_{20})
$C_4 =$ 9.182	pF	$L_5 =$	6.263 H (f_{30})
$C_5 =$ .006322	pF	$L_7 =$	53.82 H (f_{40})
$C_6 =$ 1.997	pF	$L_9 =$	89.79 H (f_{10})

图 4-10 例 4.2 的梯形滤波器

支路上。

其计算很简单。如果我们还企图使所有的电感器都相等，则所得结构如图 4-11 所示。

我们注意到：如果希望有 $R_2=R_1$，就不能使末尾一个电感器和其他电感器相等。但即使我们容许 $R_2>R_1$，由于 $C_9>0$，也不能使末尾一个电感器和其他电感器相等。第二点、而且是更为重要的一点是，末尾并臂支路的电容比只有 64.3，这是不适当的。其结果势将导致不能把这个电容比增大至约 71 以上，而且还要以另一电容比减小到零作为代价。人们眼下自然就会研究是不是有另外的零点次序可以作得更好些。共有十二种可能的不同零点次序安排，如要进行彻底研究，显然得花相当代价，而且会消耗大量时间。为了要使事情简化，人们在实际实行任何阻抗变换之前，总很想能先讨论一下有关最大可用电容比方面的问题，正如我们在第一个例子中已经作过的那样。这一点确实是可以在图 4-12 的基础上作到的。研究一下



$R_1 = R_2 = 1000$ 欧

$L_2 = L_5 = L_8 = 35.85$ mH

$L_{11} = 7742$ mH

$C_1 =$	309.7 pF	$C_8 =$	1.104 pF
$C_2 =$	1.105 pF	$C_9 =$	1596 pF
$C_3 =$	289.6 pF	$C_{10} =$	427.6 pF
$C_4 =$	337.3 pF	$C_{11} =$	51.79 pF
$C_5 =$	1.104 pF	$C_{12} =$	3331 pF
$C_6 =$	589.7 pF	$C_{13} =$	210.2 pF
$C_7 =$	1022 pF		

图 4-11　图 4-10 所示梯形网络的修正

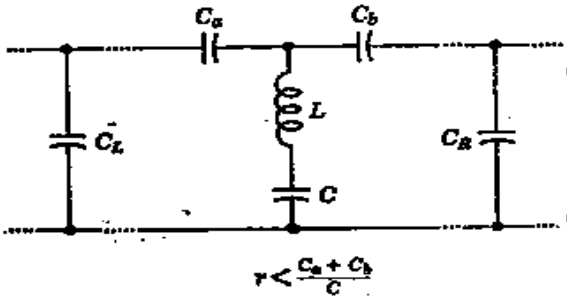


图 4-12　并联的串联谐振臂的最大可用电容比

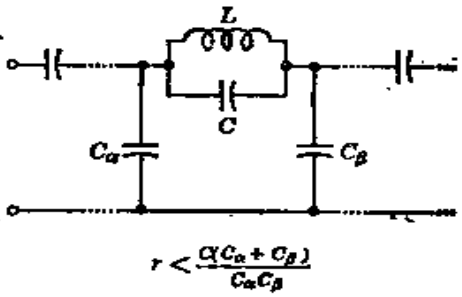


图 4-13　串联的并联谐振臂的最大可用电容比

这一个无直接跨接并联电容的特定谐振并臂支路 L-C，假定有一接地电容器 C_L 在其左边某处。如果我们准备把这个电容器用一次或多次的阻抗变换从远处移至此并臂支路，则结果所得跨接在此 L-C 支路的电容器总不能大于 C_α。因此，可以达到的电容比的有用上限可写成：

$$r<\frac{C_a}{C} \tag{4.4}$$

如果在 L-C 支路的右边还有另一接地电容器，则可与此支路并联的最大总并联电容必须小于 C_a+C_b，于是又有

$$r<\frac{C_a+C_b}{C} \tag{4.5}$$

对如图 4-13 所示对偶结构也可得出类似的关系。

在这个基础上，人们能够研究所有十二种可能的零点次序，而结论是：最低电容比必须小于 r_{max}，这里 r_{max}的范围为 71.6 至 75.2 为止。换句话说，所选零点次序对该结构的可实现性也几乎没有什么影响。这个结论是以进行十二种不同的综合为代价而获得的。可是，在这过程中，我们注意到：这个倒霉的谐振支路总是那个在离通带最远的传输零点上谐振的支路。再计算其倒置的相对距离，我们得到：

$$\frac{1}{2}\frac{f_0}{f_0-f_{max}}=74.0 \tag{4.6}$$

因此，这个量看来是对具体滤波器最低电容比的最大值的一个极好的经验指标。它可在设计中及早加以细致的计算，从而可以防止对可实现结构的一些不必要的和无效果的探索。

以上的量表面上与带宽无关，但带宽仍隐含其中，因为显然 f_0-f_{max}必须大于绝对带宽的一半。

上述两个例子代表通常可用结构的两种极端情况。但一般情况显然也可按所述路线处理，并不需要更多一点的经验和思考。

总之，通过这两个例子，我们已经阐明，怎样去把一个梯形对称参量滤波器加以修正，直至能只用晶体和电容器来实现（但仍为梯形）。在这个过程中，我们已找到了一条简单的经验

规则，来帮助我们事先决定该过程有无成功的希望。这个方法显然限用于很窄的带宽（0.1%及以下）。

4.3 格形-梯形混合式窄带滤波器

熟悉影象参数晶体滤波器的读者，会立即推荐用格形节来解决前节中所碰到的问题。这确是合理的，因为格形实现一般都比等效梯形具有较高的电容比。其理由是，格形支路往往是由两个或多个梯形支路的组合来得到，这个过程肯定会导致并联电容值的相对增大。现在我们有两种选择，一是用单一的格形网络来实现整个滤波器(如果是对称的)，或是用较简单的格形来实现其某些部分并把它们（可能和一些梯形部分一道）级联起来。

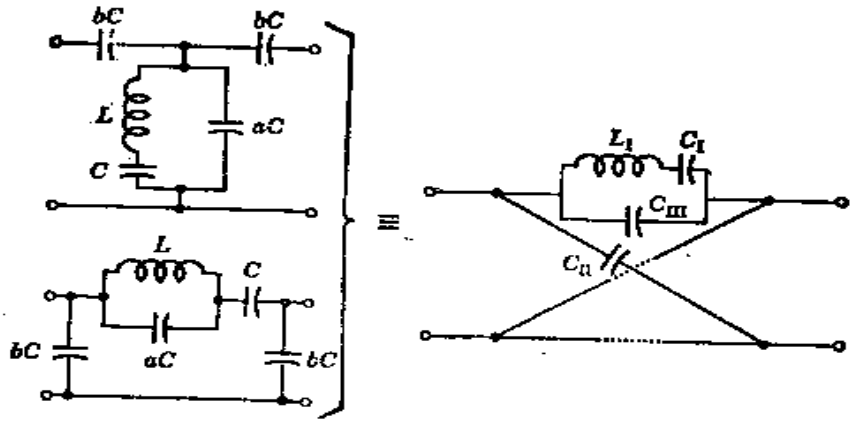
由于实际的原因，采用单一复杂格形网络的第一种选择是行不通的，因为这会得出极为灵敏的网络。举例来说，60 dB的阻带抑制将要求在格形的两个不同支路间有 0.2% 或更好的平衡，这显然是一个困难的课题*。

因此，如果不是小滤波器，正确的方法应该是用等效格形节来代换梯形的某些选定部分。为了要使格形支路也可用晶体和电容器来实现，可通过图 4-14 的等效变换来作到这一点(在此等效变换中，我们已忽略格形两个臂阻抗的可能互换，因这实际上是无关紧要的)。

为了说明这种等效的应用，让我们取出图 4-11 所示梯形网络的末尾三个支路，并把它画成如图 4-15 所示形式，其中

---

* 格形结构由平衡电桥原理提供衰减(与梯形的衰减起因于很大的串臂阻抗或很小的并臂阻抗不同)；因此，高衰减需要调节和维持准确的平衡。



T-节		Π-节
$\frac{(a+2b)^2}{2b^2}L$	$=L_I=$	$\frac{(1+a)^2}{2}L$
$\frac{2b^2}{(a+2b)(1+a+2b)}C$	$=C_I=$	$\frac{2}{(1+a)}C$
$\frac{ab}{a+2b}C$	$=C_{III}=$	$\left(b+\frac{2a}{1+a}\right)C$
bC	$=C_{II}=$	bC

图 4-14　单峰梯形节的格形等效

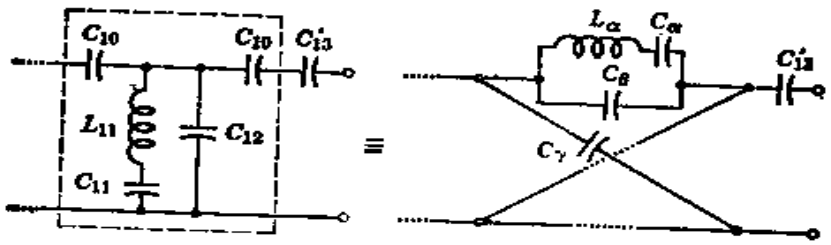


图 4-15　图 4-11 所示梯形末节变换成格形

$$C'_{13}=\frac{C_{10}C_{13}}{C_{10}-C_{13}} \tag{4.7}$$

现在把虚线方框内的对称 T 型节用其等效格形来替换，给出结

构及元件值如同图所示。显然电容比已大有改进，而且现在整个结构可仅由晶体和电容器来实现。

接下来要问是否更复杂的梯形结构也可由等效格形来替换。这个问题可由图 4-16 的等效变换[7]作出回答。已经为等效格形参数的计算提出了几种方法，但它们全都是比较复杂的，关于其详细的表达*，读者可查阅参考文献[8]。另外一些方法[9、10]是逐步求解形式的，很便于理解，它们对于人工计算来说可能是较好的。也已经证明[7]，一般说来我们不能再进一步了。就是说，更复杂的梯形，通常不能用对称晶体电容器组成的格形结构（也许还有理想变量器）来替换。

作为一个例子，让我们来考查图 4-6 所示滤波器，并设法把它实现为两个格形级联的结构，可能中间还有几个电容器。

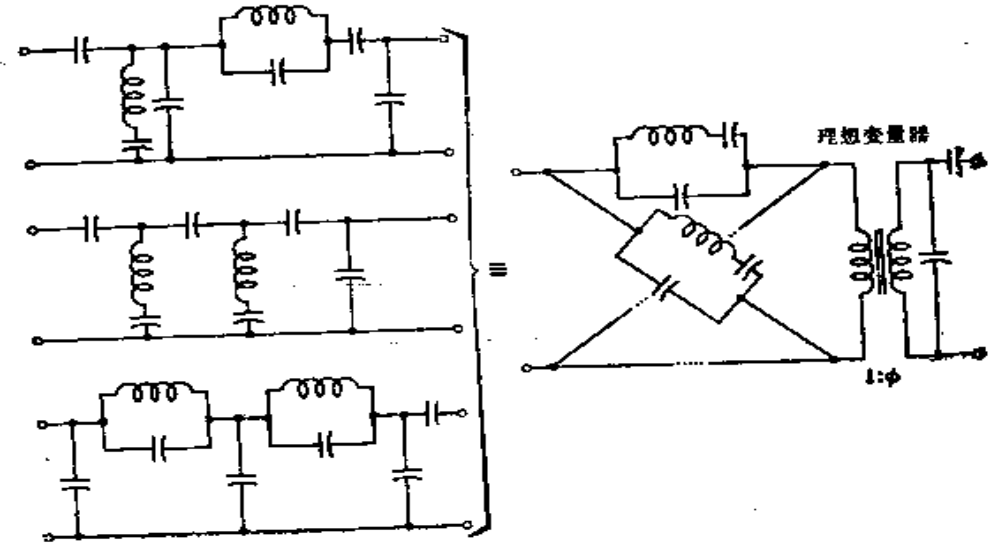
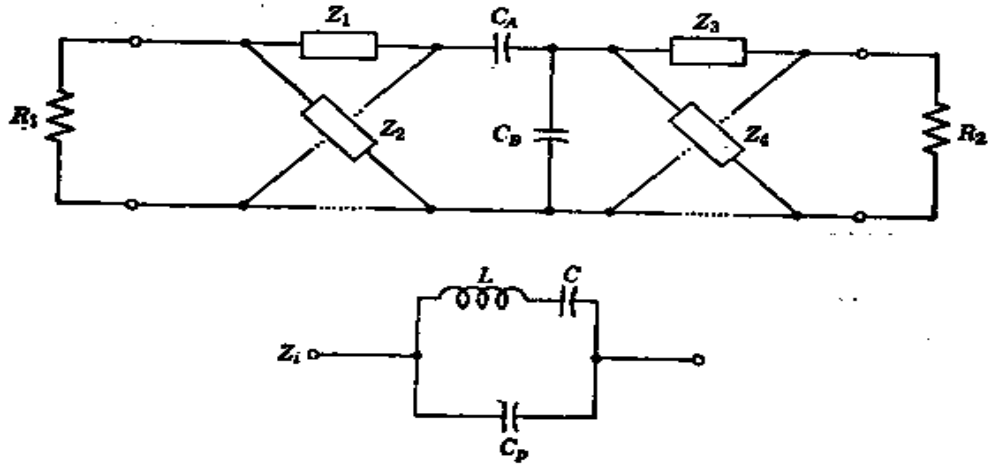


图 4-16　双峰梯形节的格形等效

* 宾汉姆(Bingham) 的诸表达式已由本书作者编了程序，并可提供其 FORTRAN IV 程序清单。

图 4-17 表示在所有理想变量器都已被消去、而且所有可能的电容都已被吸收进格形之后所得到的结构。浏览一下元件值就可看出，最坏的电容比是显著地增加了。晶体电感也有增进（增加），虽然现在还不能做到使它们完全相等，而且不用变量器时两终端也不能相等。人们自然会问：是否另有别的最好次序也可能导致更好的元件值分配？虽然这是可能的，但它需要两个滤波器的相当完整的设计。在实行这些设计之后，我们的确找到了一种在其元件值分配方面稍好一点的方案。电路结构及元件值示于图 4-18 中。目前我们还没有一种先验的方法，去确定采用那一种次序才会导致"最佳"的设计。

现在让我们来考虑梯形和格形混合结构的实际实现问题。

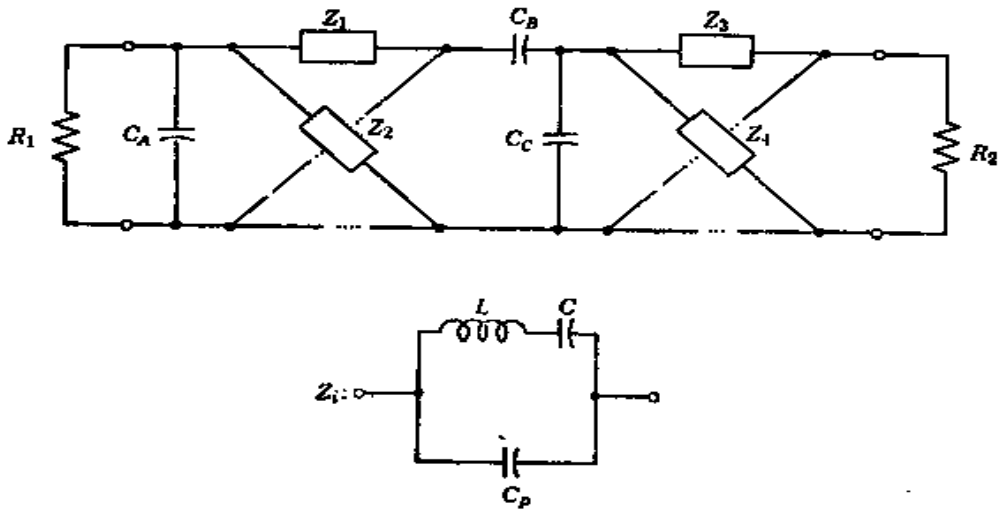


$R_1 = 1000$ 欧　　$C_A = 987.31$ pF

$R_2 = 1393.1$ 欧　　$C_B = 29.992$ pF

i	L (mH)	C (pF)	C_p (pF)
1	376.913	.105030	183.023
2	210.029	.188376	216.505
3	446.434	.0885972	155.232
4	347.182	.114024	131.285

图 4-17　图 4-6 所示滤波器的级联格形等效



$R_1 = 1000$ 欧
$R_2 = 1000$ 欧

$C_A = 74.7116$ pF
$C_B = 1361.98$ pF
$C_C = 144.374$ pF

i	L (mH)	C (pF)	C_p (pF)
1	341.232	.116013	86.0776
2	223.008	.177387	171.140
3	286.568	.138144	192.184
4	267.554	.147852	205.690

图 4-18　图 4-6 所示滤波器的另一种级联格形等效

原来的梯形自然是有公共地的结构，但图 4-17 和 4-18 的结构则“差不多”是平衡的（把串臂电容器分开、以其一半接入下部接线中，就可使它们平衡。）。格形节本身通常由如图 4-19 所示有名的“半—格形”等效电路来实现，因为它只含有格形晶体数量的一半。三绕组理想变量器可以容易地由调谐实际变量器来实现。网络中有多少个格形节，就需用多少个变量器。不过在某种情况下，利用图 4-20 所示的等效可以消去一些(但不是全部)。于是右面的理想变量器可通过定标予以消去。只有

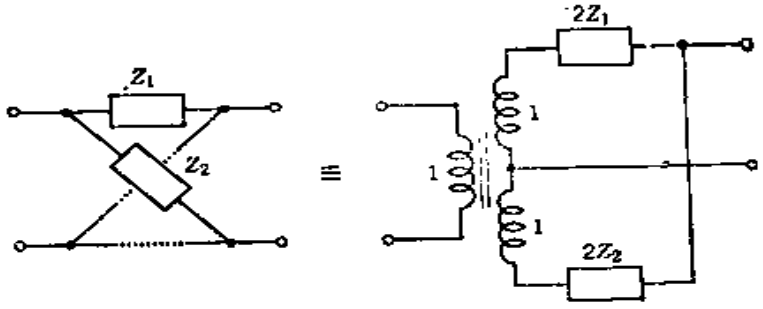


图 4-19 "半—格形"等效

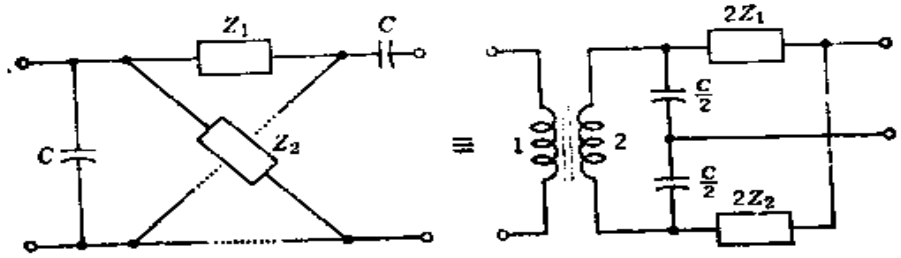
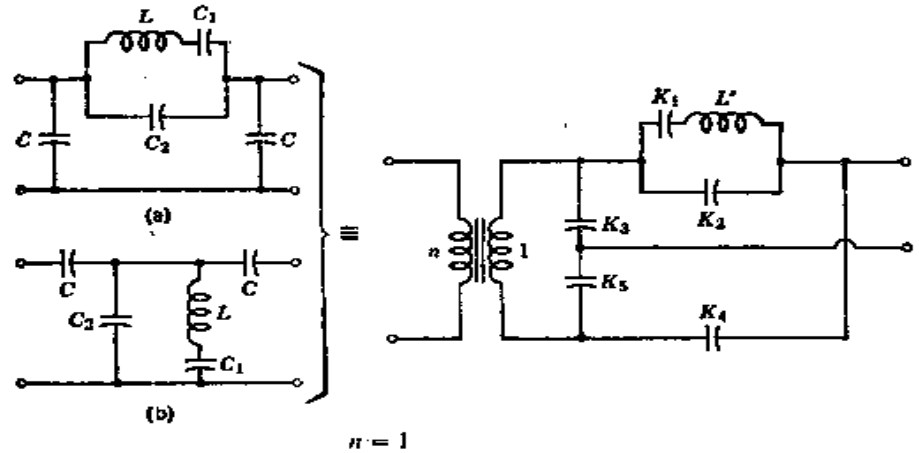


图 4-20 可能消去理想变量器的等效

当在格形的一边有串联电容、而另一边有大于或等于此串联电容的并联电容之时，才可以利用这种等效。不幸的是，图 4-17 和 4.18 的结构，没有一个符合这种要求。费特韦斯（Fettweis）[11]为单传输零点格形研究出一种有限电容分压器等效。这个关系的一种特殊对称形式由图 4-21 给出，可以把它用来代替图 4-14 的等效。关于这种等效的一般形式，读者可参考文献[12]。

人们自然可以把并臂电感纳入设计，以便和理想变量器一起，用来实现实际变量器。因为这是在相对宽带滤波器情况下最常用的办法，故将在下节考虑。



$$n = 1$$
$$K_3 = K_4 = K_5 = C$$

(a)

$$L' = L(C - C_2)^2/4C^2$$
$$K_1 = 4C^2C_1/(C - C_2)(C - C_1 - C_2)$$
$$K_2 = C(3C_2 + C)/(C - C_2)$$

(b)

$$L' = L(3C + C_2)^2/4C^2$$
$$K_1 = 4C^2C_1/(3C + C_2)(3C + C_1 + C_2)$$
$$K_2 = C(C_2 - C)/(3C + C_2)$$

图 4-21 费特韦斯等效

4.4 宽带滤波器

对带宽从百分之零点几到 5% 以上的范围来说，纯梯形滤波器得不出可以由晶体来实现的结构，这主要是因为电容比显得太小了。将部分梯形结构变换成格形，固然有助于增大这些电容比，但若在格形节间引入（并联或串联）电感器，还可获得更为可观的增大。要对这种现象用简单的物理概念加以说明是有点困难的，因此我们通过一个例子来简单地考查一下这个问题。

首先，我们注意到，虽然理论上为了这一目的、不论是串联或并联的电感器都是可以接受的，不过由于某些实际的原

因，并联电感器是最可取的。首先，鉴于要有高阻抗水平以适应晶体的需要，并联的电感值比串联电感器的电感值会更加合理些。其次，并联电感器能用作变量器，既可达到改变阻抗水平的目的，又可实现图 4-19 所示“半—格形”的等效形式。最后，这些电感器的寄生并联电容，如果它们处于并联支路中，通常总可併入原有的电容器。因此，我们假定仅仅使用并联电感器。

如果我们还是照例希望首先综合梯形网络，然后部分转换成格形，我们就必须在下面考虑一下适当的梯形结构。如前所述，能用单个格形实现的结构，至多不得超过两个有限衰减峰。因此，所考虑的结构必须具有如下的形式。我们从一并臂电感器着手，继之以全部移除两个（通常是有限的）传输零点的节。这后面又接以另一并臂电感器，再全部移除另外两个衰减峰等等，直至所有衰减峰均得实现。然后整个网络由一结尾的并臂电感器来完成。如果我们有奇数个有限衰减峰，那么必然有一格形节只实现一个单峰。这最后一个最好是尽可能靠近通带者。

结果，实现 k 个有限衰减峰需要有 n_L 个格形节嵌入到 n_L+1 个并臂电感器之间*，这里：

$$n_L=\begin{cases}\dfrac{k}{2}, & \text{若 } k \text{ 为偶数;}\\ \dfrac{k+1}{2}, & \text{若 } k \text{ 为奇数。}\end{cases} \tag{4.8}$$

因此，零频下传输零点的重阶数将是：

$$n_0=2n_L-1. \tag{4.9}$$

---

* 这里我们假定：所有有限衰减峰、都应由晶体电容器的格形节来实现。这当然不是必要的。读者如果希望的话，自能将这种结构推广到包括 LC 节。

而在无限大频率下，则总是

$$n_\infty = 1. \tag{4.10}$$

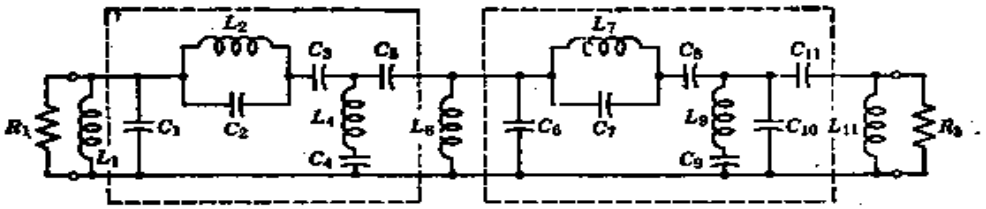
这里，我们重新准备了一个例子，以资说明。

例 4.3 设计一滤波器，其通带由 200 至 210 kHz (5%带宽)，具有通带衰减波纹 0.25 dB。

解：初步研究表明，需要四个有限衰减峰，因此我们将需要两个格形节，三个并联电感器，而且 $n_0=5$，$n_\infty=1$。其次来决定衰减峰的位置，继之以梯形综合。假定我们要求衰减峰是在：

$$f_{10}=189.961\ \text{kHz}$$
$$f_{20}=193.639\ \text{kHz}$$
$$f_{30}=216.898\ \text{kHz}$$
$$f_{40}=221.098\ \text{kHz}$$

综合得出的适当梯形结构如图 4-22 所示。把并联电感器之间虚线方框内的结构变换成格形，最后所得到的结构和元件值示

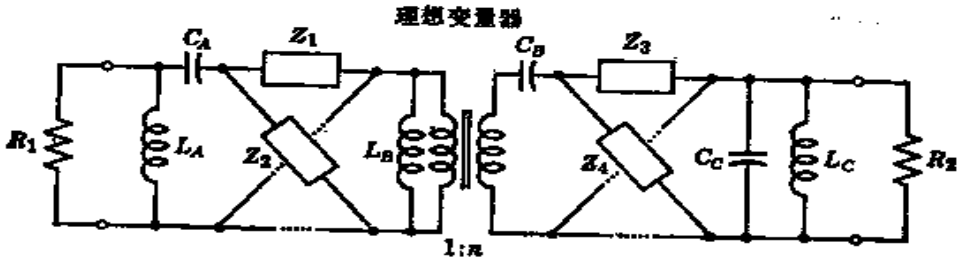


第一号格形　　第二号格形

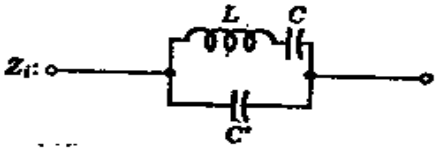
R_1 =	1000	欧	C_4 =	.858906	nF	L_9 =	60.9932	μH
L_1 =	26.1325	μH	C_5 =	5.3934	nF	C_9 =	11.0757	nF
C_1 =	22.8311	nF	L_6 =	.584375	μH	C_{10} =	99.8564	nF
L_2 =	206.458	μH	C_6 =	1027.33	nF	C_{11} =	1.25300	nF
C_2 =	2.60793	nF	L_7 =	15.4184	μH	L_{11} =	487.092	μH
C_3 =	.287736	nF	C_7 =	33.6072	nF	R_2 =	18.6394	千欧
L_4 =	817.267	μH	C_8 =	5.37542	nF			

图 4-22　例 4.3 的梯形滤波器

于图 4-23 中。注意：L_B 可以用来把第一个格形转变为半—格形的形式，并吸收剩下的理想变量器。同样，L_O 也可用来转变第二个格形，而且还和 L_A 一起，改变格形对终端的阻抗水平。此外，最小电容比约为 570，这是一个大于从同样带宽、但不包含电感器的滤波器所能指望的数量级。最后，晶体电感值都十分接近（一种想望的特性），而且通过合理使用变量器变比，还能对此作进一步的改进。



$R_1 = 1000$ 欧　　$C_A = 139.922$ nF
$R_2 = 1000$ 欧　　$C_B = 58.0218$ nF
$L_A = 26.1325\ \mu$H　　$C_C = 6.17520$ nF
$L_B = 10.2287\ \mu$H　　$n = 1.54690$
$L_C = 26.1325\ \mu$H



L (mH)	C (pF)	C' (nF)
14.5018	42.7337	27.5659
15.7984	37.0554	27.7075
24.1484	25.7514	16.8559
19.6566	29.8896	16.9505

图 4-23　例 4.3 的滤波器的等效级联格形实现

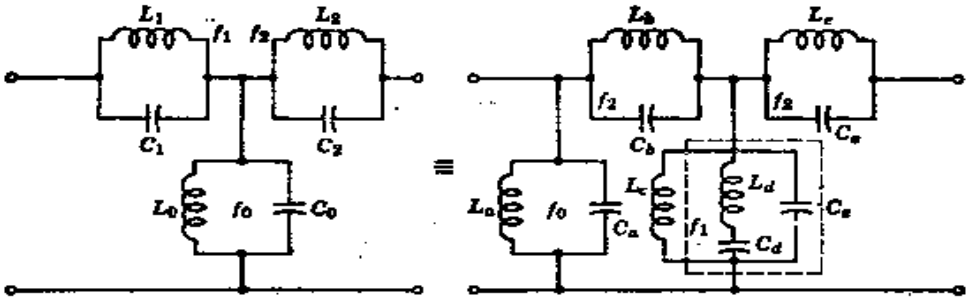
4.5 甚宽带滤波器

带宽约 10% 以上的滤波器，将不能用上述的形式来实现。虽然带宽增加不大时，人们也许能用晶体-电容器格形节来实现某种 LC 滤波器的某些部分，但增加太多后这也成为不可能了。最后，在甚宽带滤波器中，人们用晶体嵌入 LC 梯形滤波器支路中的办法，只能实现少数几个选定的衰减峰。

这种概念是以图 4-24 所示的等效[13、14]为基础。如果

$$L_0C_0>L_1C_1>L_2C_2 \tag{4.11}$$

或



$$a=\frac{L_0(L_1C_1-L_2C_2)}{L_2(L_0C_0-L_1C_1)}$$

$$L^2=L_0L_1+aL_2(L_0+L_1)$$

$$L_a=\frac{L^2}{aL_2} \qquad C_a=\frac{L_0C_0}{L_a}$$

$$L_b=\frac{L^2}{L_0} \qquad C_b=\frac{L_2C_2}{L_b}$$

$$L_c=\frac{L^2}{L_1} \qquad C_c=\frac{L_0C_0L_2C_2}{L^2C_1}$$

$$L_d=\frac{L^2L_1C_1^2}{(L_0C_0-L_1C_1)(L_1C_1-L_2C_2)} \qquad C_d=\frac{L_1C_1}{L_d}$$

$$L_e=(1-a)L_1 \qquad C_e=\frac{C_2}{(1-a)}$$

图 4-24 梯形等效

$$L_0C_0<L_1C_1<L_2C_2 \tag{4.12}$$

而且

$$a\leqslant 1, \tag{4.13}$$

则等效网络是可实现的。

这意味着：f_1 和 f_2 必须是在通带同一边的两个衰减峰频率，而且 f_1 是靠近通带的一个。f_1 实际上是由右边的四元件并臂支路中的串联谐振，亦即由晶体来实现的。显然，为了获得大的电容比(以便容纳晶体)，这两个衰减峰频率应该尽可能互相接近，并且靠近通带。上述第二个条件通常是容易满足的，因为我们正考虑一个其 f_1 和 f_2 互相接近的宽通带，所以在正常情况下，

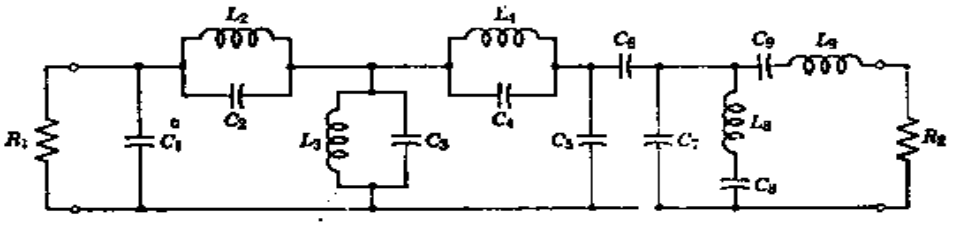
$$|L_1C_1-L_2C_2|\ll|L_0C_0-L_1C_1| \tag{4.14}$$

注意：应用这种等效将增加元件数目，而且只有最接近的衰减峰才可能由晶体来实现。幸而，这恰巧是所期望的。因为，正如波申里德尔 (Poschenrieder)[13] 在物理基础上那么清晰阐明过的那样，最接近通带的衰减峰对衰减特性在接近截止处所不希望的圆滑产生最严重的影响。

例 4.4 现在考虑以下的例子。通带是从 100 kHz 到 150 kHz，有 0.25 dB 的波纹。衰减峰选择在 80、151 和 152 kHz，如果 $n_0=n_\infty=2$。

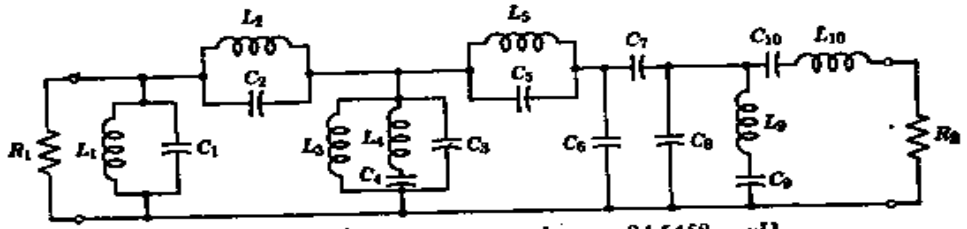
解：为了要用晶体实现 151 kHz 的衰减峰，采用了图 4-25 所示的电路结构。把等效应用到并联谐振电路的 T 形结构，我们得到图 4-26 所示的网络。所得到的电容比约为 350，是绰绰有余的。如果 L_4 不够高，可把 L_3 作成一变量器，而把晶体接至次级高阻侧。

图 4-27 表示这两个滤波器在上截止频率附近的计算性能，除假定晶体的 $Q=10,000$ 以外，用的是 $Q=300$ 的电感器。单



R_1 = 1000 欧		C_5 =	.463053 nF
C_1 =	.137683 nF	C_6 =	1.19190 nF
L_2 =	35.1403 μH	C_7 =	1.38666 nF
C_2 =	31.6141 nF	L_8 =	1592.78 μH
L_3 =	339.941 μH	C_8 =	2.48487 nF
C_3 =	4.14505 nF	C_9 =	.405088 nF
L_4 =	111.158 μH	L_9 =	4557.33 μH
C_4 =	9.86309 nF	R_2 =	1000 欧

图 4-25　例 4.4 的滤波器的梯形实现



R_1 = 1000 欧		L_5 =	94.5458 μH
L_1 =	1094.17 μH	C_5 =	11.5961 nF
C_1 =	1.42548 nF	C_6 =	.463053 nF
L_2 =	53.4696 μH	C_7 =	1.19190 nF
C_2 =	20.5043 nF	C_8 =	1.38666 nF
L_3 =	517.255 μH	L_9 =	1592.78 μH
C_3 =	2.6884 nF	C_9 =	2.48487 nF
L_4 =	.146965 H	C_{10} =	.405088 nF
C_4 =	7.55915 · pF	L_{10} =	4557.33 μH
		R_2 =	1000 欧

图 4-26　例 4.4 的滤波器在并联臂中采用晶体时的等效梯形实现

元件（晶体）的效应，在 150 kHz 截频处是十分显著的（1.3 dB）。而且，对具有晶体的滤波器来说，在 151 kHz 的衰减为 58 dB，正巧是没有晶体的滤波器衰减的两倍。（在 152 kHz附

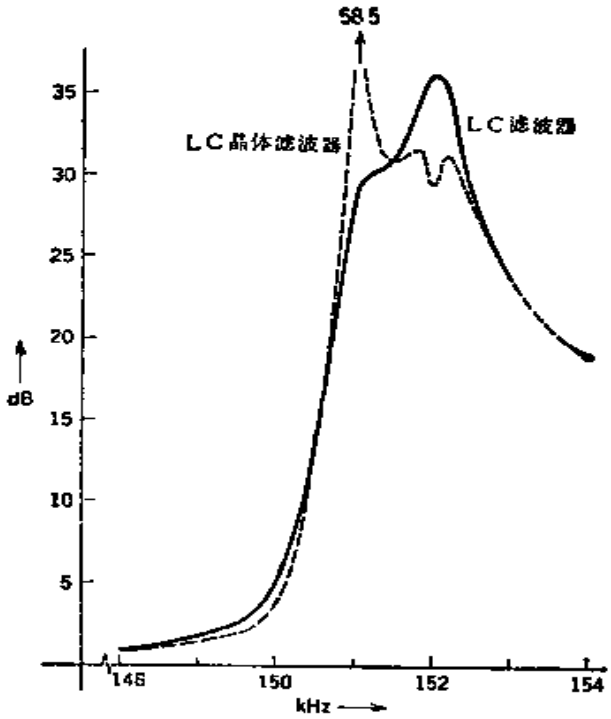


图 4-27　图 4-25 和 4-26 所示滤波器实现的计算插耗特性

近的衰减稍有下降，这是由于Q值间的巨大差别以及三个相邻支路都在这个频率下并联谐振的缘故。）

这仅仅是一些可能等效中的一种，可用它来获得能用晶体实现的结构。关于更加有效的结构，读者可查阅文献[14、15]。

我们必须在此指出，对这类滤波器的正确运行来说，在全部通带以内，晶体必须没有任何显著的寄生（假）响应。寄生响应能在滤波器的通带衰减特性中引起尖锐的意外变化。

4.6 窄带滤波器的逼近方法

迄今考虑的所有方法都是准确的，但这些方法均假定有一种通用的梯形滤波器综合程序[16]给我们提供初始结构。如果不具备这种程序，则我们希望利用许多已发表的表列结果。其中大部分是低通滤波器归一化元件值的数表[17、18]。对窄带来说，已经研究出一种逼近方法[19、20]能给我们提供适当的电路结构。

不需要深入到一般理论，就可以说明一种简化的型式如下[21—23]。我们从给定类型(巴特沃思、切比雪夫、贝塞尔等)的多项式低通滤波器出发，通过常规的低通到带通变换

$$P=\frac{s^2+1}{\delta s} \tag{4.15}$$

把它转化为图 4-28 所示的形式。滤波器归一化至 1 欧的终端负载和单位中心（弧度）频率，而 δ 则是（分数的）带宽。现在，我们将利用如图 4-29 所示、曾广泛用于窄带高频滤波器设计[24—28]的阻抗变换器。图中的圆圈是指所示值与频率无关的电抗性阻抗。

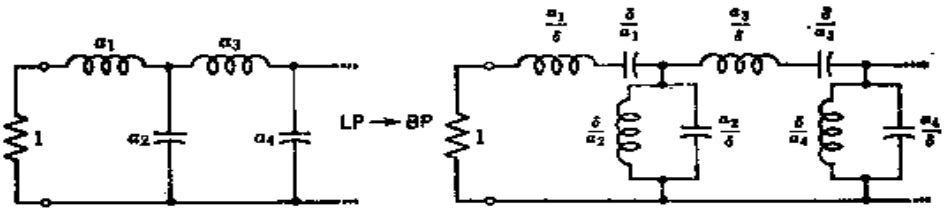


图 4-28　多项式低通滤波器的低通带到带通变换

把这样的变换器插接至带通滤波器的适当地点，我们现在得到图 4-30 所示的结构。直到现在为止，各步都是准确的，并

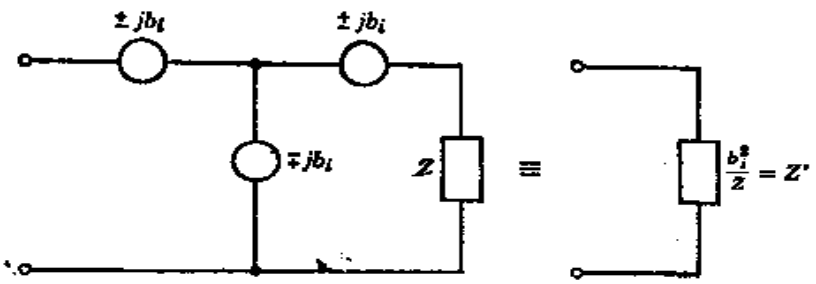


图 4-29　理想的电抗性阻抗变换

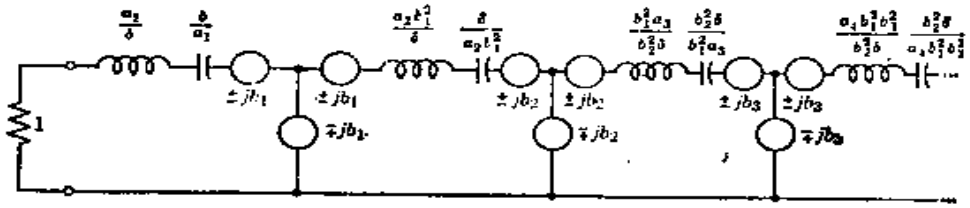


图 4-30　图 4-28 所示带通滤波器的等效形式

且 b_i 系数是任意的。如果最终的实现需要是单晶体格形的级联结构，则 b_i 可仍旧是任意的。不过，如果我们希望采用每个臂中都有晶体的格形结构，就必须这样来选择 b_i 系数，使得图 4-30 中的串联电感器都成对地相等。最简单的选择当然是使所有的电感器都相等，这就导致：

$$b_1 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{a_3}{a_2}}$$

$$b_3 = \sqrt{\frac{a_3}{a_4}}$$

$$\vdots \qquad (4.16)$$

阻抗变换器本身当然是不能准确地实现，但对于窄带应用来说，它可以近似实现，其中的一种如图 4-31 所示。将它和以上选定的 b_i 值一道应用于我们所讨论的滤波器中，即得图 4-32 所示的近似实现。注意：我们在网络的始端引进了一对串联电容器 $\pm 1/b_2$，以使所示串联支路(Z_a)相等。在适当地点还应引入另外的电容对(取决于 b_i 值)，以使各串联支路在具有正的剩余串联电容器的情况下成对地相等。还要注意：因为 δ 是一个很小的数，故 z_a 中的三个串接电容器总可以合併成一个正的电容器。

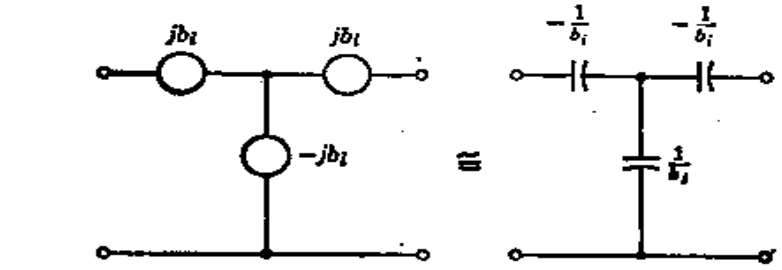
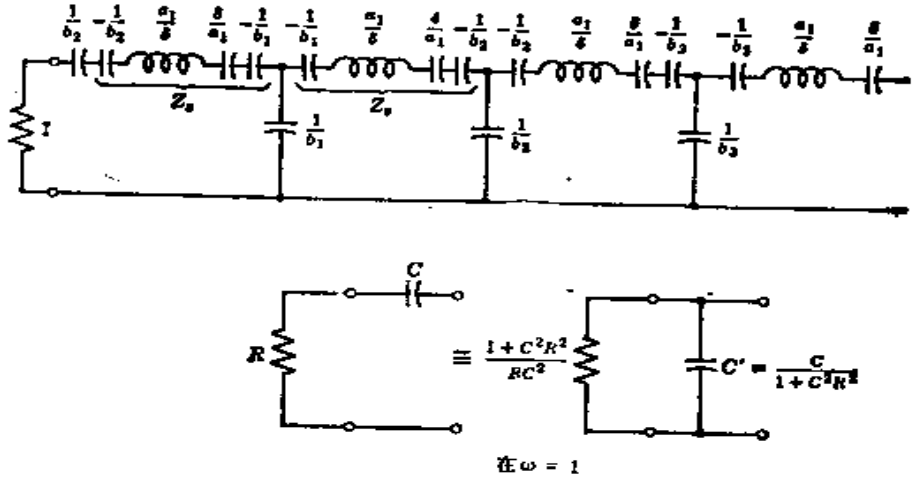


图 4-31　电抗性阻抗变换器的近似(窄带实现)



在 $\omega = 1$

图 4-32　图 4-30 所示带通滤波器的近似实现

在梯形-格形变换之前的最后一个步骤是把终端负载和第一个串联电容器 $1/b_2$ 一起改变为并联 RC 组合（图 4-32）。这个等效也是近似的，但它对窄带适用。

眼下我们得到如图 4-33 所示的电路结构，其中

$$\frac{1}{C_1}=\frac{a_1}{\delta}-(b_1+b_2). \tag{4.17}$$

显然，虚线方框内的五个支路表示一对称节，可用巴特利特(Bartlett)定理转变成格形。

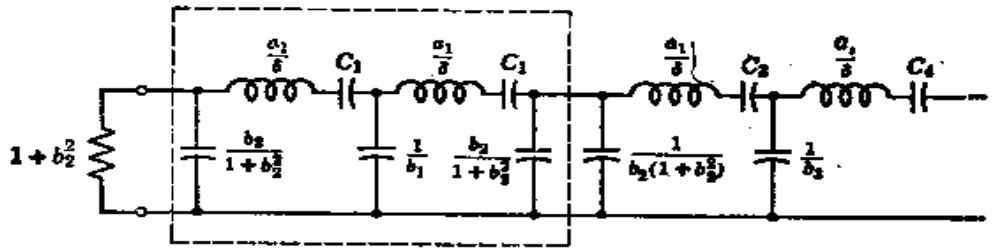


图 4-33　梯形到格形变换的准备

例 4.5　试由四阶贝塞尔多项式滤波器出发，设计一带通滤波器。

解：我们有[29]：

$$a_1=1.0598$$
$$a_2=0.5116$$
$$a_3=0.3181$$
$$a_4=0.1104.$$

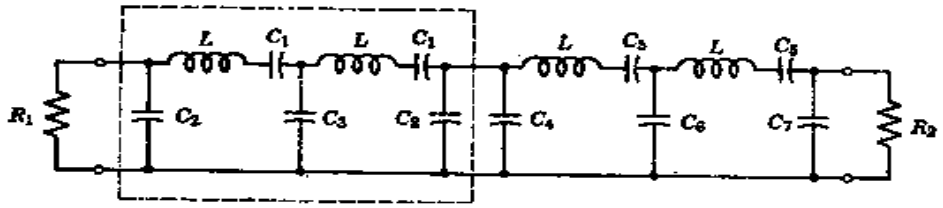
这给出：

$$b_1=1.4393$$
$$b_2=0.7885$$
$$b_3=1.6975$$

而输出端现有的（归一化）值为：

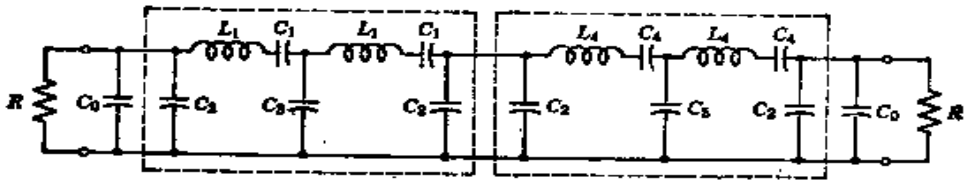
$$R_2=\frac{b_1^2b_3^2}{b_2^2}=9.6011. \tag{4.18}$$

选择一分数带宽，$\delta=10^{-4}$，得到图 4-34 所示的元件值。这里我



$R_1 = 1.6217$　　$C_2 = .48622$　　$C_5 = 9.4380 \times 10^{-5}$
$L = 1.0598 \times 10^4$　　$C_3 = .69478$　　$C_6 = .58910$
$C_1 = 9.4377 \times 10^{-5}$　　$C_4 = .78204$　　$C_7 = 8.4967 \times 10^{-2}$
$R_2 = 9.6659$

图 4-34　例 4.5 的滤波器的近似梯形实现



$R = 7.9692$　　$C_3 = .69478$
$C_0 = .14592$　　$C_4 = 9.0929 \times 10^{-4}$
$L_1 = 1.0598 \times 10^4$　　$L_4 = 1.1039 \times 10^3$
$C_1 = 9.4392 \times 10^{-5}$　　$C_5 = .58910$
$C_2 = .20465$

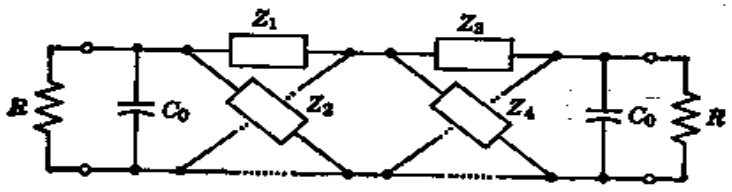
图 4-35　例 4.5 的滤波器的另一等效实现

们引进了另外一对电容器（其值为 $\pm 1/b_2$，与末尾的一个串联支路相串联），并把串联 RC 转变成并联的。我们可以看出：末尾的四个支路和适当的部分 C_4 一起形成可转换成第二个格形的另一对称节。但留下了一个问题，即由于 C_7 的值较小，这第二个格形的支路将有过小的电容比。这个问题可以以二格形节中的晶体电感不相同为代价、并选择别的 b_2 值来加以改

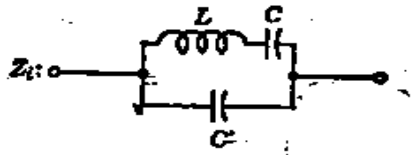
进。我们也可能是希望使两个终端负载相等。这可通过选择

$$\bar{b}_2 = b_1 b_3 = 2.4432 \qquad (4.19)$$

来得到，所得到的结构如图 4.35 所示。这里，我们选择了把两个格形中间的电容器等量均分的办法。这并不是必要的。我们也可以不这样做，而只要划分得能使两个格形中的电容比值比较接近即可。最后的格形网络示于图 4.36 中。



$R = 7.9692$ $\qquad C_0 = 0.14592$



#	L	C	C'
1	1.0598×10^{4}	9.4392×10^{-5}	.20465
2	1.0598×10^{4}	9.4366×10^{-5}	.20465
3	1.1039×10^{3}	9.0929×10^{-4}	.20465
4	1.1039×10^{3}	9.0649×10^{-4}	.20465

图 4-36　图 4-35 所示滤波器的级联格形等效。

这个例子说明了若干选择某些自由参数时需要考虑的事项，有关这种方法的进一步推广，希读者查阅文献[20、26—28、30]。

4.7 其他类型滤波器

在这个标题下，我们将简短地讨论低通、高通和带阻滤波器的现有设计方法。

这些实际上都是甚宽带滤波器型，因而不容易适应晶体的实现。在低通和高通情况下，有时把晶体用来实现LC梯形滤波器中非常靠近通带边缘的衰减峰。带阻滤波器需用晶体的时候稍许多一点，特别是当要抑制的频带极窄时更是如此。但是，晶体的寄生谐振有可能在所有这些滤波器类型中引起严重的困难。

低通和高通滤波器

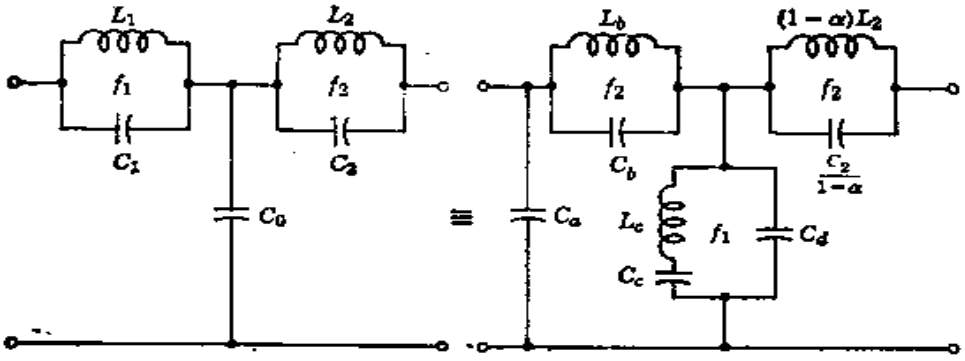
我们的讨论局限于用插入衰减设计法得到的梯形结构。可以应用图 4-37 所示的等效结构，以在低通滤波器中构成晶体类型的支路[31]。注意电容比仅取决于峰频率。

因为低通和高通晶体滤波器的用途非常有限，我们不再考虑它。关于有用的等效和设计方法的深入探讨，有兴趣的读者可参考文献[31—34]。

带阻滤波器

这种类型的滤波器，虽然也存在着象低通和高通情况下的那种寄生谐振的麻烦，但通常还是利用晶体来实现。尤其是，如果要抑制的频带是非常窄的话，就特别需要石英谐振器的极好的稳定性和很高的 Q 值以得到成功的实现。

经常使用的电路结构是由一些桥接有一附加串联谐振电路的桥T形全通节(图 4-38)级联连接而成。每一个全通节是一个



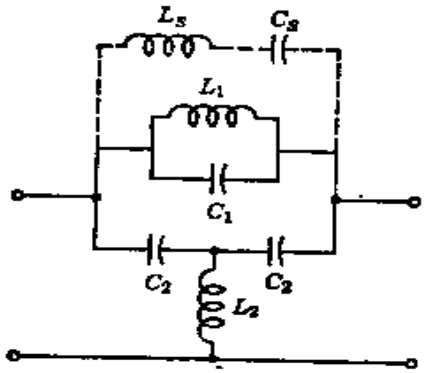
$$\alpha = \frac{L_1C_1 - L_2C_2}{L_2C_0} \qquad L_c = \frac{L_1(L_1 + \alpha L_2)C_1^2}{\alpha L_2 C_0^2}$$

$$C_a = \frac{\alpha L_1 C_0}{L_1 + \alpha L_2} \qquad C_c = \frac{\alpha L_2 C_0^2}{(L_1 + \alpha L_2)C_1}$$

$$L_b = L_1 + \alpha L_2 \qquad C_d = \frac{L_2 C_2 C_0}{(L_1 + \alpha L_2)C_1}$$

$$C_b = \frac{L_2 C_2}{L_1 + \alpha L_2} \qquad r = \frac{C_d}{C_c} = \frac{L_2 C_2}{L_1 C_1 - L_2 C_2} = \frac{f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}$$

图 4-37　适用于低通滤波器的梯形等效



$$L_1 = \frac{2R_0}{\pi f_c b} \qquad L_2 = \frac{R_0 b}{8\pi f_c}$$

$$C_1 = \frac{b^2 - 4}{8\pi f_c R_0 b} \qquad C_2 = \frac{1}{\pi f_c R_0 b}$$

$$b > 2$$

图 4-38　带阻节

由以下三个参数所表征的定阻二端对网络。这三个参数是：它的阻抗 R_0、相移变成 180° 时的频率 f_c 和一个表示相位频率曲线在 f_c 附近的陡度的参数 b。现在，如果 L_s—C_s 谐振电路

特性很陡，也就是说，如果

$$\frac{L_s}{C_s} \gg R_0^2, \tag{4.20}$$

则除了紧靠其谐振频率(发生在滤波器阻带内)附近之外，其影响处处可忽略不计。因而整个网络在所有其他频率下都将是通带。于是 L_s、C_s、C_1 这组参数就可由压电晶体来实现。

这样一种结构的插入衰减设计将很复杂，这是由于其可调参数太多，因而其中有些参数可任意选择的缘故。近来[35]已有一种根据伪电抗概念[19、20]来设计这类滤波器的方法。它很好地运用了可资利用的自由参数来达到任意规定的电容比。有关这个方法的详细情况，读者可参考文献[19、20、35]。

如果在带阻滤波器的通带内含有某些寄生的晶体振荡模式，那么就必须采取一些步骤，以便在滤波器的输出端抑制这些寄生谐振。为此而提出的结构[36、37]示于图 4-39 中。在

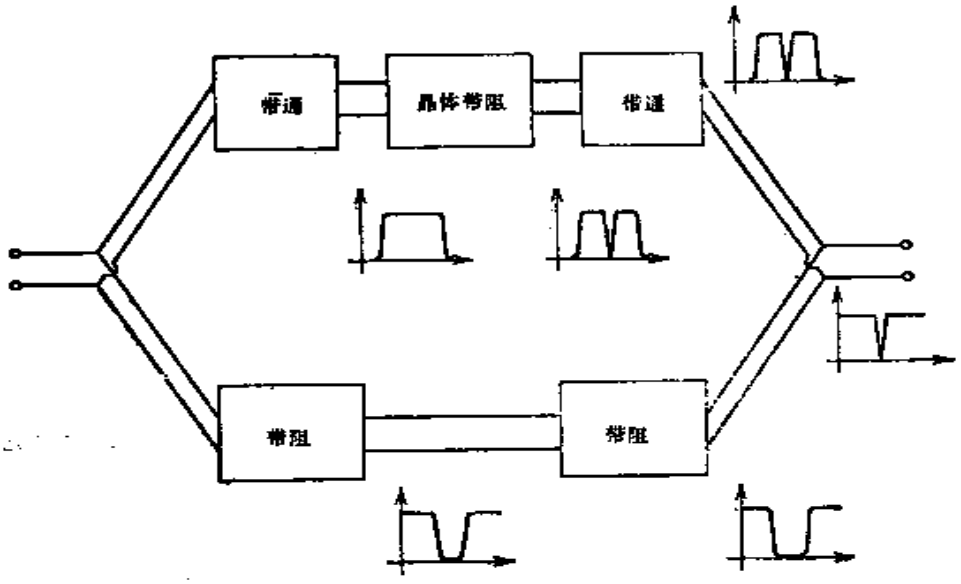


图 4-39　防止晶体谐振器寄生振荡模式干扰的示意图

输入和输出端的带通带阻滤波器对，把整个频带分成两段，使得要抑制的窄带、位于带通滤波器的通带范围内。而且这个带通滤波器的通带宽度正好使所用晶体在其通带范围内没有寄生信号。这个方法显然是可行的，但费用较高。

4.8 摘 要

压电晶体和陶瓷谐振器最常用于窄带通滤波器的实现。有各种设计方法可用来设计这类滤波器，我们较为详细地讨论了某些插入衰减法。晶体也已用于其他类型的滤波器中，我们简短地谈到了宽带通滤波器、低通和带阻滤波器的设计问题。

有关进一步的设计方法和滤波器类型，我们再选出这些文献[12、32—33、38—47]。

致谢

衷心感谢国家科学基金会在 GK-14414 资助项下的部分支持。

习 题

4.1 试从 5 阶切比雪夫原型低通梯形滤波器出发，把它变换为带通，并将其转变为两个并联电感器之间的晶体-电容器格形结构。又问此格形结构可实现多少个全衰减峰，并解释为什么？

4.2 利用阻抗变换器按级联格形结构设计一 6 阶窄带巴特沃思带通滤波器。

4.3 证明图 4-24 所示的等效。

4.4 试就图 4-16 所示三个等效中的第一个，证明等效格形的各支路、将比梯形支路有较大的电容比。

4.5 证明实现三个或三个以上全衰减峰的梯形网络，一般不能转变成晶体-电容器格形结构。

4.6 证明图 4.21 的等效。

参 考 文 献

[1] W. P. Mason, "Electrical wave filters employing crystals as elements," *Bell System Tech. J.*, **13**, 405—452 (July, 1934).

[2] W. P. Mason, *Electromechanical Transducers and Wave Filters*, 2nd ed., Van Nostrand, New York, 1948.

[3] D. Indjoudjian and P. Andrieux. *Les Filtres a Cristaux Piezoelectriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[4] D. I. Kosowsky, "High-frequency crystal filter design techniques and applications," *Proc. IRE*, **46**, 419—429 (Feb., 1958).

[5] W. Herzog, *Siebschaltungen mit Schwingkristallen*, 2nd ed., F. Vieweg, Braunschweig, Germany, 1962.

[6] C. L. Semmelman, Private communication.

[7] G. Szentirmai, "On the realization of crystal band pass filters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-11**, 299—301 (June, 1964).

[8] J. A. C. Bingham, "A calculation method for Szentirmai's modified symmetrical lattice circuit," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-12**, 284—285 (Sept., 1965).

[9] J. Lang and C. E. Schmidt, "Crystal filter transformations," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-12**, 454—457 (Sept., 1965).

[10] E. Christian and G. C. Temes, "On the Szentirmai transformation." *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-13**, 450—452 (Dec., 1966).

[11] A. Fettweis, "Jaumann structures with capacitive tapping for band-pass crystal filters," *Revue H. F.*, **5**, 116—123 (1962).

[12] A. Fettweis, "Image parameter and effective loss design of symmetrical and antimetrical crystal band-pass filters," *Revue H. F.*, **5**, 378—394 (1963).

[13] W. Poschenrieder, "Steile Quarzfilter grosser Bandbreite in Abzweigschaltung," *NTZ*, **9**, 561—565 (Dec., 1965).

[14] J. E. Colin, "Transformations de quadripoles permettant l'introduction de cristaux piezoelectriques dans les filtres passe-bande en echelle," *Cables et Transm.*, **21**, 124—131 (April, 1967).

[15] W. Haas, "Die Verwendung von Quarzen in Netzwerken, die nach der Betriebsparametertheorie berechnet werden," *Frequenz*, **16**, 161—

167 (May, 1962).
[16] G. Szentirmai, "A filter synthesis program," *System Analysis by Digital Computer*, F. F. Kuo and J. F. Kaiser, Ed., John Wiley, New York, 1966, pp. 130—174.
[17] A. I. Zverev, *Handbook of Filter Synthesis*, John Wiley, New York, 1967.
[18] R. Saal, *Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpasse*. Telefunken Gmbh., Backnang, Germany, 1961.
[19] R. F. Baum, "Design of unsymmetrical band-pass filters," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-4, 33—40 (June, 1957).
[20] J. K. Skwirzynski, "The concept of pseudo-reactance in the design of narrowband filters," *Network and Switching Theory*, G. Biorci, Ed., Academic Press, New York, 1968, pp. 341—360.
[21] T. R. O'Meara, "The cascade synthesis of crystal filters with transmission zeros at infinity," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-10, 533—4 (Dec., 1963).
[22] R. C. Smythe, "On the realization of crystal-capacitor tandem lattice bandpass filters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-11, 170 (March, 1964).
[23] R. C. Smythe, "The synthesis of crystal-capacitor tandem lattice all-pole bandpass filters on the insertion loss basis," *Proc. 18th Ann. Frequency Control Symposium*, 1—22 (1964).
[24] F. S. Atiya, "Theorie der maximal geebneten und quasi-Tschebyscheffschen Filter," *AEÜ*, 7, 441—450 (Sept., 1953).
[25] S. B. Cohn, "Direct-coupled resonator filters," *Proc. IRE*, 45, 189—196 (Feb., 1957).
[26] J. Lang, "Narrow-band crystal filter transformations," *Electro-Technol.*, 75, 34—37 (Aug., 1965).
[27] W. C. Kole, "Designing wide-band crystal filters with Cauer parameters," *EEE*, 15, 88—91 (June, 1967).
[28] L. C. Hwang, "Synthesis of a four-pole, wide band crystal filter design," *Frequency Technology*, 7, 15—19 (*April*, 1969).
[29] L. Weinberg, *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1962, p. 619.
[30] A. G. J. Holt and R. L. Gray, "Bandpass crystal filters by transformation of a lowpass ladder," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-15, 492—4 (Dec., 1968).
[31] J. E. Colin, "Mutations des circuits provoquant les pointes d'affaiblissement infini dans les structures de filtres en echelle," *Cables et Transm.*, 12, 10—22 (Jan. 1958).

[32] J. E, Colin, "De l'introduction de cristaux piezo-electriques dans des filtres passe-bas et passe-haut en echelle (avec extension aux filtres passebande)." *Cables et Transm.*, 16, 85—93 (April, 1962).

[33] J. E. Colin and P. Allemandou, "Filtres passe-bas et passe-haut symetriques d'adaptation maximale. Application aux filtres passe-bas et passe-haut en echelle a cristaux piezoelectriques," *Cables et Transm.*, 15, 99—114 (April. 1961).

[34] V. M. Kantor and A. A. Lanne, "The synthesis of low-and high-pass filters from their effective parameters," *Telecommunication*, 21, 6—14 (April, 1967).

[35] G. Szentirmai, "The synthesis of narrow-band crystal band-elimination filters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-15, 409—414 (Dec., 1968).

[36] D. W. Robson, U. S. Pat. 3,009. 120 (Nov. 14, 1961).

[37] R. O. K. Turvey, U.S. Pat. 3,179.906 (April 20,1965).

[38] P.van Basteiaer, "The design of band-pass filters with piezoelectric resonators." *Revue H. F.*, 7, 193-206 (1968).

[39] M. Dishal. "Modern network theory of single-sideband crystal ladder filters," Proc. IEEE, 53. 1205-1216(Sept. 1965).

[40] W. P. Mason. "Use of piezoelectric crystals and mechanical resonators in filters and oscillators." *Physical Acoustics*, W. P. Mason, Ed., 1, Pt. A, Academic Press, New York, 1964, pp. 335-415.

[41] A. D. Waren, W. J. Gerber and R. Curran, "Trapped energy modes, network synthesis and the design of quartz filters," *Proc. 19th Ann. Frequency Control Symposium*, 534-564 (1965).

[42] L S. Lasdon and A. D. Waren, "Optimal design of filters with bounded, lossy elements," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-13, 175-187 (June, 1966).

[43] J. E. Colin, 'Formulaire de calcul des filtres passe-bande etroits, a cristaux piezoelectriques identiques, a comportement meplat de l'affaiblissement," *Cables et Transm.*, 22,132-135 (April, 1968).

[44] I. Sauerland and W. Blum, "Ceramic IF filters for consumer products," *Spectrum*, 5, 112-126 (Nov., 1968).

[45] F Christian and E. Eisenmann, "Considerations for the design of crystal filters," *Proc. 3rd Allerton Conference on Circuit and System* Theory, 806-816 (1965).

[46] G. Szentirmai, "New developments in the theory of filter synthesis," *IEE Conference Publication No. 23*,1-28 (1966).

[47] D. S. Humpherys, "Active crystal filters," *Electro-Technol.*, 78,43-47 (July, 1966).

5 机械带通滤波器

R. A. 约翰逊(R. A. Johnson)
柯林斯(Collins)无线电
新港海滩(Newport Beach)，加利福尼亚州

5.1 预备知识

在机械带通滤波器和上述几章中所述滤波器之间的基本差别是：就机械滤波器而论，谐振元件和耦合元件二者都是机械的。这与通常的晶体滤波器的情况不同，例如，其谐振器为机械振动元件，但谐振器间的所有电耦合，都用的是电容器、电感器或金属线来完成。机械滤波器和晶体滤波器确有相同的，使它们得以存在的理由，即它们都能够提供窄带滤波而没有过大的损耗、温度偏移或老化。恒定模数铁镍合金谐振器有10,000到20,000的Q(品质因数)值，而石英谐振器则有高达150,000或150,000以上的Q值。这意味着：要制成一种合金谐振器机械滤波器，使之在455 kHz的中心频率下有窄达500 Hz的带宽，而不致由于损耗引起通带响应的过分圆滑是可能的。在同样这个频率下，其中心频率随温度的移动，在整个100°C的温度范围内可以低达50 Hz。

机械滤波器基本上是一种通过输入换能器把电信号转变成机械振动的设备，如图 5-1 所示。滤波作用就出现在由谐振器和耦合元件（多半是短金属线）组成的机械网络内。然后通过输出换能器把滤波信号转变还原成电能。



图 5-1 机电带通滤波器

把机械滤波器用作频率选择设备的兴趣，是由坎贝尔(Campbell)和瓦格纳(Wagner)在电带通滤波器方面的工作带动起来的。最早值得注意的也许是麦克斯菲尔德(Maxfield)和哈里逊(Harrison)在记录和复制音乐和语言方面所做的工作[1]。他们利用机电模拟把电网络理论应用于留声机的设计，得以奇迹般地改进了频率响应，如图 5-2 所示。把网络当作集总电容器和电感器的系统来处理，其中针的柔量（劲度的倒数）由电容来表示，而针臂的质量用电感表示，等等。

直至二十世纪四十年代为止，虽然描述各种弹簧-质量型机械滤波器的专利已有所发表，并已把电滤波器理论应用于各种声学设备的设计中去，但在为频率选择（例如在无线电或电话通信设备中）而设计实际机械滤波器的领域内，实际上还没有做什么工作。1942 年，沃伦·曼逊(Warren Mason)在先前几年发明宽带晶体滤波器的基础上，出版了《机电换能器和滤波器》一书，提出有关挠曲谐振器、弹簧耦合机械滤波器的论述[2]。虽然同时期他还提出过有关谐振杆（机械传输线）滤波器的专利，但直到 1947 年为止，迄未发明和制成真正的实际

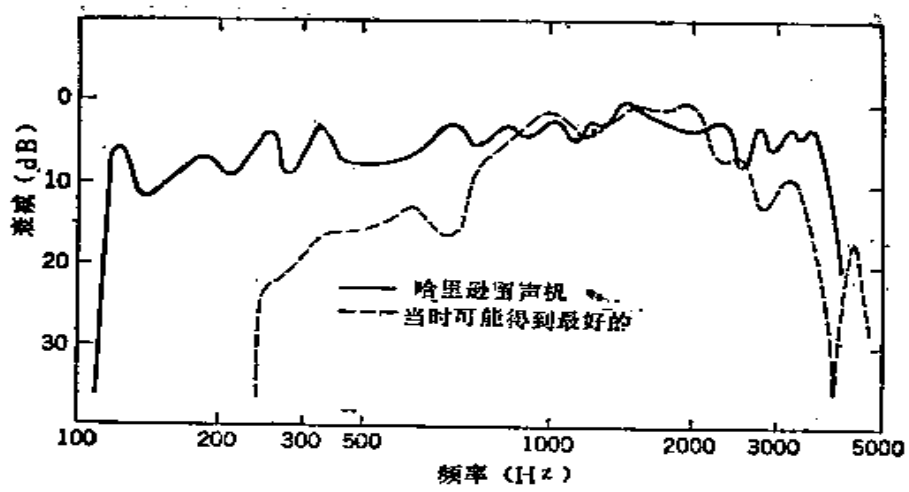


图 5-2 （麦克斯菲尔和哈里逊）在留声机设计中利用机电模拟的改进

设备。

在 1947 年以前，虽然仍把电滤波器用于通常的调幅(AM)接收机中，但不可能（除在低频率外）把它们用于高性能的单边带设备。虽然在低/中频（100 kHz）晶体滤波器的设计方面已取得了很大的进展，但对较常用的 455 kHz 频率来说，这些滤波器是又大又贵。受这种需要所促动，阿得拉（Adler）研制了图 5-3 (a)所示的线耦合谐振片型机械滤波器[3]。其第一片和最末一片起机电换能器和伸缩式谐振器的作用。所用的铁镍合金谐振片不但很稳定，而且也显示磁致伸缩的性质。这意味着：电流经过环绕谐振片的线圈，产生一磁场使谐振片的尺寸改变，因此以相当大的幅度并接近其谐振频率而振动。然后通过连接诸片的金属线把机械能在各片间传送。当金属线长度小于八分之一声波长的时候，它们起弹簧的作用。最末一片谐振器中的形变产生磁场，使出端线圈中感生电压。

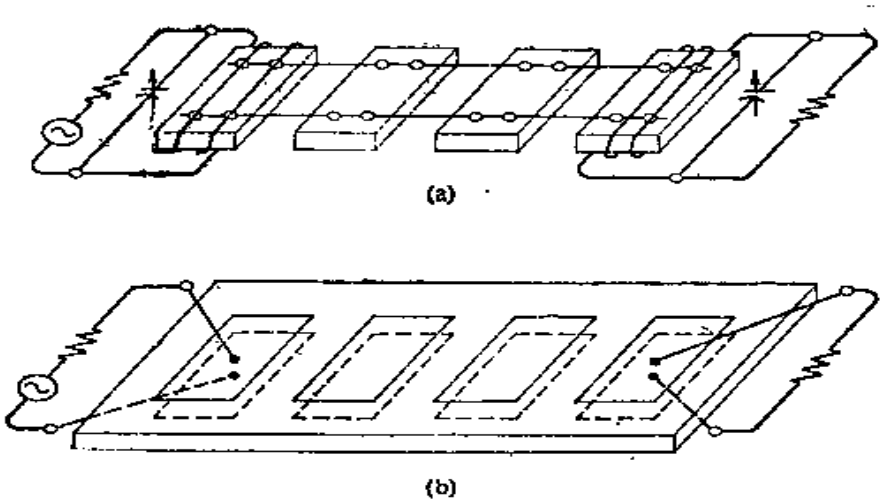


图 5-3 (a)阿德拉(Adler)片-线机械滤波器和(b)单片机械滤波器

随着片-线机械滤波器的发展，在很短的时间内，又研制出盘-线和杆-颈型机械滤波器。盘-线滤波器的工作原理与片-线滤波器相似，而杆-颈滤波器则设计成级联传输线的形式，或更具体地说，设计为由四分之一波长杆或"颈"所耦合联接的半波长杆[3]。

除了利用金属线来耦合非邻接的谐振器以获得衰减极点外，在机械滤波器技术方面，直到1965年为止，即在赛克斯(Sykes)和比弗(Beaver)发表他们的有关单片滤波器的工作成果[4]以前，并没有什么重大的突破。单片或石英机械滤波器只不过是在石英衬底上淀积的一些电极对的阵列，如图5-3(b)所示。这种滤波器与线耦合的片型机械滤波器，无论在外表上和工作原理上都很相似。输入信号经过压电效应，在第一电极对之间，接着在所有电极对之间，引起剪变式驻波。这种能量在谐振器之间是以指数衰变信号形式经过非电极区域来耦合

的。电极对作为谐振器，而非电极区域则起耦合元件的作用。最末电极对还供作输出换能器之用。

5.2 等效电路

等效电路这一课题，对机械滤波器设计者有重大意义。设计工程师在电网络理论方面多半已受过训练，但在动力学或声学方面则很少有基础。此外，大多数讨论滤波器的文献和大多数供滤波器分析和设计用的计算机程序都是按电气方面的术语写出的。因此，需要机械滤波器设计者把他的机电系统转变成等效电路模型，模型的复杂程度与原来要解决的差不多。

机械简图

为了要能寻求等效电路，就必需，要么能够直接写出(尔后能转化成电模拟方程的）描述机械网络的微分方程，或者能够作出机械简图并（用或不用微分方程的帮助）把质量变换为电容，把速度变换为电压等等。让我们以图 5-4 中所示简单的单自由度系统作为例子。

图 5-4(a)为一由弹簧(K_m)、质量(M_m)和阻尼器(D_m)所组外的线性机械系统的实形图。图 5-4 (b)和 5-4 (c)为串联和并联谐振器电网络的示意图。每个系统都有两个存储元件：在机械情况下的 K_m 和 M_m，在电网络中的 L 和 C。耗能元件为 D_m 和 R，网络变量为力 (F_m)、速度 (V_m)、电流(I)和电压(V)。

描述这三个系统的微分方程为：

$$M_m\frac{dV_m}{dt}+D_mV_m+K_m\int_{t_0}^{t}V_m\,dt=F_m\sin\omega t, \qquad (5.1)$$

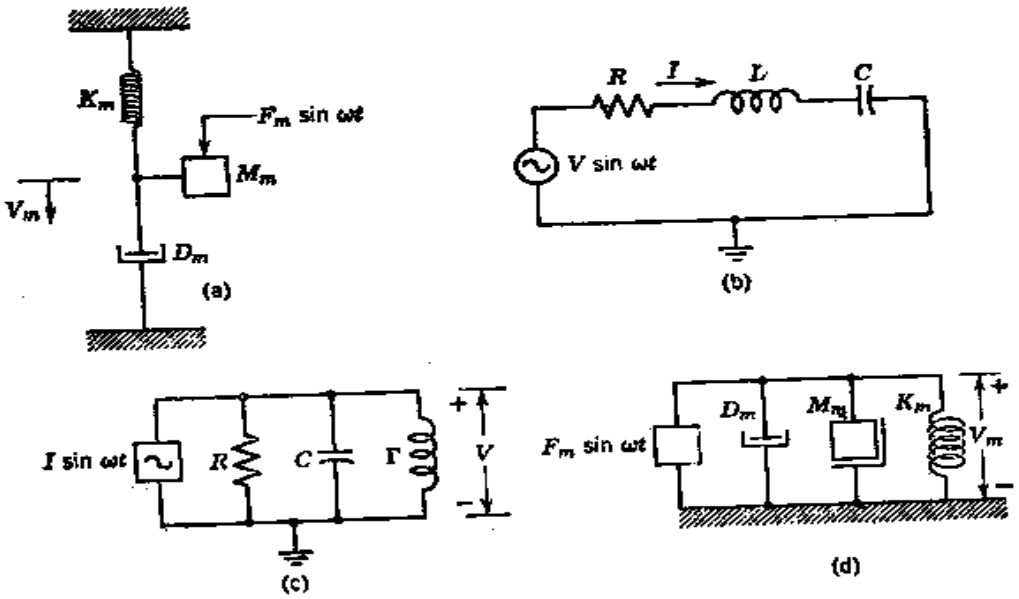


图 5-4 单自由度系统：(a) 机械实形图，(b) 串联的电示意图，(c) 并联电示意图，(d) 机械简图

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I\,dt=V\sin\omega t,\ \text{和} \tag{5.2}$$

$$C\frac{dV}{dt}+\frac{1}{R}V+\Gamma\int_{t_0}^{t} V\,dt=I\sin\omega t \tag{5.3}$$

注意以上微积分方程有同样形式，即常数和变量名称的简单替换，可使所有三个方程都一样。因为方程有同样形式，在术语的广泛意义上，这些系统是“类似的”。

下面，我们不去写出微分方程，而是去作机械简图，再通过观察就可以把它转变为电的模拟电路[5]。作图的第一步是选择一组变量（例如力和速度），并画出系统的实形图，如图5-4(a)所示。下一步是辨认各个元件的两端。并将一同运动的那些端子连接在一起。被“固定”在参考面（例如地）的所有端

子也必须连结在一起。就质量而论，总是把其端子之一连接到地（或惯性参考面）。对简单的弹簧-质量系统，所得出的机械简图表示于图 5.4(d)。注意在实形图中诸元件是串联连接的，而在这种具体情况下的简图中各元件却是并联连接的。正如人们可以看出的那样，这是由于质量有一个端子连接到地的缘故。注意图 5-4(d) 的机械简图，通过如(5.1) 和(5.3) 中的元件和变量名称的简单替换，就可以转变为图 5-4(c)的模拟电网络。

从上例可以看出，我们决不要把机械简图和系统的实形图相混淆。实形图是用来使我们对物理系统有较好的感觉或印象。简图则把变量和元件参数都包括了，因此在列写描述网络

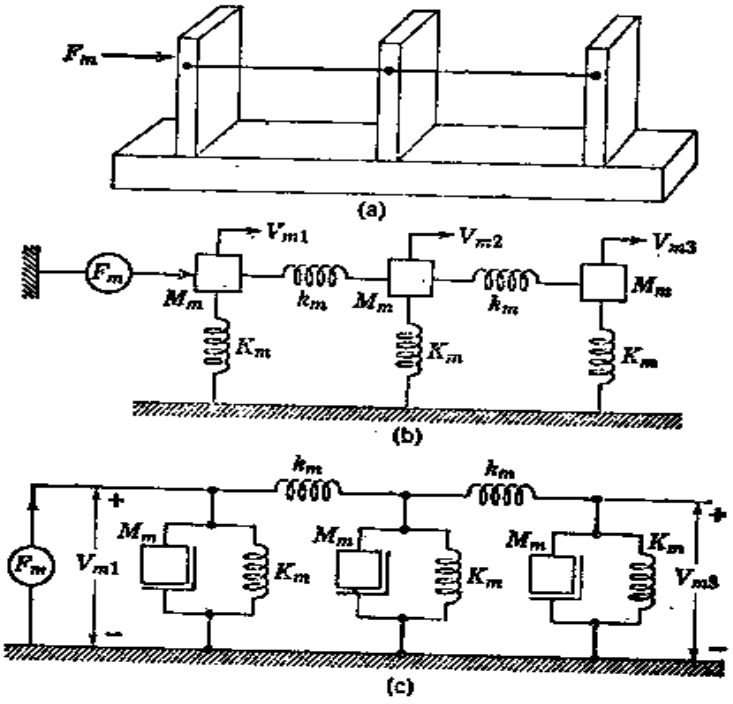


图 5-5 三谐振器，挠曲棒-线机械滤波器：(a) 实际结构 (b) 实形图和(c) 简图。

的方程或把机械网络转换为其电模拟网络时，都有直接的帮助。

让我们更进一步加深这些概念。运用在频率大于 100 Hz 的机械振动系统，通常由分布元件例如谐振片、盘或棒和耦合线组成，而不是简单的弹簧和质量。即使如此，我们通常还是可以用集总的弹簧和质量来近似这些分布元件。作为一个例子，让我们考查图 5-5 中所示的挠曲谐振器线耦合滤波器的情况。

分析这个系统时，第一步是要寻求挠曲元件（在其谐振频率附近）的弹簧-质量表示形式。这可以通过(1)计算其谐振频率，和(2)确定其导线固着点处（在谐振频率下)的"等效质量"来作到。术语"等效质量"指的是谐振器的视在质量，或等效弹簧-质量系统的质量。在挠曲谐振器的情况下，当金属线的固着点移向结构的基底时，按力 F_m 方向的等效质量将随之增大。图 5-5(b)给出了该系统的形象表示。在这一简单情况中，剩下要作的只是将所有质量"接地"，于是可得图 5-5(c)中所示的机械简图。

机电模拟

虽然有关模拟的题目有丰富的文献，但由于大多数作者所讨论的范围有限，因而多数是混淆不清。这种困难的原因是：在电和机械系统之间并没有唯一的模拟。也就是说，如果我们认为由同样形式的微分方程所描述的两个系统就是"类似"的，就没有唯一的模拟。很多人觉得模拟一词的这个定义是不完全的，因为他们常常要求两个网络的拓扑相同。这等同于说："穿行变量"必须与穿行变量相对应，而"跨行变量"则必须与跨行变量相对应。穿行变量是指可在系统（或支路中）的一个开断点中插入仪器来加以测量的一种量。例子就是力和电流。跨

行变量则是指可用仪器跨接到系统中的两点（或节点）来加以测量的量；因此速度和电压就是跨行变量[6]。除拓扑方面的考虑之外，有些人主张：对要模拟的系统来说，两个系统中的跨行变量和穿行变量的标量积，必须有同样的量纲。作为一个例子，电流和电压的乘积以及力和速度的乘积，二者都有功率的量纲。

在本章我们将着重讨论导纳型模拟，这种模拟系统具有上述的三种性质：(1)同样形式的微分方程，(2)同样拓扑的微分方程，和(3)有同样标量积的变量。

表 5-1 根据导纳型模拟，给出了常用电量和机械量间的对应关系。利用这个表，允许我们简单地通过以 V 代换 V_m 或以

表 5-1　　导纳型模拟

参数 \ 系统		电的	机械的
变量	跨行	电压(V)	速度(V_m)
	穿行	电流(I)	力(F_m)
网络参数		电导(G) 电感(L) 电感$^{-1}$(Γ) 电容(C)	力阻(D_m) 柔量(C_m) 劲度(K_m) 质量(M_m)
导抗		阻抗(Z) 导纳(Y) 短路($Z=0$) 开路($Y=0$)	力导纳(Z_m) 力阻抗(Y_m) 固定点($Z_m=0$) 自由点($Y_m=0$)
拓扑		回路 节点 串联 并联	回路 节点 串联 并联

I 代换 F_m 等等，来把描述机械系统的方程（或简图）直接变为一组描述模拟电系统的方程（或反之）。注意我们采用了 Y_m（在去掉下标的时候，就变为模拟电量的符号）来表示力阻抗（F_m/V_m）。

换能器等效电路

我们现在已找到一种把机械系统表示为模拟电网络的方法[7、8]。这时常常会问："X克的质量相当于多少法拉的电容？"等等。这个问题，仅在机电系统中（亦即我们正试图使等效模拟电参数与实际电参数发生关系的系统中）才有意义。在电输入、电输出系统中，实际上要问的问题是："和外部电气量相对应的等效模拟电参数的值是多少？"对这两个问题的回答都涉及机电换能器，通过机电换能器，我们把机械参数"看作"具有电单位的电参数。当改变电网络和机械网络间的耦合度时，从电气端所看到的等效电网络的参数值也随之改变。因此，我们可以说：没有机械值到电值的绝对变换关系，只有与换能器机电耦合度相对应的变换关系。

就实际设备而论，其含义可以由图 5-6（a）所示的压电换能器来说明。压电材料是一种在电场作用下其尺寸会变化的材料，这意味着：当把图 5-6（a）所示换能器的两端镀以导电材料，并在这两端施加交变电压的时候，棒就会振动。如果在电端对上作测量，我们会发现：其策动点电抗（我们暂时假定为无损耗系统）在棒的机械谐振频率范围内有一个零点和一个极点。这表示于图 5-6（b）。此外，如果不让谐振器振动，或者是在远离任何谐振的频率下作测量，该网络就形同电容器 C_0。根据零、极点频率以及 C_0 的测量，就可以构成图 5-6（c）的网络。

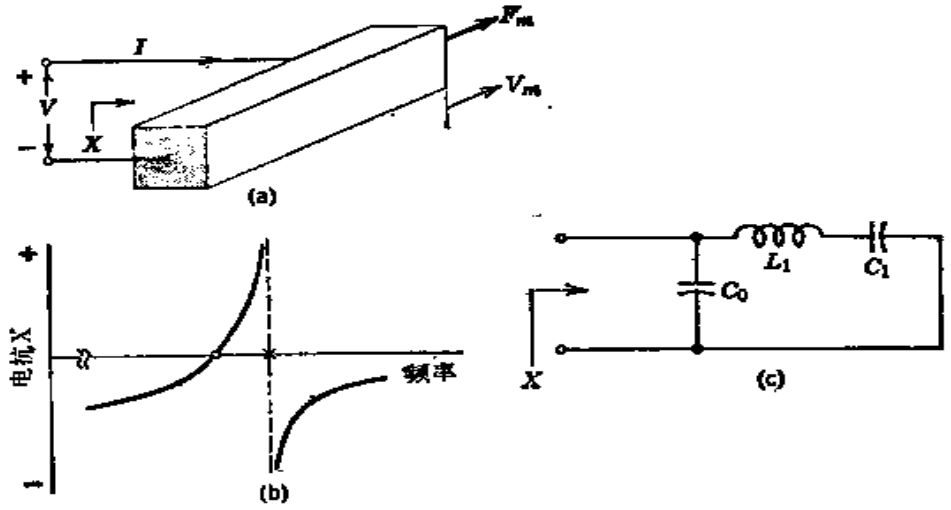


图 5-6 压电换能器：(a) 实形图，(b) 谐振附近的频率响应，和(c) 策动点电抗网络

在本章中我们早已看到一挠曲模式谐振器可由集总弹簧-质量系统来表示。按同样方法，图 5-6 (a) 的棒就可以由弹簧、质量和阻尼器（机械耗能元件）来表示，他们各有一个接地的终端和连接到一公共点的另一个终端。由图 5-6 (a)，我们可看出：力 F_m 和速度 V_m 的测量可以在换能器的一端（另一端可以悬空或固定）进行，以便确定集总的机械元件值。

在换能器上进行了电测量和机械测量之后，就可以构成图 5-7 (a) 的等效电路*。柔量 C_m^E 的上标 E 表示恒定电场，这对应于电气端对短路（电场等于零）的条件下测量柔量的情况。在网络的电的一侧和机械的一侧之间，就是用来连接电和机械元件的机电回转器。

* 重要的是要注意：力 F_m 是穿行变量，而速度 V_m 则是跨行变量。这在大多数较老的文献中是不考虑的，但它正被更广泛地接受。在具有两个模拟系统中的困难，可以由在求解某些问题时要把电压作为穿行变量，而在解另一些问题中又作为跨行变量来了解。

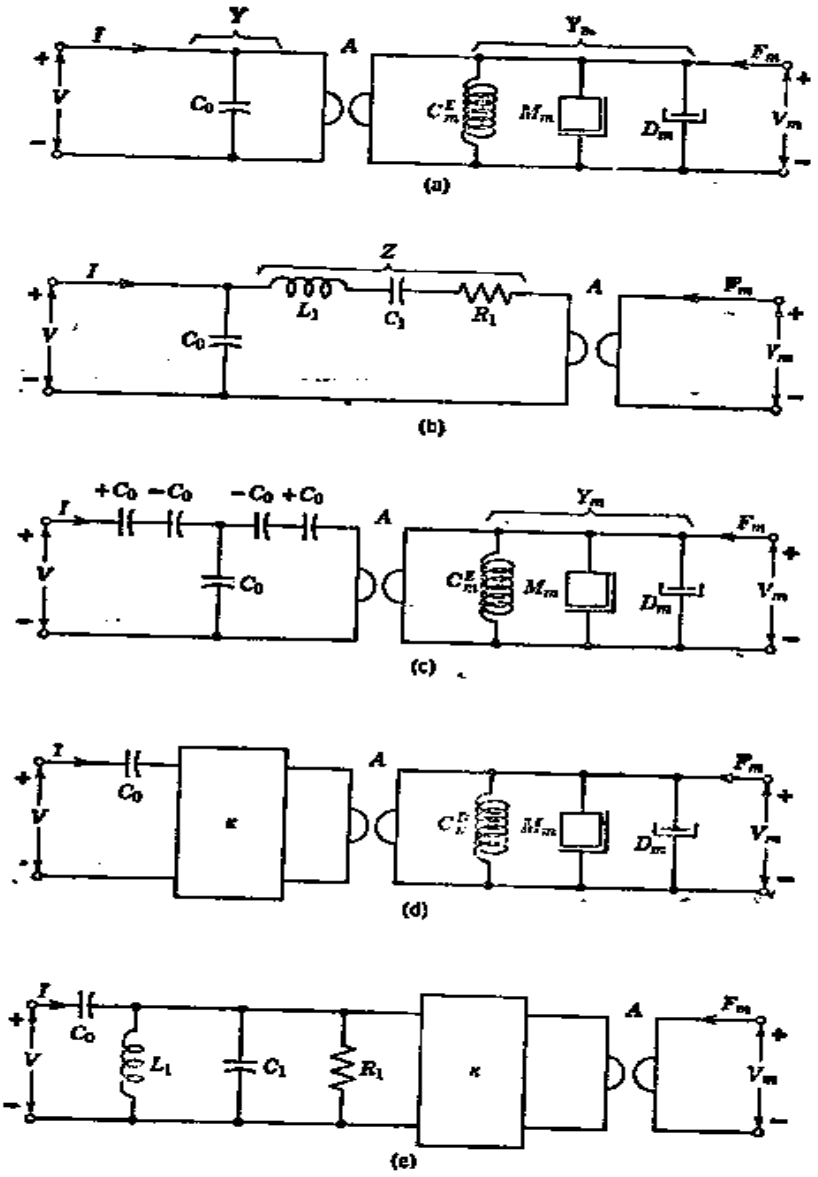


图 5-7　根据电压速度导纳型模拟的电场换能器等效电路

回转器是必要的，因为在电的一侧上的电压（跨行变量）产生电场，这个电场在夹持情况下本身又在机械的一侧上产生力（穿行变量），而且反过来也是一样。因此，把回转器用于纯电的等效电路中来把跨行变量（电压）转化成穿行变量（模拟力的电流）。目前所用的模拟和压电换能器的情况就是这样。如果换能器是本章后面所讨论的磁致伸缩类型，就不需用回转器了。

按 $ABCD$ 矩阵形式来描述回转器，我们有

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_m \\ F_m \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

式中把互易条件 $AD-BC=1$ 替换为反互易条件 $AD-BC=-1$。

机电回转器和它的电气同行电回转器很相似，是无源、无耗、反互易的耦合元件，它具有能将并联元件变为串联元件以及将串联元件变为并联元件的性质。如果要把图 5-7 (a) 中的网络变换成图 5-6 (c) 的电路（它是表征换能器与单谐振器系统的策动点电抗函数的），这样的转换是必需的。

图 5-7 (a) 所示整个网络中，电气变量和机械变量间的关系式，可由电气、机电和机械各部分的 $ABCD$ 矩阵相乘来求得。这样一来，我们就得到

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}&=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_m & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_m \\ F_m \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} Y_mA & A \\ (A^{-1}+YY_mA) & YA \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_m \\ F_m \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.5}$$

把 (5.5) 变换成其 y 参数形式，我们得到

$$\begin{bmatrix} I \\ F_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Y & A^{-1} \\ -A^{-1} & Y_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ V_m \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

式中

$$Y=\frac{\partial I}{\partial V}\Big|_{V_m=0}$$

$$A^{-1}=\frac{\partial I}{\partial V_m}\Big|_{V=0}=-\frac{\partial F_m}{\partial V}\Big|_{V_m=0}$$

和

$$Y_m=\frac{\partial F_m}{\partial V_m}\Big|_{V=0}$$

如果把回转器移到机械谐振器 Y_m 的右边，就得到图 5.7 (b) 的网络。注意机械电路中的并联元件变成了等效电路中的串联元件。按 $ABCD$ 矩阵记法，我们可以写出

$$\begin{bmatrix}0 & A\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ Y_m & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & Z\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & A\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix} \tag{5.7}$$

乘开并使各项相等后可得

$$Z=A^2Y_m$$

如果让换能器自由振动，图 5-7 (b) 所示电路的机械终端就是悬空（开路）的。跨过回转器，就把这种开路反映为短路，从而图 5-7(b) 的网络变为图 5-6(c) 的网络。

可以把图 5-7 的前两个等效电路转化成图 5-7 (c) 和 (d) 所示的网络，图中将能器电容 C_0 表示成串联电容器并将机械网络用并臂元件的并联来表示。图 5-7 中最末一个电路的重大意义在于所得电气元件的拓扑和对应机械网络用的相同。因此，该电路既是等效电路，又是电模拟网络（在严格意义上说）。

为了获得图 5-7 (c) 的网络，我们把 $+C_0$ 和 $-C_0$ 串联加到图 5-7(a) 中 C_0 的右边和左边。由 $\pm C_0$ 所组成的 T 节表示一倒量器，即图 5.7(d) 中所示的二端对网络 κ，它具有特性

$$\begin{bmatrix}V_1\\ I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & j\kappa\\ j/\kappa & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_2\\ I_2\end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

式中 $\kappa=1/\omega C_0$。这个倒量器仅在窄频率范围内（这时 κ 近似为常数）才具有类似理想倒量器的性质。

虽然（5.4）的回转器和（5.8）的倒量器二者都把串联元件转化成并联元件等等，但此时的倒量器有两个电端对，而机电回转器却有一个电的和一个机械的端对。还应注意，通过把右边的 C_0 移到回转器的右边（由（5.7）导致电容器被转换成柔量），并将二柔量结合在一起，结果总柔量就是 C_m^D。这种变换（按 $ABCD$ 参数记法）利用（5.7），可以写成：

$$\begin{bmatrix}1 & 1/\omega C_0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & A\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/\omega C_m^E & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & A\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/\omega C_m & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/\omega C_m^E & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & A\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/\omega C_m^D & 1\end{bmatrix},\qquad(5.9)$$

式中 $C_m=A^2C_0$ 和 $C_m^D=(1/C_m+1/C_m^E)^{-1}$。上标 D 表示：所论课题中的机械参数是在电开路情况下测量的。因此，换能器的机械谐振频率，在开路情况下是 C_m^D 的函数，而在电终端短路时则是 C_m^E 的函数。因为 C_m^D 小于 C_m^E，故开路换能器的自然机械谐振频率大于终端短路时的情况（记住：C_mM_m 乘积类似于 LC 乘积）*。

如果回转器和倒量器二者都被移到机械网络的右边，我们就得到等效电路，图 5-7(e)，它和原来图 5-7(a) 的机械网络有同样的拓扑。我们将在以下各节中大量利用这种等效电路。

最常用的换能器之一，是利用磁致伸缩或焦耳（Joule）效

---

* 这个事实被用于单片机械滤波器的调谐中，这里通过把所有其他电极对都开路，而使每个电极对的谐振都隔离，然后测量，并将其频率调整到规定值。开路的电极对是在滤波器通带以上谐振的，而且对被测电极对的影响只是二阶的。

应，这种效应是关于对材料施加磁场会使材料在尺寸上有所改变。图 5-8(a) 中所示的磁致伸缩换能器，由线圈、永久磁铁（为了要防止倍频而提供偏磁通）和铁氧体杆组成。在棒的声波半波长谐振区域内，策动点电抗首先通过极点，然后在稍高的频率下通过零点。换能器线圈电感 L_0、以及由 L_1 和 C_1 所代表的产生零极点的机械棒，示于图 5-8(b)。可以把这种简化的策动点阻抗网络，以大致类似于在电场换能器情况下进行过的同样方式来展开成二端对网络。

当使用导纳型等效电路（其中力是穿行变量，模拟于电流）的时候，磁场换能器的等效电路较电场换能器的等效电路稍微简单些。其理由是描述机电变换的二端对网络具有理想变量器而不是回转器的形式。按 $ABCD$ 矩阵项，

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_m \\ F_m \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

这种变换的互易性质（$AD-BC=1$）和下述事实是一致的：当机电设备的一端是用电场换能器而另一端是用磁场换能器来组成时，组合系统则是反互易的。这种方法可用来设计隔离器，这里大部分能量传输仅按一个方向进行。在滤波器的两端都使用同样型式的换能器时，它将是一个互易设备，这意味着对整个滤波器来说，输入到输出间互易性适用。换能器组合的互易或反互易的性质，可以由 (5.4) 和 (5.10) 的矩阵相乘来确定。

用 η、串臂电阻抗 $Z=sL_0$ 和并臂力阻抗 Y_m 来描述磁场换能器，我们可以写出

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_m & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_m \\ F_m \end{bmatrix}=$$

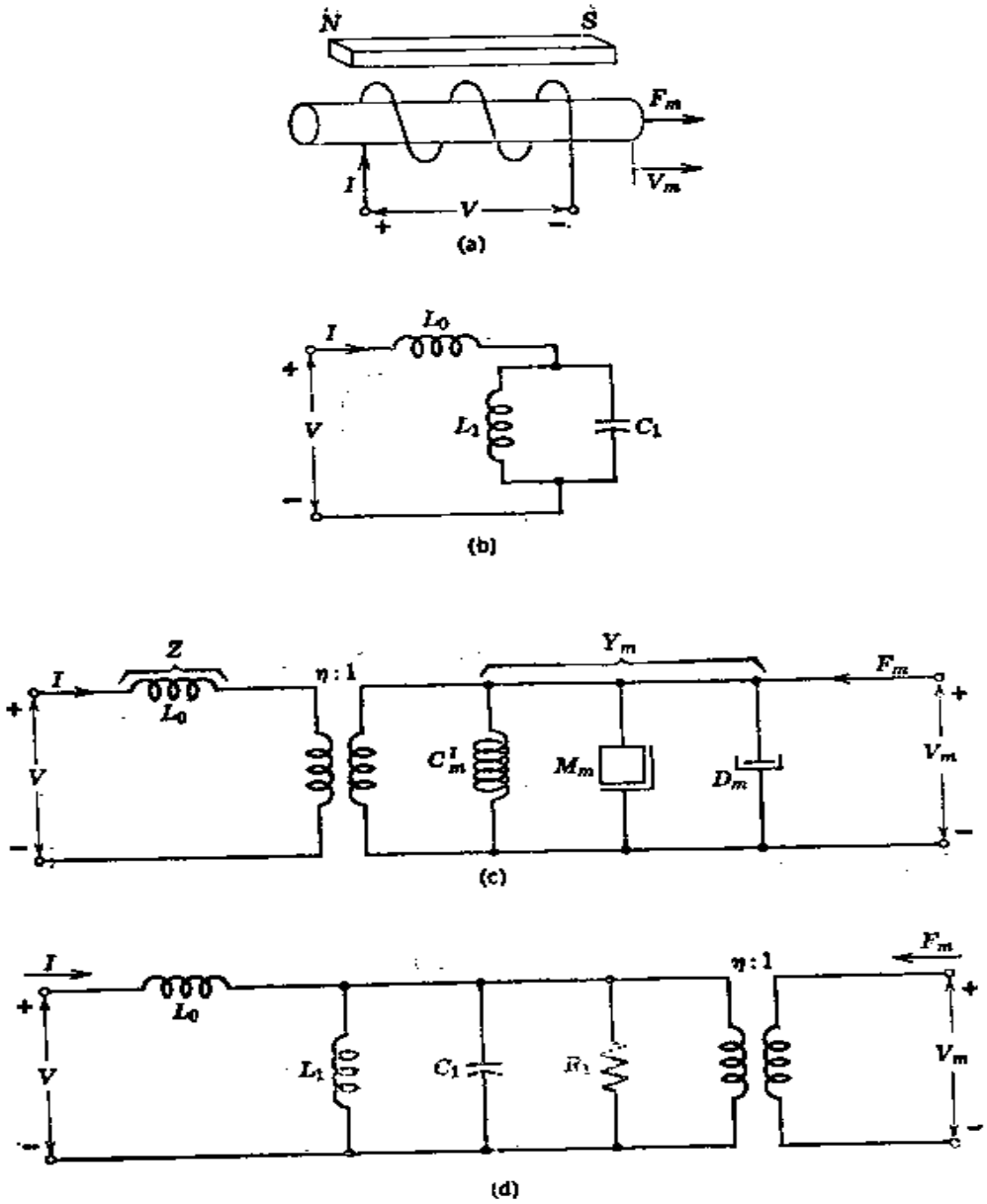


图 5-8　磁致伸缩换能器：(a) 实形图，(b) 简化的电抗网络，以及 (c) 和(d) 根据电压速度导纳型模拟的等效电路

$$=\begin{bmatrix}(\eta+Y_m Z\eta^{-1}) & Z\eta^{-1}\\ Y_m\eta^{-1} & \eta^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_m\\ F_m\end{bmatrix} \tag{5.11}$$

或按“h”参数形式，

$$\begin{bmatrix}V\\ F_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z & \eta\\ -\eta & Y_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ V_m\end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

方程（5.12）描述图 5-8(c) 中所示的等效电路。将机电变量器移到机械网络的右边，就把机械元件变换为电元件，但并不改变拓扑。

5.3 换能器、谐振器和耦合元件

分析了等效电路的一般课题后，现在我们将更密切地考察具体的机电元件和机械元件，即：压电和磁致伸缩换能器、机械谐振器和耦合线。在所有情况下我们都将牵涉到寻求二端对网络元件的描述问题。在换能器和谐振器的情况下，对于寻求谐振频率和等效质量的方程将相当详细地加以讨论。

磁致伸缩换能器

在前节中，用机电变量器（η）或回转器（A）来表示了机械参数和电参数之间的关系。使线圈电感 L_0 和换能器杆的等效电感 L_1 相联系的一种很方便参数，就是有效机电耦合系数 k_{em}（我们将给予定义）。如果可以找到换能器杆的等效质量及柔量和滤波器中其他机械元件之间的关系，则我们在寻求表示整个机电滤波器的等效电路中将没有困难。

把机电耦合系数定义为储存于机械电路中的能量对全部输入能量之比，我们得到[2、7]，

$$\frac{k_{em}^2}{1-k_{em}^2}=\frac{L_1}{L_0}=\frac{f_s^2}{f_p^2}-1, \tag{5.13}$$

或在典型的低耦合系数（$k_{em}^2 \ll 1$）、高度稳定的磁致伸缩换能器中，

$$k_{em}^2 \approx \frac{L_1}{L_0} \approx \frac{2(f_s-f_p)}{f_p}. \tag{5.14}$$

(5.13) 和 (5.14) 中的下标 s 和 p，对应于图 5-8(b) 所示网络的串联和并联谐振频率（策动点阻抗的零点和极点）。典型的铁·镍·钴 (Fe-Ni-Co) 杆型磁致伸缩换能器具有耦合系数在 0.10 和 0.15 之间。

用等效电路来表征机械滤波器的下一步是对换能器杆作进一步的详细考察。这将包括关于其机械二端对网络参数、谐振频率、以及(通过使用耦合系数可转化为电参数的)等效质量和柔量的描述。

按纵向模式振动的细长杆，类似于电磁传输线。可以把杆考虑为每单位长度有某一定值的质量并联接地，而且每单位长度串联有相应大小的柔量。把长度为 l 和截面积为 A 的杆示于图 5-9。

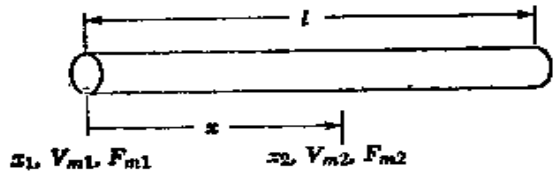


图 5-9 磁致伸缩换能器杆(传输线)

如同电磁线的情况[2]一样，可以把传输矩阵用传播常数 β、离一端的距离 x 和特性阻抗（实际上在机械情况下为力导纳）Z_{m0} 来写出。因而对于无耗情况，

$$\begin{bmatrix} V_{m1} \\ F_{m1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\beta_m x & jZ_{m0}\sin\beta_m x \\ \frac{j}{Z_{m0}}\sin\beta_m x & \cos\beta_m x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{m2} \\ F_{m2} \end{bmatrix}$$

$$\beta_m=\frac{\omega}{v_p},\quad v_p=\sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}},\quad Z_{m0}=\frac{1}{A\sqrt{\rho_m E_m}}\qquad(5.15)$$

式中 ω 为角频率、E_m 为扬(Young)氏模数、v_p 为杆中延伸波的传播速度、以及 ρ_m 为材料的密度。β_m、v_p 和 Z_{m0} 的方程被用于本章许多式子的推导。

如果杆的一端悬空(开路)，即当 $x=l$ 的时候 $F_{m2}=0$，我们可以把另一端的策动点力导纳表达式写出为

$$Z_m=\frac{V_m}{F_m}=\frac{\cos\beta_m l}{\frac{j}{Z_{m0}}\sin\beta_m l}=-jZ_{m0}\cot\beta_m l.$$

杆的自然谐振发生在对应于 $\beta_m l=n\pi$ 时的开路策动点力导纳极点(电情况中的开路阻抗极点)。因而

$$\beta_m l=\frac{\omega l}{\sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}}=n\pi\quad n=1、2、3、\cdots$$

或求解 ω，

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}},\quad n=1、2、3、\cdots\qquad(5.16)$$

下一个问题是要寻求棒在一端悬空时另一端的等效质量。等效质量 M_{eq} 的定义是分布参数杆在已知点并在特定固有频率范围内的等效集总质量。因此，它的值可以用该点速度平方的一半除整个系统的动能来确定。故

$$M_{eq}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^l(V_{m1}\cos\beta_m x)^2\rho_m A\,dx}{V_{m1}^2}.$$

利用 $\beta_m l=n\pi$，我们得到，

$$M_{eq}=\frac{\rho_m l A}{2}=\frac{M_{static}^{*}}{2} \tag{5.17}$$

$$C_{eq}=\frac{1}{\omega_n^2 M_{eq}}=\frac{2l}{\pi^2 A E_m}.$$

可以用方程(5.17)来描述半波长谐振器终端的等效质量和柔量。该谐振器可以是连到调谐盘或杆上的换能器，或者是以谐振元件和耦合元件组成级联形式的许多其他谐振器之一（参看图 5-19)。

在更复杂的振动系统例如厚盘情况下，动能一项将包括所有方向的速度分量。此外，等效质量只有用该点上速度的方向来表示才有意义。因此，如果在某一特定方向的速度为零，则关于那个方向的等效质量为无限大。

压电陶瓷换能器

广泛使用的压电陶瓷换能器就是图 5-10 中所示的组合型或兰杰文（Langevin）型。兰杰文换能器由夹在两个温度特性稳定的金属杆之间的薄压电陶瓷组成。金属的主要目的是为了改进组合谐振器的温度稳定性。虽然机电间的耦合被金属棒减小了，但由于陶瓷本身的耦合系数很高，故整个耦合系数仍然保持十分高。

为了能用如图 5-10 (b)中所示的简单等效电路(其中 C_0 为换能器的静电容，而 L_1、C_1 则表示机械谐振器)来表示兰杰文换能器，我们就必须能用一个计及了棒的两端和陶瓷、金属接界处情况的网络来表示该换能器。在图 5-10 (c)中，我们又把换能器杆当作传输线，或当作密度为 ρ_{mi}、声速为 v_{pi} 和特性力导纳 $Z_{m0i}=(\rho_{mi}v_{pi}A_i)^{-1}$ 的几段传输线的级联来处理。计及

* M_{static} 表示 M 静止，即棒在未振动时的质量或静质量——译注

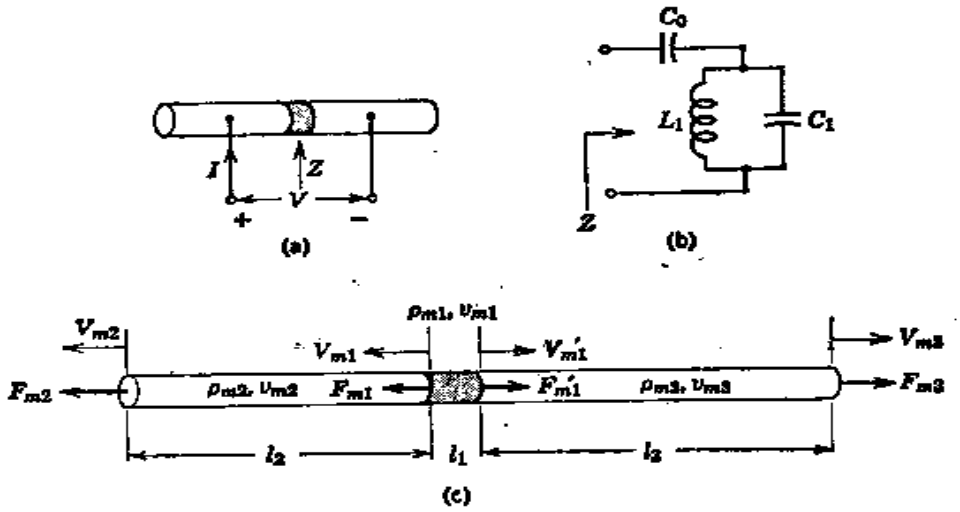


图 5-10　兰杰文换能器：（a）实形图，（b）简化的等效电路，和(c) 表示声学性质的图

了四个机械端对(边界) 和一个电端对的等效电路示于图 5-11。这个等效电路与大多数有关换能器文献[2、8]中所示等效电路的区别在于：我们已一致地把力表示为穿行变量，并把速度表示为跨行变量。这使得有必要象前节的图 5.7 (a)中一样，使用回转器 A。图中的 $-C_0$ 是把图 5.7 (d)的变换器表示成集总

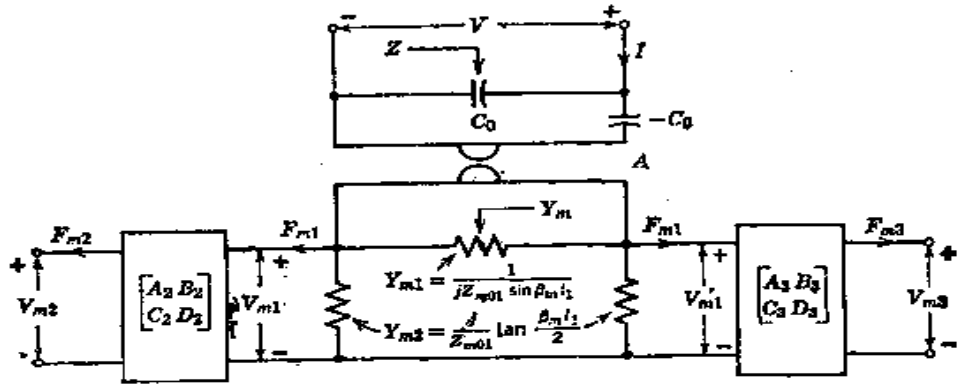


图 5-11　根据导纳型模拟的兰杰文换能器等效电路

元件形式，然后把输入端串联的 C_0 和 $-C_0$ 相消后得出的结果。往往利用这种表示法来表示有与声波传播方向相同的外加电场的换能器。由于在图 5-7 (c)中有使 $+C_0$ 跨过回转器的效应，因而提高了机械谐振频率，故把这类设备叫做"劲化"型换能器。

既然有了等效电路，我们就可以找到组合棒或其机电耦合的谐振频率，这和磁致伸缩情况相类似，与图 5-10 (b)的 C^0 和 C_1 有关。要考虑的一种最简单但最重要的情况是把陶瓷片夹入在两个相同金属杆之间的情况。从而 $l_2=l_3$、$\rho_{m2}=\rho_{m3}$等等。这种情况示于图 5-12 的简图中。组合棒的开路机械谐振频率是在 $Y_m=0$ 处，或从电气端则是 $Z=\infty$。

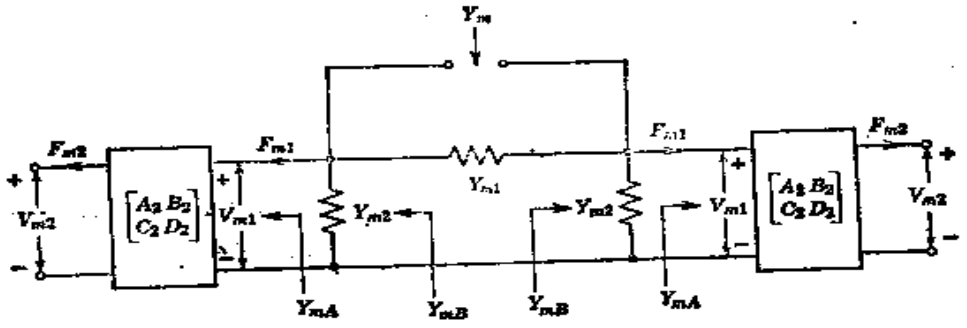


图 5-12　关于 $l_2=l_3$ 情况下的兰杰文换能器
等效电路参看图 5-10(c)

我们可以通过写出 $A_2B_2C_2D_2$ 的表达式来开始我们的分析，即

$$\begin{bmatrix} V_{m1} \\ F_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_m l_2 & jZ_{m02}\sin\alpha_m l_2 \\ \dfrac{j\sin\alpha_m l_2}{Z_{m02}} & \cos\alpha_m l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m2} \\ F_{m2} \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

当 $F_{m2}=0$ 时入端力阻抗，由(5.18)为

$$Y_{mA}=\frac{1}{Z_{mA}}=\frac{C_2}{A_2}=\frac{j\sin\alpha_m l_2}{Z_{m02}\cos\alpha_m l_2}=j\frac{\tan\alpha_m l_2}{Z_{m02}}.$$

Y_{mB} 为 Y_{m2} 和 Y_{mA} 的并联组合，或

$$Y_{mB}=j\frac{\tan\frac{\beta_m l_1}{2}}{Z_{m01}}+j\frac{\tan\alpha_m l_2}{Z_{m02}}.$$

因为网络是对称的，我们可以写出

$$Y_m=Y_{m1}+\frac{Y_{mB}}{2}$$

或

$$Y_m=-j\frac{1}{Z_{m01}\sin\beta_m l_1}+j\frac{\tan\frac{\beta_m l_1}{2}}{2Z_{m01}}+j\frac{\tan\alpha_m l_2}{2Z_{m02}},$$

在利用某些三角恒等式以后，就成为

$$Y_m=-j\frac{1}{2Z_{m01}\tan\frac{\beta_m l_1}{2}}+j\frac{\tan\alpha_m l_2}{2Z_{m02}}.$$

谐振($Y_m=0$)时，

$$\tan\frac{\beta_m l_1}{2}=\frac{Z_{m02}}{Z_{m01}\tan\alpha_m l_2},$$

或因

$$\beta_m=\omega/v_{p1}、\alpha_m=\omega/v_{p2}、Z_{m01}=(A_1\rho_{m1}v_{p1})^{-1}\text{ 和 }Z_{m02}=(A_2\rho_{m2}v_{p2})^{-1}.$$

$$\tan\frac{\omega_0 l_1}{2v_{p1}}=\left(\frac{\rho_{m1}v_{p1}}{\rho_{m2}v_{p2}}\right)\frac{1}{\tan\frac{\omega_0 l_2}{v_{p2}}}. \tag{5.19}$$

知道了换能器的材料和尺寸，我们就可以比较容易地利用数字计算机来求解(5.19)中的谐振频率 ω_0。

谐振元件

可以把先前几节中讨论过的有关换能器的许多概念应用于谐振器的研究。事实上，换能器杆通常就是终端谐振元件的一部分，在有些滤波器结构中它实际上就是第一个或最末一个谐振器。后一情况的例子就是本章第一节中所讨论的片-线滤波器，其中终端片既是换能器又是终端谐振器。另一情况是用磁致伸缩铁氧体杆或陶瓷换能器所驱动的盘-线滤波器。铁氧体和陶瓷换能器都可以直接连到盘状谐振器上，或经过小直径耦合线连到盘状谐振器上。两种情况都示于图 5-13 中。换能器按半波长纵向模式振动，盘状谐振器按挠曲或弯曲模式振动；阴影部分表示同相振动区。

可以把图 5-13 (a) 的换能器-圆盘系统可用图 5-13 (b) 的等效电路来表示其接近谐振的情况。注意两个谐振器可以被合并成单并联调谐电路。在图 5-13 (c)和(d) 的金属线耦合情况下，耦合线可以具有这种尺寸既使换能器杆能充当滤波器的终端谐振元件又使终端圆盘能充当第二个谐振器。在这两种情况中都必须要知道圆盘谐振器对应于换能器杆的谐振频率和（与电容成比例的）等效质量。

与其想解决很复杂的计算圆盘的等效质量和谐振频率的声学问题（这些都可以在实验室中容易地量出），倒不如让我们来看看建立要计及某些不想要的振动模式的谐振器的模型问题。更准确一点说，我们将在测量了滤波器通带附近所有模式的频率和等效质量之后，考虑以集总元件等效电路来建立无耗圆盘谐振器的模型。

假定谐振器是线性和双向的，而且还象大多数线性系统中一样，可以分别激励各个自然模，我们可以写出表示速度模值

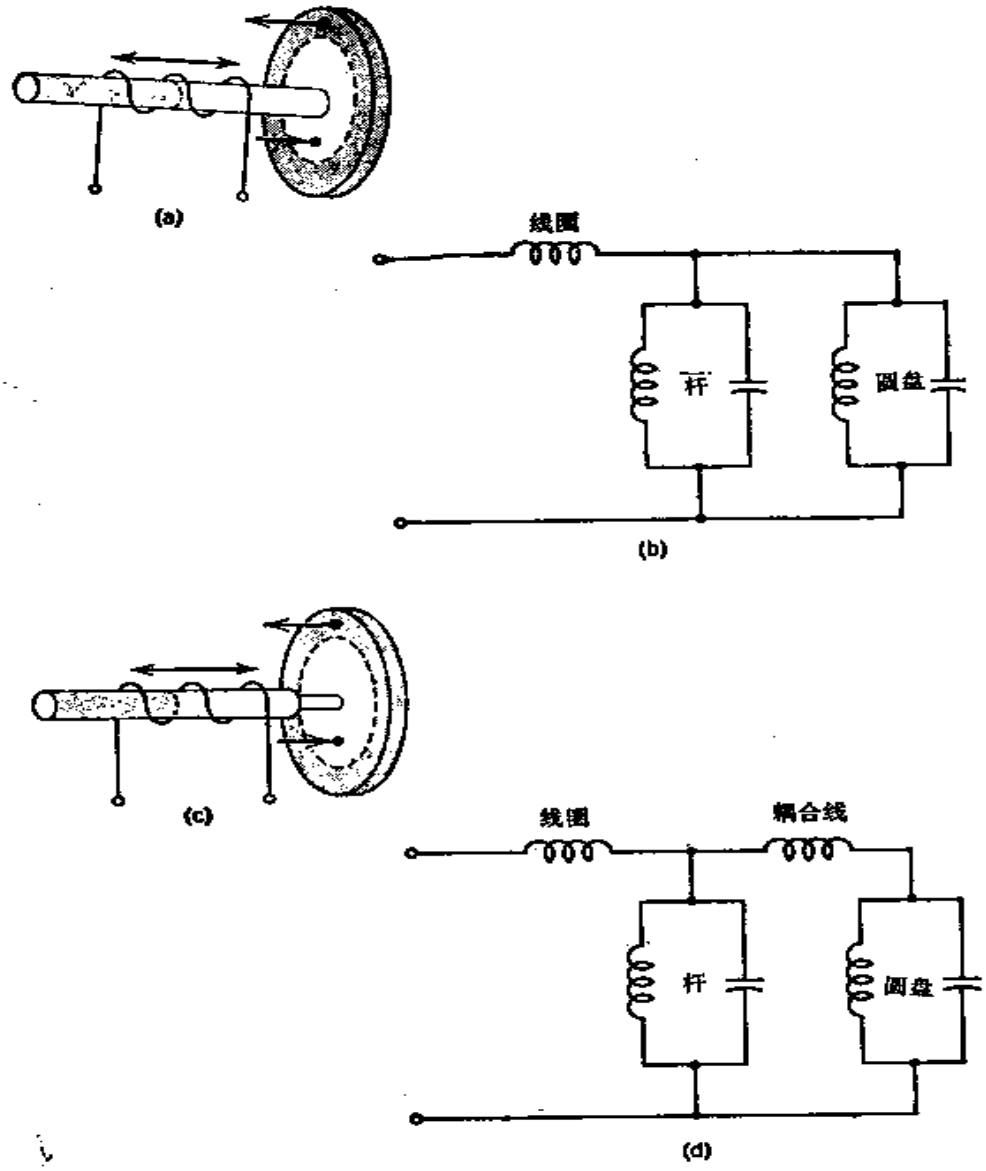


图 5-13　磁致伸缩换能器和终端谐振器装置：(a)和(b)直接连接，(c)和(d)金属线耦合

的式子为

$$|V_{mi}|=\left[\omega\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{M_{mij}(\omega^2-\omega_j^2)}\right]F_{mi} \qquad (5.20)$$

式中 V_{mi} 为在谐振器上 i 点的速度、M_{mij} 为第 j 模式对应于频率 ω_j 的等效质量、以及 F_{mi} 为施加在 i 的力。用 F_{mi} 除 V_{mi}，我们可认出剩下的式子是一电抗函数的部分分式展开式，其中每一项都对应于一福斯特（Foster）型网络中的调谐电路。假定力是穿行变量，我们从（5.20）得到图 5-14 中所示的策动点力导纳（$Z_{mi}=V_{mi}/F_{mi}$）模型。K_{mij} 为 j 模式在点 i 的等效劲度。虽然每个质量都被连接至不同的点或节，但我们可以把这些点都看做是参考节或分离的地。物理上，我们可以认为每个参考（地）是一组与某一特定振动模式 j 相关的节线。总可以把图 5-14 的网络转化成所有的质量均连结至单一地线上（第一个元件将是并联的质量）的考乌尔（Cauer）形式。

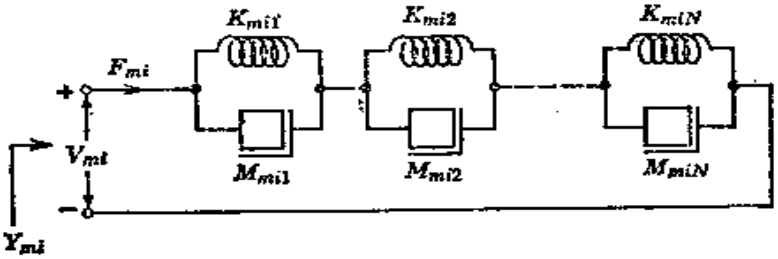


图 5-14　机械谐振器的策动点等效电路

到此为止，我们还是把圆盘当作单端对网络看待的，也就是说，我们所考虑的仅只是圆盘上的一个单点。更一般的集总参数表示法，可以由图 5-15 得来。在图 5-15 (a)中，我们不仅考虑着两种挠曲振动模式，而且也考虑着两个测量点。第一个模式为两直径模式，其中节线把圆盘分成有 180° 相位差的区域（记住：在仅由 L 和 C 组成的网络中，所有稳态电流和电

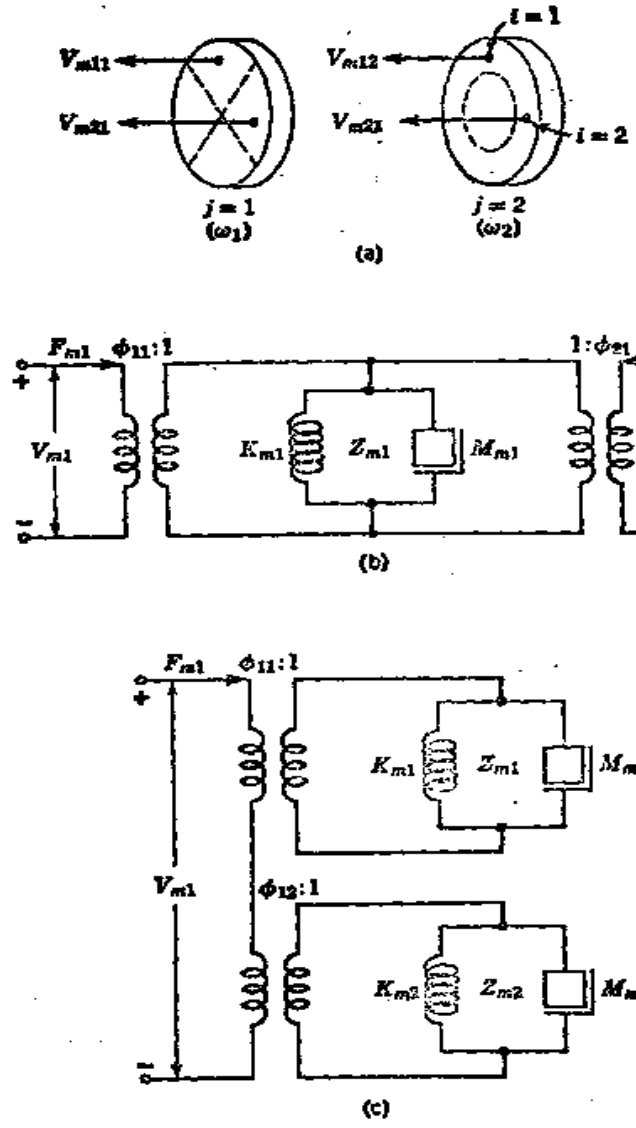


图 5-15　二端对双模式谐振器：(a) 双直径 形波节和圆形波节振动模式，(b) 圆盘(接近频率 ω_1)的二端对网络和(c) 在点(端对)$i=1$ 的策动点导抗简图

压相互间有两种状态；即它们为同相或有 180° 相位差)。

因此，对应于速度 V_{m1i} 和 V_{m2i} 的两点正按相反方向运动。就第二个模式而论，在频率 ω_2 时，这两点同相。考虑到圆盘上诸点间的同相或异相关系，在每一频率下，速度 V_{m1i} 和 V_{m2i} 之间有一种固定关系是不意外的。因为当改变测量点时，振动圆盘的动能不变，所以我们可以期望在圆盘上任何点的等效质量，相对于其他任何点的等效质量来说，将有一固定关系。记住等效质量的定义为谐振器的动能除以某点上速度平方的一半，我们就可以得出结论：网络模型中的等效质量，与它们各自速度的平方成反比。可以预期这类有关等效质量和速度的约束，将导致在机械等效电路模型中使用理想耦合元件(杠杆或变量器)。这确实是图 5-15(b)中所示的情况，这里我们所考虑的仅只是单一振动模式 ω_1。速度比 ϕ_{ij} 被认为是机械网络中的杠杆臂长比，或模拟电网络中的变量器匝数比。因此，把 ϕ_{ij} 定义为初级速度对次级速度之比，我们就可以写出一组方程来描述图 5-15 (b)的二端对网络：

$$\begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}^2 Z_{m1} & \phi_{11}\phi_{21} Z_{m1} \\ \phi_{11}\phi_{21} Z_{m1} & \phi_{21}^2 Z_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{m1} \\ F_{m2} \end{bmatrix} \qquad (5.21)$$

式中 Z_{m1} 为并联调谐电路的力导纳。

既然已经有必要在二端对问题中应用理想变量器，所以也可能在策动点导抗模型中使用它们。考察图 5-15 (a)中圆盘上的一个单点（或端对）$i=1$ 和两个模式 $j=1$、2，不把网络表示成图 5-14 中所示的形式，而用图 5-15 (c)的电路来代替它，看来是合乎逻辑的。因此，速度 V_{m1} 通过下式和力 F_{m1} 相联系，

$$V_{m1} = (\phi_{11}^2 Z_{m1} + \phi_{12}^2 Z_{m2}) F_{m1}. \qquad (5.22)$$

利用(5.21)和(5.22)的结果，我们可以通过下列方程组把

具有M端对、N个模式的谐振器的速度表示为力的函数：

$$\begin{pmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \\ \vdots \\ V_{mi} \\ \vdots \\ V_{mM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{m11} & Z_{m12} & \cdots Z_{m1i} & \cdots Z_{m1M} \\ Z_{m21} & Z_{m22} & \cdots Z_{m2i} & \cdots Z_{m2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{mi1} & Z_{mi2} & \cdots Z_{mii} & \cdots Z_{miM} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{mM1} & Z_{mM2} & \cdots Z_{mMi} & \cdots Z_{mMM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{m1} \\ F_{m2} \\ \vdots \\ F_{mi} \\ \vdots \\ F_{mM} \end{pmatrix}$$

式中

$$z_{mkl} = \sum_{i=1}^{N} \phi_{ki}\phi_{li} Z_{mi}.$$

具有 M 端对和 N 个自然模的一般化谐振器模型示于图 5.16 中。

图 5-16 中的M端对，可以看成是换能器以及圆盘上耦合线的固着点。已为各种换能器找到了集总元件等效电路，下面我们将考查耦合线。

耦合线

大多数机械滤波器都利用小直径金属线从谐振器到谐振器来耦合能量。如果金属线按纵向或者按扭转来驱动，则象在铁氧体换能器和陶瓷换能器杆情况下一样，其等效电路形式就是传输线。如果耦合模式是挠曲的，那么必须把挠矩和角速度二者都加到平移的力和速度上。如果挠曲和纵向模式都出现，象在耦合厚圆盘情况下那样，则等效电路将变得极为复杂。本节我们将只考虑纵向模式的情况，更准确地说，就是短线或者四分之一波长耦合线的情况。

作为本章以下各节的引言，我们将把耦合线描述为模拟电网络，而不描述成机械长线或弹簧质量系统。首先我们可以再

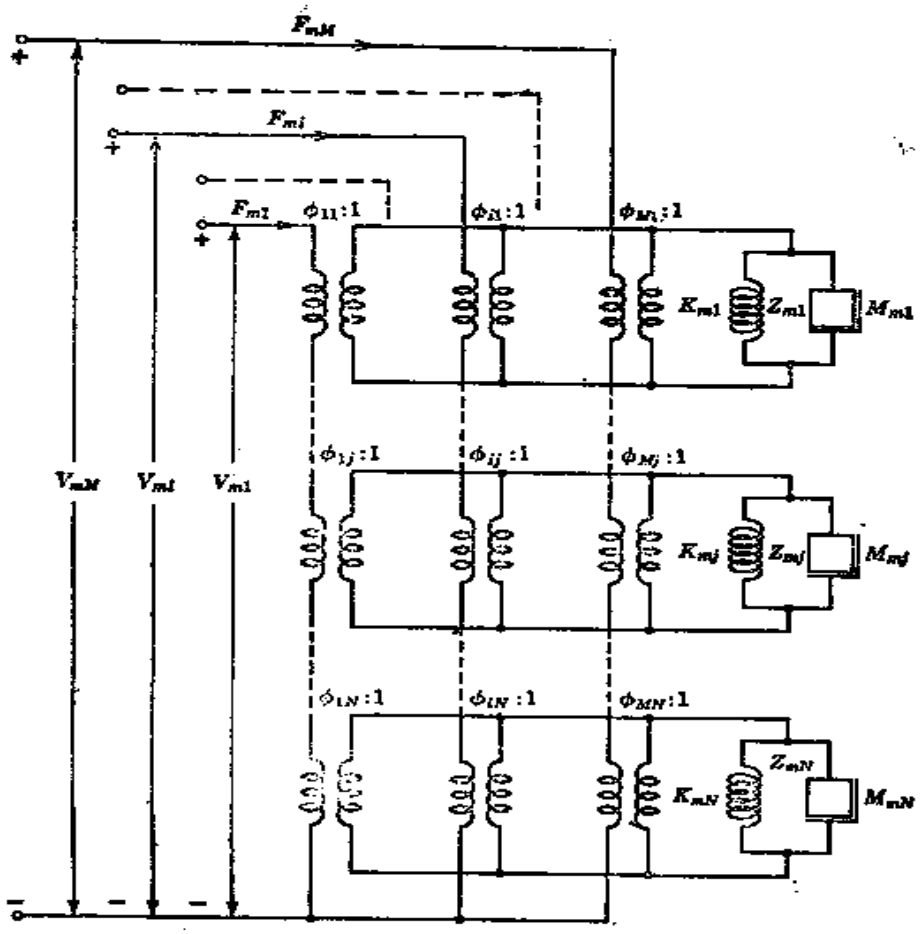


图 5-16 M端对、N模式谐振器的一般化简图

写出(5.15)为

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta l & jZ_0\sin\beta l \\ j\dfrac{\sin\beta l}{Z_0} & \cos\beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

式中 l 为线长、Z_0 为线路的特性阻抗和 β 为传播常数(每单位长度的相移)。考虑到模拟电系统和机械系统之间的关系(即，

拓扑是一样的、电容模拟质量、电感模拟柔量等等），我们可以利用图 5-17(a)所示的 π 网络。图中的 y 为二端对的短路导纳参数，并可由(5.23)得出。因为

$$y_{11}=\frac{D}{B}=\frac{\cot\beta l}{jZ_0},\qquad y_{12}=-\frac{1}{B}=\frac{j}{Z_0\sin\beta l},$$

我们可以利用半角公式来得到并臂导纳，

$$y_{11}+y_{12}=\frac{j\tan(\beta l/2)}{Z_0}.$$

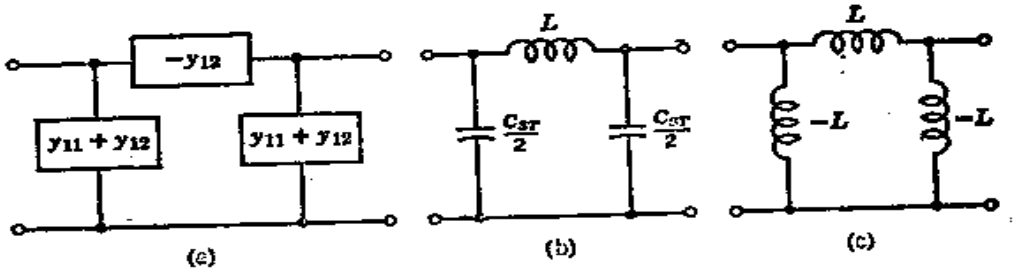


图 5-17　π 型耦合线图说：(a) 一般化二端对，(b) 短段传输等效电路，和(c)四分之一波长等效电路。

在耦合线短于八分之一波长的时候 ($\tan(\beta l/2)\approx\beta l/2$)，该并臂可用模拟金属线静态质量的一半的电容 $C_{ST}/2$ 来充任。其串臂则用模拟柔量 $C_m=l/AE_m$ 的电感 L 来代换，如图 5-17(b)所示。

要考虑的一种很有用的情况，是耦合线为四分之一波长的情况。通过使(5.23)中的矩阵元和图 5-17(c) 的 $ABCD$ 矩阵中的相等，不难证明图 5.17(c)的等效电路近似等效于四分之一波长线。这样一来，我们可求得

$$L=\frac{Z_0}{\omega},\tag{5.24}$$

或在诸机械项中，利用(5.15)中 Z_0 等的定义，

$$C_m=\frac{2l}{\pi AE_m} \tag{5.25}$$

比较(5.8)、(5.23)和(5.24)，可以看出，对四分之一波长线来说，$\kappa=Z_0=\omega L$。

5.4 窄带单调衰减响应的设计

设计机械滤波器的过程基本上就是设计一个考虑了各种机械约束的电滤波器的过程。由于这样一些原因：(1) 与讨论耦合机械系统综合的文献相比大量的是讨论 LC 滤波器设计的文献，和 (2) 大部分网络分析和综合的计算机程序均按电参数写出的现实情况，故许多机械滤波器的设计是按电的关系来进行。因为成本问题和实际可实现性的缘故，考虑机械方面的约束是必要的。作为一个例子，在盘-线滤波器中，最经济的是使所有圆盘谐振器都具有相同的尺寸。因此，所用的设计方法，可以是等谐振器滤波器的直接综合，或涉及一系列会得出同样结果的变换。

比相关元件值更为重要的一种限制是，机械滤波器的拓扑，由于考虑经济情况或者由于实际可实现性，使其拓扑的选择是很有限的。因此，即使我们有极好的格形综合计算机程序，也可能不会直接有用，因为可能没有实现机械格形的方法，或至少必需使用电变换器。不过，也许可能把格形网络变换为能用机械谐振器和耦合线来实现的梯形网络或桥T形网络。因此，网络变换的课题，对机械滤波器设计者是极重要的。

插入衰减法和影象参数综合法对设计者来说，都是可以利用的。影象参数设计的知识对设计者很有帮助，因为它为设计

者提供了一种简单的方法，可用以检查也许有异常拓扑的电设计的机械可实现性。一旦建立了可实现性，就可以写出插入衰减设计计算机程序来寻求会导致较接近最佳响应的元件值。

低通到带通变换

一种用来设计单调梯形滤波器的插入衰减法是以图 5-18 中所示的变换系列为基础。设计问题是：根据低通（等波纹原

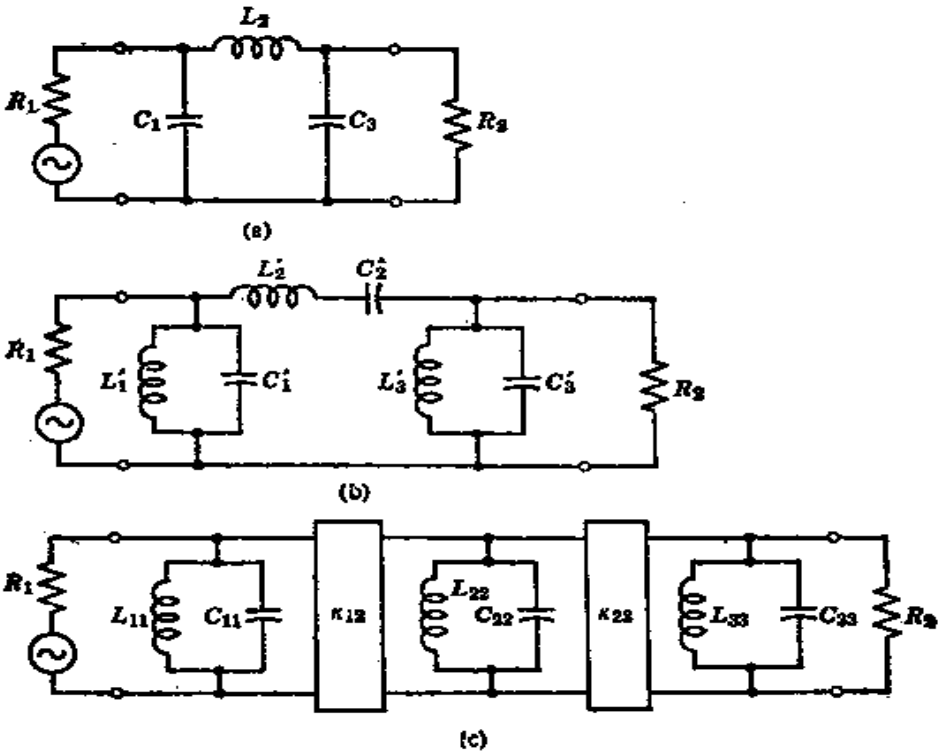


图 5-18　低通到变换器耦合的带通滤波器变换

型），设计一带通梯形机械滤波器，其谐振器具有相同等效质量。需要的输入数据是：谐振器的数目 n、通带波纹、带宽 BW 和中心频率 f_0。从波纹值和谐振器的数目，我们可以计算

低通元件值(必要的方程可在参考文献[9]中找到)。如果利用文献中的数表，我们常可得出用归一化低通耦合系数 k 所描述的低通网络。具有截止频率 ω_c 的低通滤波器的元件值和耦合系数，由下式相联系

$$k_{i,i+1}=\frac{1}{\omega_c\sqrt{C_iL_{i+1}}};\quad i=1、n-1、$$

式中 C_1 可以由归一化的 Q 值 q_1 和终端电阻 R_1 和 R_2 来求出如下[10]：

$$q_1=R_1C_1\omega_c;q_2=R_2C_n\omega_c。$$

可以把图 5.18(a) 的网络元件值经由低通到带通的常规变换转化成图 5.18(b)的元件值。再把倒量器置于诸谐振器之间从而得到的图 5.18(c)的网络。我们可以利用下列方程来避免上述某些工作：

$$K_{i,i+1}=\frac{R_1}{(k_{i,i+1})q_1} \tag{5.26}$$

和

$$C_{11}=\frac{q_1}{R_1BW};\quad L_{11}=\frac{1}{\omega_0^2C_{11}};\quad \omega_0=2\pi f_0 \tag{5.27}$$

式中 κ 为(5.8)倒量器矩阵元 $j\kappa$ 的电抗，BW 为以弧度/秒为单位的带宽，而 C_{11} 和 L_{11} 为诸等值并臂谐振器的电容和电感。

经过运用(5.26)和(5.27)，我们就能计算由相等并臂谐振器（用倒量器耦合）组成的带通滤波器的电元件值。现在的问题是怎样用机械元件来实现谐振器和倒量器？

实现为半波长杆的级联

图 5.18(c)网络的一种机械实现示于图 5.19 中。这种滤波器叫做杆-颈机械滤波器，杆长为半波长，耦合颈长为四分

之一波长。前已论及，在窄频带范围内，可以把半波长谐振器（或换能器杆）用由(5.17)所确定的简单并联弹簧和质量来替换。更精确地说，半波长谐振器的 $ABCD$ 矩阵描述就是

$$\begin{bmatrix} V_{m1} \\ F_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_{m1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m2} \\ F_{m2} \end{bmatrix}, \qquad (5.28)$$

式中用等效柔量和质量所表示的力导纳为

$$Z_{m1} = j\omega C_{m1} + \frac{1}{j\omega M_{m1}} = j\,\frac{C_{m1}}{\omega}[\omega^2 - \omega_0^2] \qquad (5.29)$$

其中，由(5.17)

$$M_{m1} = \frac{\rho_{m1} l_1 A_1}{2}, \quad C_{m1} = \frac{2\,l_1}{\pi^2 A_1 E_{m1}}.$$

换句话说，可以把半波长谐振器由并联谐振器和倒相器来表示，如图 5-19(b)所示。

图 5-18(c)的阻抗变换器 κ_{12}，可以用具有下列矩阵所描述的四分之一波长杆或线来实现：

$$\begin{bmatrix} V_{m1} \\ F_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j\kappa_{12} \\ j/\kappa_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m2} \\ F_{m2} \end{bmatrix}$$

其中，由(5.25)

$$\kappa_{12} = \omega_0 C_{m12} = \frac{2\,\omega_0 l_{12}}{\pi A_{12} E_{m12}} \qquad (5.30)$$

假定谐振器和耦合元件二者都由同样材料构成，我们可以用(5.29)和(5.30)来求它们的横截面积之比。从而

$$\frac{A_{12}}{A_1} = \frac{\left(\dfrac{2\,\omega_0 l_{12}}{\kappa_{12}\pi E_{m12}}\right)}{\left(\dfrac{2\,l_1}{C_{m1}\pi^2 E_{m1}}\right)} = \frac{\left(\dfrac{2\,\omega_0 l_{12}}{\kappa_{12}\pi E_{m12}}\right)}{\left(\dfrac{2\,l_1\omega_0^2 M_{m1}}{\pi^2 E_{m1}}\right)} = \frac{\pi}{2\,\omega_0 \kappa_{12} M_{m1}}$$

和 $l_1 = 2\,l_{12}$。

因为 M_{m1} 模拟于(5.27)的 C_{11}，利用 (5.26) 我们可以写

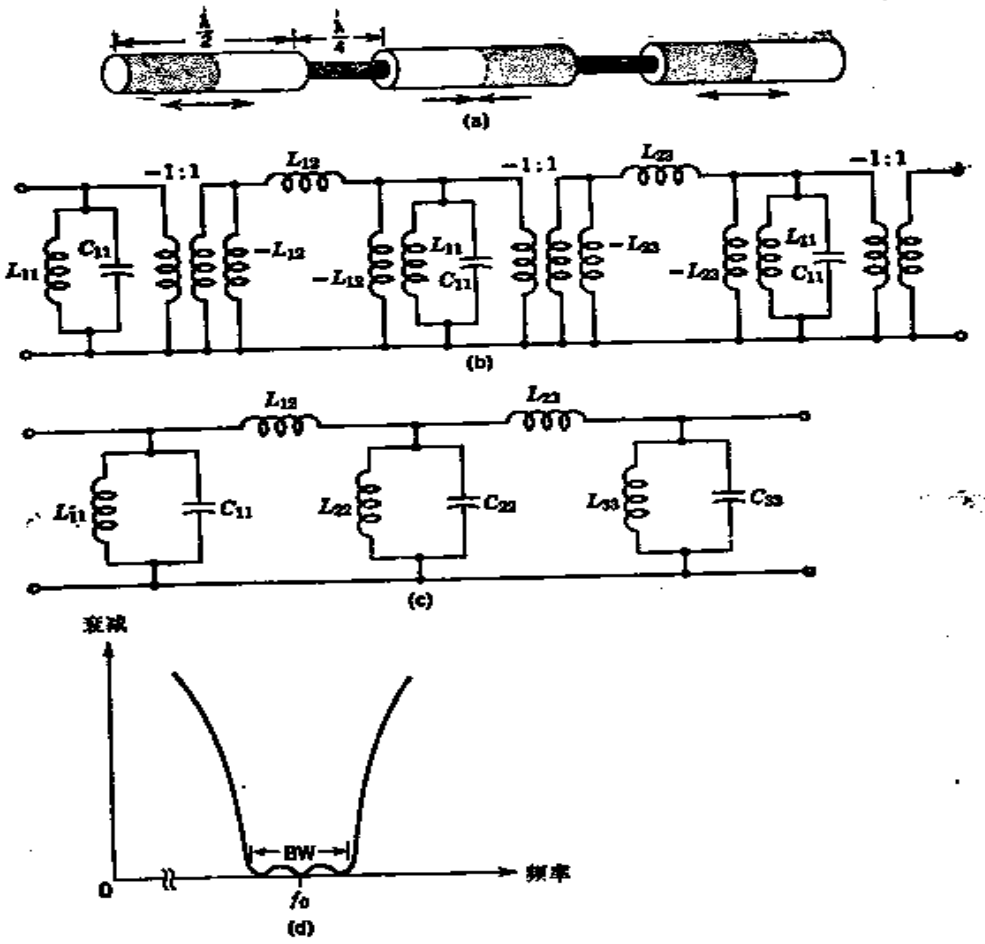


图 5-19　杆-颈机械滤波器：(a) 实形图，(b) 和 (c) 集总元件简图和(d) 频率响应。

出

$$\kappa_{12} M_{m1} = \frac{1}{k_{12} BW}$$

或

$$\frac{A_{12}}{A_1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{BW}{\omega_0}\right) k_{12}$$

或一般说来，

$$\frac{A_{i,i+1}}{A_1}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{BW}{\omega_0}\right)k_{i,i+1}. \qquad (5.31)$$

由(5.31)可见，耦合线的横截面积与分数带宽及耦合系数 $k_{i,i+1}$ 成比例。在等波纹设计的情况下，耦合在终端为最大，随着趋向滤波器的中心而逐渐减小；对于具有大量谐振器的设计，则在中心附近差不多成为不变的常数。

在图 5-19(b)的等效电路中，我们已用由 $\pm L_{i,i+1}$ 值组成的 π 型网络来替换四分之一波长变换器。把所有倒相变量器都移到右端并消去，然后将并臂负耦合元件与谐振器电感合併，就得到图 5.19(c)的等效电路，其频率响应如图 5-19(d)所示。

在这种型式的设计中(其谐振器是用四分之一波长线耦合的)，谐振器是通过变更它们的长度来调谐到频带的中心频率的。耦合元件的长度不是临界的，但必须把直径保持很准确，要不然耦合就会不恰当。对于窄带设计耦合颈的直径，正如我们从(5.31)中见到的那样，将变成很细，因而滤波器会变得很脆弱。此外，在低频率下，谐振器变成很长（要是铁镍合金的，在 100 kHz 时几乎有 1 英寸长），因而图 5-19(a) 中所示滤波器的长度变成不切实际。作为既要增加耦合线（颈）强度，又要缩小滤波器长度的一种方法，我们可以设计如图 5-20(a)所示的机械滤波器。

图 5-20(a)所示折叠设计的第一个谐振器 A，还起兰杰文(Langevin)式换能器的作用并按半波长的纵向模式振动。谐振器之间的耦合线 D 和 E 很短，事实上长度小于八分之一波长。这相当于图 5-17(b)中所示的情况，其中耦合电感 L 模拟于柔量 $C_m=l/AE_m$，而并联电容器则模拟于线的静态质量的一半。把由三个谐振器、两根耦合线组成的滤波器以等效电路形

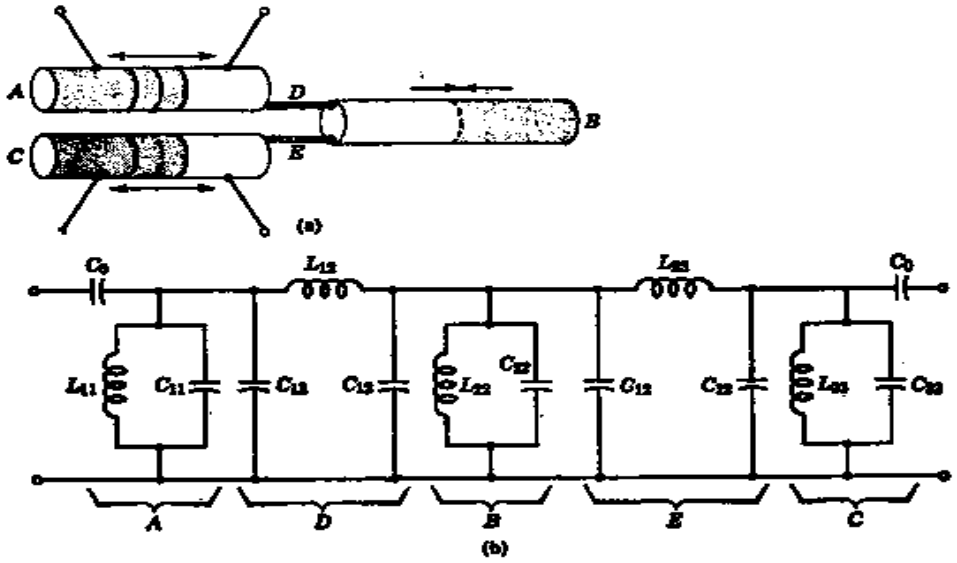


图 5-20　折叠线机械滤波器

式表示于图 5-20(b)中。耦合电感 L_{12} 现在正比于线的长度，并反比于横截面积。可以利用下列方程去求得所需耦合线与谐振器的横截面积比

$$\frac{C_{m11}}{C_{m12}}=\frac{L_{11}}{L_{12}}=k_{12}\left(\frac{BW}{\omega_0}\right),$$

这个方程可比较容易地由(5.26)和(5.27)导出，而其中 $\kappa_{12}=\omega_0 L_{12}$。因为

$$C_{m12}=\frac{l_{12}}{A_{12}E_{m12}}\text{和}\quad C_{m11}=\frac{2\,l_1}{\pi^2 A_1 E_{m1}},$$

所以我们可以写出(对于 $E_{m1}=E_{m12}$ 的情况)，

$$\frac{A_{12}}{A_1}=\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{BW}{\omega_0}\right)\left(\frac{l_{12}}{l_1}\right)k_{12}。\qquad(5.32)$$

将(5.32)与(5.31)相比较，我们可以看出横截面积之比现在与线长成比例；或者，如果我们求解带宽 BW 的话，则带

宽反比于耦合线长度。

在图 5-20(b)的等效电路中除不需要倒相器外，将它与图 5-19(b)相比后还可以得出这样的结论，即必须把短线和四分之一波长情况下的谐振器调谐到不同的频率。由（5.27）可见，在四分之一波长情况下，所有谐振器都调谐到中心频率。因为短线情况也是由同样低通原型导出的，故把图 5-20(b)的 C_{12} 和图 5-19(b) 的 $-L_{12}$ 的效应相比较，就可以求得谐振器频率。换句话说，把 C_{12} 和 $-L_{12}$ 与其相邻谐振器的电容或电感合併后，最终的谐振频率应该相同。在以电的方式调谐换能器的时候，静电容或线圈电感对终端机械谐振器的频率没有影响，而且上面有关谐振器频率的论述仍然适用。如果不从外部调谐电参数，则必须从终端谐振器移去电容或电感，并实行终接电阻与并联电容或电感的窄带并-串联变换。

可以把上述设计单调衰减响应滤波器的一些基本概念应用于多种型式的机械滤波器 [11]。图 5-21 列出了一些设计，其中有些是我们已经讨论过的。所示波节的图形和运动方向适用于耦合元件非常短而且系统振动于其较低自然模的情况。所示的全部结构，都是若干年来在美国、欧洲或日本所已制造的实际设备。有些模式，例如实际上也已使用过的等值线模式（辐射状的、同心剪变和表面剪变），则予省略。此外，片-线和折叠杆-线设计以及若干其他纵向和挠曲模式设备也已包括进图 5-21(a)中了。

图 5-21(e) 和 (g) 中所示的两种挠曲谐振器设计，常用于从几百 Hz 到 50 kHz[12] 的低频率。图 5-21 中所示的其他滤波器则使用在 50 kHz 到 500 kHz 的频率范围。所有设计的相对带宽(带宽对中心频率之比)，在 0.1% 到 10% 范围，下限受谐振器 Q 和温度稳定性约制，而上限则由不需要的模式和换

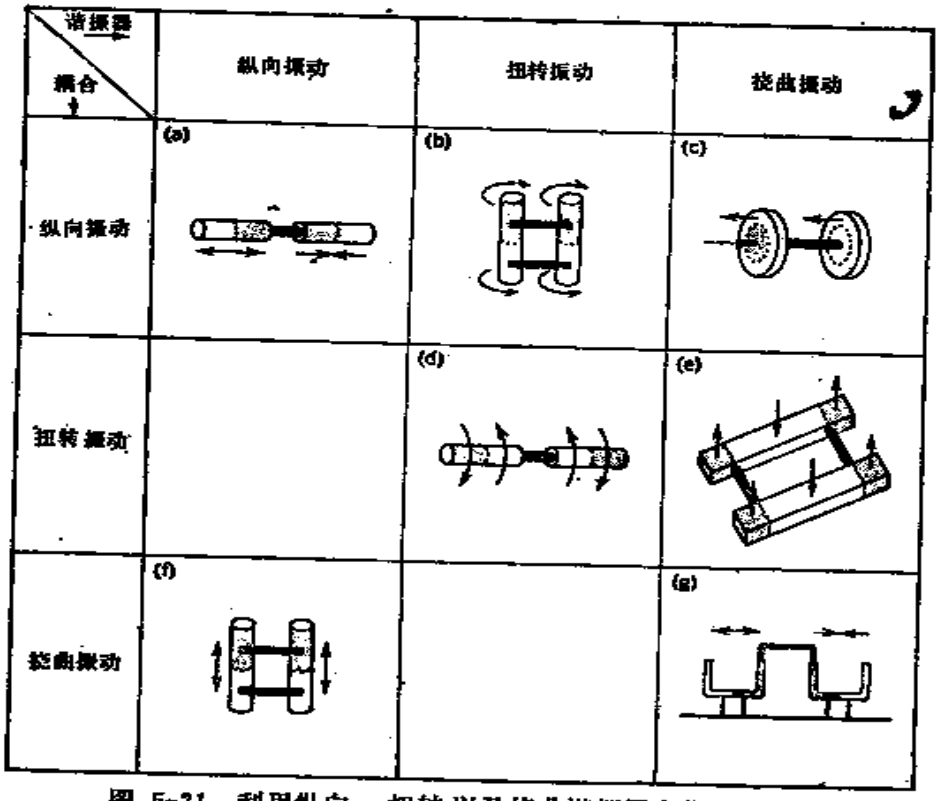


图 5-21 利用纵向、扭转以及挠曲谐振器和耦和元件的、各种机械滤波器结构。阴影区中的位移为同相(在较低自然模)

能器的机电耦合系数来确定。在所有情况下，较高的选择性都要靠增加更多的谐振器来达到。增加更多的谐振器，当然会增加设备的成本。此外，因为增加更多的谐振器，则通带内的延迟变化更大，而且在多数情况下，通带波纹也会增加（由于制造中的实际问题）。为了使谐振器的数目保持最少，已经研究出一些在有限频率下实现衰减极点的方法。

5.5 有限频率衰减极点

已有许多方法可用来实现有限频率衰减极点。这些方法包括使用谐振耦合元件(在梯形的串臂中产生极点)、多谐振器模式(梯形并臂的零点导致的)、以及用桥接线来耦合不相邻的谐振器等[13]。后一种方法是最有效的，将在本节中详细地加以讨论。

图 5-22(a) 示一 3 圆盘谐振器节，其中有一根耦合线跨越了中间圆盘。在滤波器通带频率的下沿以下，所有三个谐振器都同相振动。在通带上沿以上的频率，则由于各个谐振器在通带以后都有 180°的相移，结果使中间谐振器的振动与终端谐振器不同相。由于中间谐振器所呈现的衰减及其不同相的振动，在上阻带内将存在这样一个频率，在这个频率下，通过三根耦合线和一根桥接线的诸力之和等于零，从而在终端谐振器中不会引起运动，这就是说，产生了一个衰减极点，如图 5-22(b)所示。

设计这类滤波器的一种方法、示于图 5-22(c)—(f)中。图 5.22(c)中所示的滤波器节，可以利用第 2 章和第 3 章中论述过的方法来设计。因为我们设计的是带宽较窄的器件，所以我们可以在谐振器之间、引用由 L 和 $-L$ 组成的倒量器，如图 5-22(d)所示。从(d)变为(e)时，我们将 $-L$ 与谐振器的电感合併，然后进行中间并臂的 3 元件电抗变换。在从(e)到(f)的最末一步中，作了简单的由 T 到 π 的电感变换。此时所有元件值都是正的；图中的谐振电路代表圆盘谐振器，而电感则对应于耦合线的柔量。由于圆形波节挠曲振动模式的对称性，耦合相邻圆盘的所有三根金属线、可以用单一电感器 L_{12} 来表

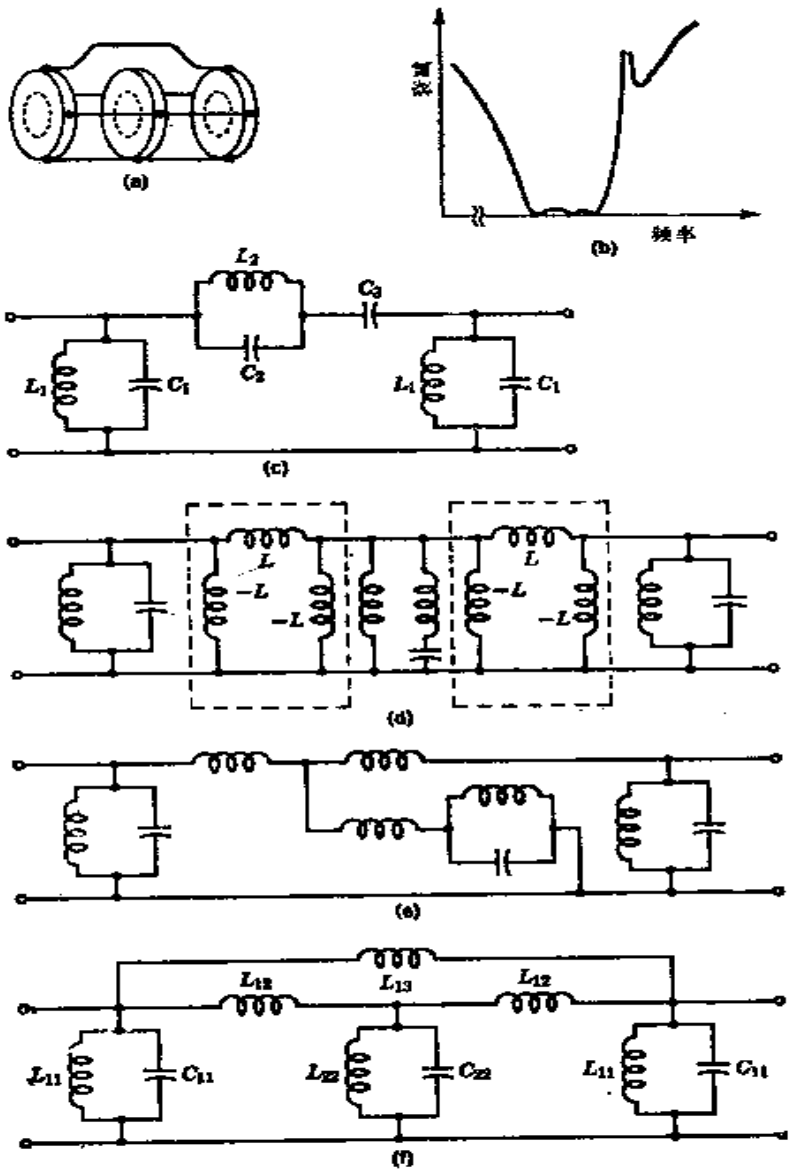


图 5-22　无倒相变换的桥接单谐振器：(a)盘-线滤波器节，(b) 频率响应，(c) —(f)网络变换。

示。

为了在通带的低频率一边、实现衰减极点，可以使用稍微不同的方法。这时我们可从图 5-23(a)中所示的那类网络着手。串臂的三元件电抗变换，导致图 5-23(b)。下一步是倒置中间的谐振器，结果在两终端谐振器之间留下一倒相器和两个阻抗倒量器。[一个臂的倒置过程是先用一个理想变量器与该臂级联。再把该理想变量器变换成一个倒相器（半波长线）和两个阻抗倒量器（四分之一波长线）的级联。然后把阻抗倒量器之一移到臂的另一边，从而将臂倒置。]在一般情况下，简单梯形网络中的倒相器可以忽略，但如果变换是在桥接臂下进行时，忽略倒相器就不对了。因此，在所论的情况下，要把倒相器从桥接电感器下移出来，如图 5-23(c)所示。现在可以把桥接电感器看作是接有倒相器的，或者我们可以想像为桥接线被固着在最末谐振器的一点上，该点相对于相邻谐振器耦合线的固着点、是不同相的。第一种设想可以实现为如图 5-23(d)所示的形式，其中桥接线长度、大于半波长，但小于全波长，倒相器代表示这附加的半波长。如果把倒相器和终端谐振器结合起来，我们就可以把滤波器实现成图 5-23(e)所示的样子。

扭转杆谐振器、纵向线耦合机械滤波器、用于 200 kHz 到 250 kHz 的频率范围。宽广的带宽范围、可以由变更耦合线对波节线的位置来得到。象在任何传输线谐振器中一样，速度（或电压）与 $\sin(2\pi x/\lambda)$ 成比例，这里 x 为离开波节线的距离。故由前节的讨论，阻抗或谐振器的等效质量与 $1/\sin^2(2\pi x/\lambda)$ 成比例。因此，对某一具体带宽来说，如耦合线移向波节线，可以把耦合线直径增大，或者如耦合线移向谐振器的终端，就可把直径减小。这就是设计者在选择机械结构时、

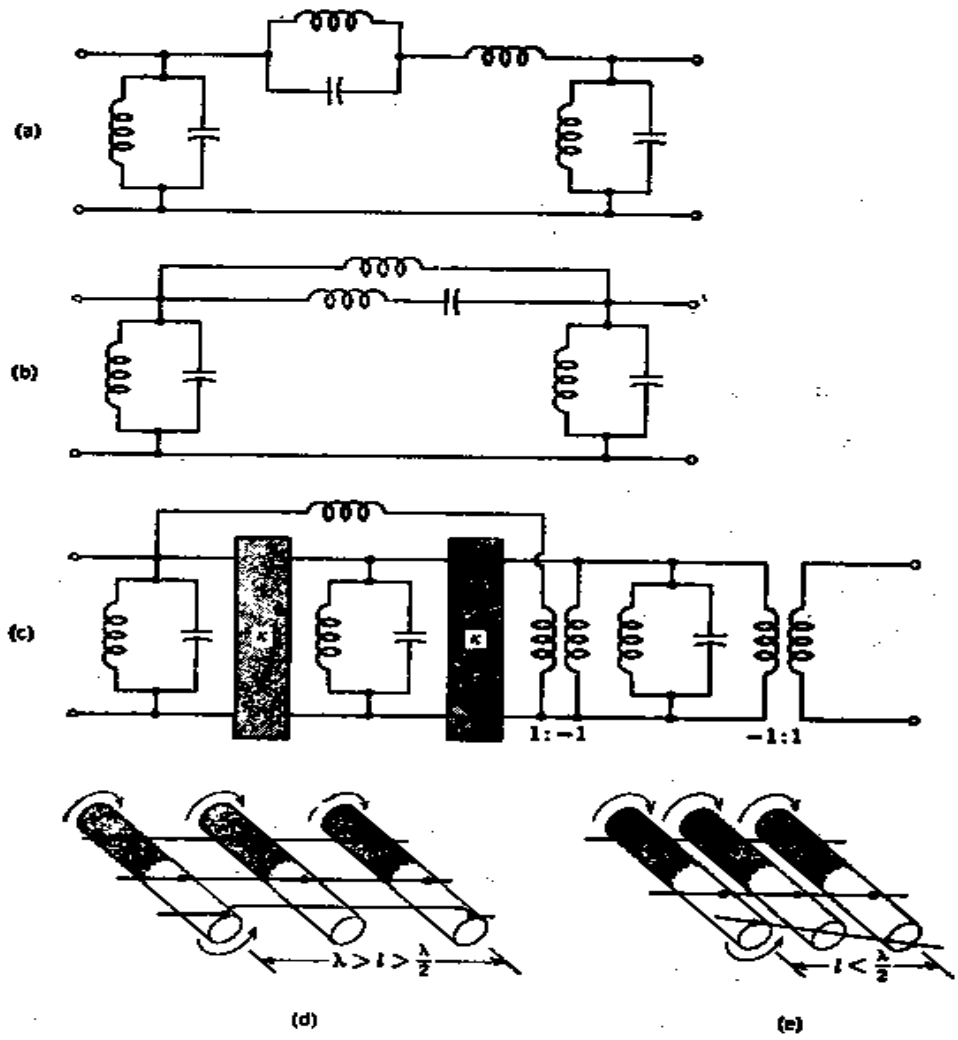


图 5-23　衰减极点处于下阻带情况的单谐振器桥接变换。也表示了不同的杆-线实现。

往往要寻求的一种灵活性。

当用耦合线来跨过两个谐振器作桥接，以便在滤波器通带的两侧实现衰减极点时，还需要另一组变换。一种可以用于低

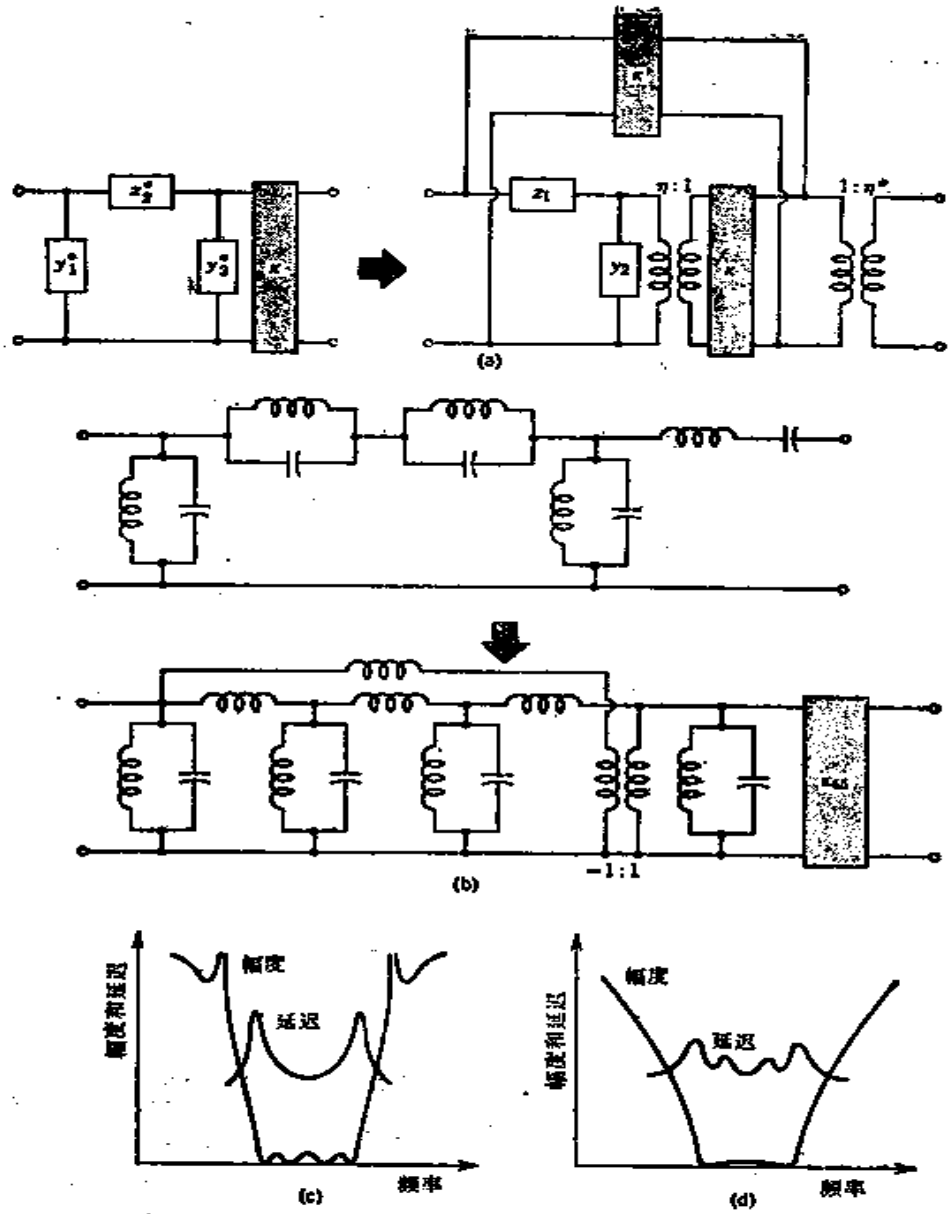


图 5-24　二谐振器桥接变换：（a）一般变换，（b）带通梯形到机械滤波器拓扑，（c)和(d)，用和不用倒相变换的桥接

通和带通滤波器的很有用的变换、示于图 5-24(a)中。这两个网络中的元件值、由下列方程来联系，

$$\eta^* = 1 + \frac{1}{\eta}$$

$$y_1^* = -\eta y_2$$

$$z_2^* = \frac{1}{(1+\eta)(\eta y_2 + (1+\eta)/z_1)}$$

$$y_3^* = (1+\eta) y_2. \tag{5.33}$$

从图 5-24(b)的上面所示网络或其等效低通着手，要得到下面所示的两圆盘桥接节是不困难的。其必要条件是，带通滤波器具有对称响应，即它有等效低通。除图 5-24(a)的变换之外，全部变换中的所有步骤、在单圆盘桥接情况时，都已讨论过了。注意此时在桥接线下使用倒量器，也使桥接线或者终端谐振器需要倒相变换。图 5-24(c)表示滤波器的频率响应。衰减极点是在实、有限频率，而且通带内的延迟响应、大致上是抛物线的。如果倒相器不包括在实现中，则所得的响应（在调整频率和耦合后）就是图 5-24(d)中所示的情况。这就是将 $j\omega$ 轴衰减极点、移到 s 平面右半面的结果，使延迟可能得到补偿。

5.6 单片机械滤波器

本章早就提到了被描述为单片或石英机械滤波器的带通滤波器，可由石英基片和电极对的阵列来构成。图 5-25(a)所示为两电极对单片滤波器的例子，而图 5-25(b)则描述这种滤波器在其某个固有谐振频率下的振动情况。(b)中所示的具体振动模式是沿厚度扭摆（TT），这时向石英片长度 z 的波传播

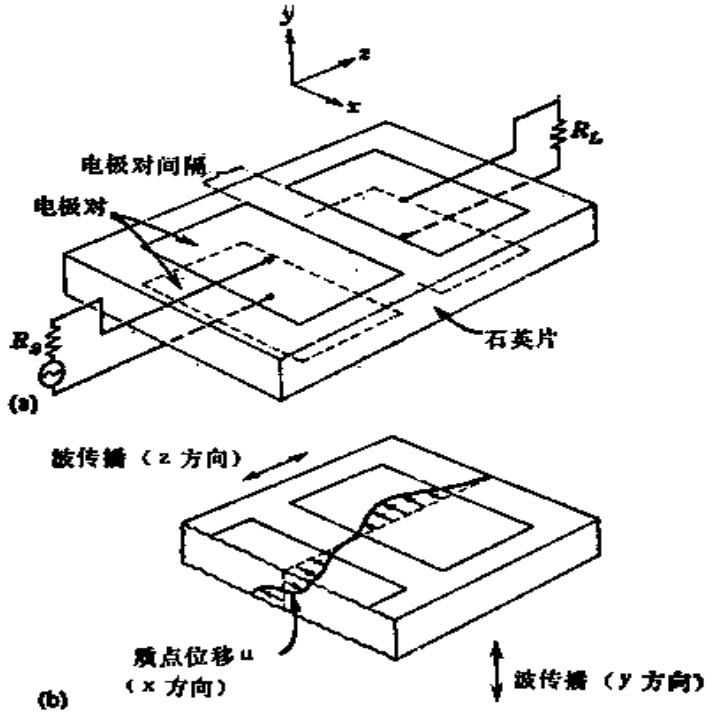


图 5-25　二谐振器单片滤波器：(a) 实形图，(b) 对于沿厚度扭摆(TT)振动模式，表示质点位移和波传播方向的剖视图。

方向、与质点位移 x 的方向垂直。由于石英片是压电的这一事实，故由跨在输入电极对的电压而产生声波（或机械波，如果你喜欢这样称呼的话）。还必须注意：不仅有沿长度方向传播的波，而且也有沿厚度方向(y)传播的波。

沿长度方向传播的波、有两种型式：自由传播波（驻波）和指数衰变波。在无衰减电极区内我们发现的是驻波型，故电极对的作用象谐振器。在电极对之间的区域内，声波衰变，从而使两个谐振器去耦。因此，由电极间的无金属板区域所耦合（或许我们应说成去耦）的两个电极对的系统，就有两个

固有谐振频率。这两种模式间的频率差是一个随电极板的总量以及在两个电极对之间的间隔或距离而变的函数。在由适当电源和负载阻抗所终接的时候，这种带有电极的石英片就变为带通滤波器，其带宽与二固有频率之差成比例。（即为金属板和电极对间隔的函数）。描述单片滤波器特性的方程，与在光学、微波和量子论中得到的方程、是紧密相关的。

单谐振器系统

图 5-26(a)示一单电极对声谐振器[14]。电极通常是淀积在石英片上的银、铬和金的混合物或层。有电极和无电极区在厚度和密度两方面的差别，使得这种系统的准确分析难以进行。更大的困难是石英为各向异性材料，即石英片的声学性质在各个方向是不同的。与其试图分析实际系统，倒不如代之以查看图 5-26(b)的石英片、就可以对单谐振器系统获得良好的基本理解。

图 5-26(b)的谐振器、有两个不同的质量密度（ρ_e 和 ρ_s）区域。下标 e 表示电极区域，下标 s 表示周围区域。术语电极区域尽管多少有些误称，但对观察实际物理系统方面是有帮助的。石英片的厚度为 d，电极区域的宽度为 $2b$。我们将考虑的振动模式、就是图 5-25(b) 中所示的沿厚度扭摆。按照寻求固有频率、来对单电极对情况求解的方法如下：

1．对石英片的每个区域写出波方程。

2．根据一定边界条件，对每个区域假定初步解。

3．把解代入波方程并计算其结果。

4．对石英片的每个区域假定通解。

5．对整个系统写出一组联立方程。从这组方程找到固有频率。

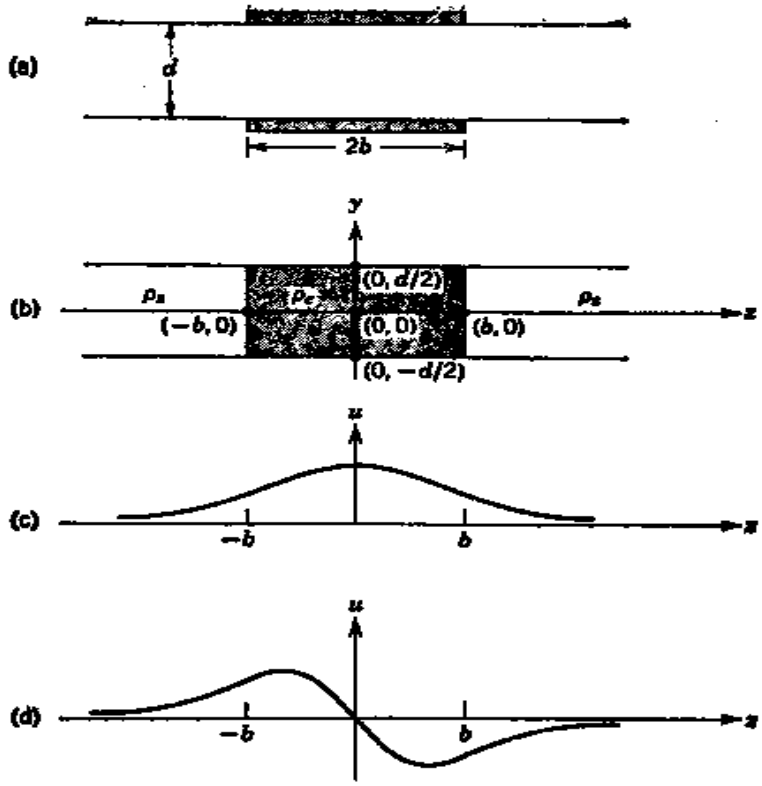


图 5.26 (a)和(b)，有金属板的和可变密度的声（单片的）谐振器，(c)和(d)，在两个最低自然模的质点位移。

6．从物理上解释频率解。

因为我们所考虑的是沿厚度扭摆模式，每个区域的波方程将是剪变波的方程，即

$$\nabla^2 u_c = \left(\frac{1}{v_c^2}\right)\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} \qquad |z| \leqslant b \tag{5.34}$$

$$\nabla^2 u_s = \left(\frac{1}{v_s^2}\right)\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} \qquad |z| > b$$

式中 u 为沿 x 方向的位移。速度 v 为剪变模数除以密度 ρ 的平方根。∇^2 为运算子，

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

我们将假定电极很宽，结果沿 x 方向没有建立驻波。因此我们可以写出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{5.35}$$

因为在表面 $y=\pm d/2$ 处没有垂直应力，故应变也必须等于零；结果是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pm d/2}=0 \tag{5.36}$$

由于边界条件(5.35)和(5.36)的结果，我们可以假定一个解(参看图 5-25(b))

$$u=\sin\beta_m y[Ae^{j(\alpha_m z-\omega t)}+Be^{j(\alpha_m z-\omega t)}] \tag{5.37}$$

式中

$$\beta_m=\pi/d \tag{5.38}$$

在(5.37)和(5.38)中，α_m 和 β_m 分别是沿 z 和 y 方向的传播常数。注意 β_m 由石英片的厚度所决定。

解法中的下一步是把(5.37)代入波方程(5.34)，得出代数方程

$$\begin{aligned}\alpha_m^2&=\frac{\omega^2}{v_c^2}-\beta_m^2=\alpha_c^2-\beta_m^2 \quad |z|\leqslant b\\ \alpha_m^2&=\frac{\omega^2}{v_s^2}-\beta_m^2=\alpha_s^2-\beta_m^2 \quad |z|>b\end{aligned} \tag{5.39}$$

式中 $\alpha_c=\omega/v_c$ 和 $\alpha_s=\omega/v_s$。

如果我们假定 $\rho_c>\rho_s$，那么 $v_c<v_s$，因而有一个频率范围，其中 α_m 在电极区域内为正，而在周围区域内为虚数（α_m^2 为负)。这个范围的界限为 ω_c 和 ω_s，其中

$$\omega_s=\frac{\pi v_s}{d}$$

$$\omega_c=\frac{\pi v_c}{d} \tag{5.40}$$

因此，在频率 ω_s 以下，传播常数 α_m 在周围区域内为虚数从而成为衰减常数，

$$\alpha_m=\pm j\gamma_m;-b>z>b \quad \omega<\omega_s$$

其次，考虑对于片的每个区域的通解。

在频率范围 ω_s 到 ω_c 以内，波的传播在电极区域内是无衰减的，但在周围区域内则有衰减。这导致在边界($z=\pm b$)上将有反射的可能，并将在电极区域内建立起驻波。因为我们所考虑的是一种无限长的片，所有离开电极区域的波都从这个区域向外传播，永不返回。因此可以把我们的通解写成，

$$\begin{aligned}
u_s&=[Ae^{-j\alpha_m z}+Be^{+j\alpha_m z}]\sin\beta_m y\\
u_c&=[Ce^{-\gamma_m z}]\sin\beta_m y;z>b\\
u_s&=[De^{\gamma_m z}]\sin\beta_m y;z<-b。
\end{aligned} \tag{5.41}$$

通过对整个系统写出一组联立方程，我们可以找到片的固有频率。在电极和周围区域($z=\pm b$)之间的边界上，必须满足两个连续方程，即位移的幅度和斜率（对于 z 的）必须是连续的。因此从(5.41)在 $z=\pm b$ 处，我们可以写出，

$$\begin{bmatrix}
e^{-j\alpha_m b} & e^{j\alpha_m b} & -e^{-\gamma_m b} & 0\\
-j\alpha_m e^{-j\alpha_m b} & j\alpha_m e^{j\alpha_m b} & \gamma_m e^{-\gamma_m b} & 0\\
e^{j\alpha_m b} & e^{-j\alpha_m b} & 0 & -e^{-\gamma_m b}\\
-j\alpha_m e^{j\alpha_m b} & j\alpha_m e^{-j\alpha_m b} & 0 & -\gamma_m e^{-\gamma_m b}
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\\D\end{bmatrix}=0 \tag{5.42}$$

只有当由矩阵元所组成的行列式、即所谓特征行列式等于零时，才存在有上面一组齐次方程的解。利用拉普拉斯展开，

我们（对特征行列式）得到

$$2j\alpha_m\gamma_m[2(\cos 2\alpha_m b)]+(\alpha_m^2-\gamma_m^2)[-2j(\sin 2\alpha_m b)]=0$$

或

$$\tan 2\alpha_m b=\frac{2\alpha_m\gamma_m}{\alpha_m^2-\gamma_m^2}, \tag{5.43}$$

其中，由(5.38)、(5.39)和(5.40)

$$\alpha_m=\frac{\pi}{d}\left[\frac{\omega^2-\omega_s^2}{\omega_s^2}\right]^{1/2}$$

$$\gamma_m=\frac{\pi}{d}\left[\frac{\omega_s^2-\omega^2}{\omega_s^2}\right]^{1/2}$$

求解满足(5.43)的频率，可以利用包含方程左右两边对不同ω值来迭代求解的方法。这在数字计算机上是比较轻而易举的。

方程(5.43)可写成

$$\tan\alpha_m b=\frac{\gamma_m}{\alpha_m} \tag{5.44}$$

或另一种形式

$$\tan\alpha_m b=-\frac{\alpha_m}{\gamma_m} \tag{5.45}$$

(5.44)和(5.45)的解对应于图 5-26(d) 和 (c) 中所示的曲线，这些曲线是在该系统的两个自然谐振频率下求解(5.42)中的系数A、B、C、D得来的。

二谐振器系统

在单谐振器情况下，如果我们首先假定一对称解(图 5.26(d))并使幅度和斜率只在一个边界处有等式，然后假定一反对称解并再使幅度和斜率只在一个边界处有等式，则通解的复杂性就能有所简化。结果就是(5.44)和(5.45)。

就图 5-25 的二谐振器系统来说，我们可以假定：两个最低的自然模将有图 5-27 中所示的幅度分布。由于对称性，需要用五个方程来描述这一系统。在 $\pm b$ 处写出幅度和斜率方程，并在 $b+s/2$ 处写出幅度方程。可以把方程之一消去，因为在对称情况下，在两电极中间，两个波幅度(即图 5-27 中所示的系数 C 和 D)的大小和符号都相等，而在反对称情况下，则两个波的幅度大小相等但符号相反（因而在中间的幅度为零)。解系统的特征行列式，我们就得到对称解和反对称解，

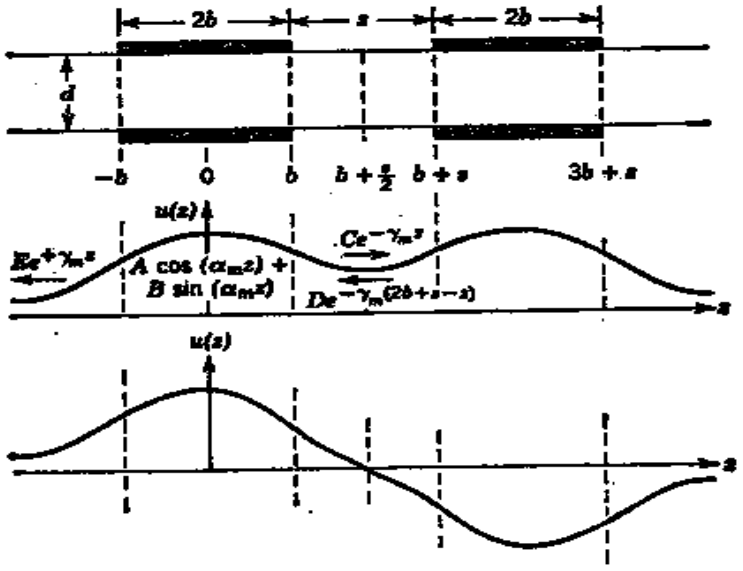


图 5-27　在双电极对单片机械滤波器系统的两个最低自然模的情况下表示其具体结构和质点位移

$$2\alpha_m b=\tan^{-1}\left[\frac{-2\alpha_m\gamma_m}{(\gamma_m^2-\alpha_m^2)-(\gamma_m^2+\alpha_m^2)e^{-\gamma_m s}}\right] \quad (5.46)$$

$$2\alpha_m\gamma_m=\tan^{-1}\left[\frac{-2\alpha_m\gamma_m}{(\gamma_m^2-\alpha_m^2)+(\gamma_m^2+\alpha_m^2)e^{-\gamma_m s}}\right] \quad (5.47)$$

式中的 α_m 和 γ_m 与单电极对系统中所定义的相同。虽然对这

些方程没有闭合形式的解，但在数字计算机上可以容易地求解它们。使用归一化频率变量$\Omega=(\omega-\omega_s)/(\omega_s-\omega_s)$，我们得到图 5-28(a)中所示的曲线。注意当间隔变得很大时，两个固有频率 Ω_1 和 Ω_2 将收敛到近似等于 $(\Omega_1+\Omega_2)/2$ 的值。如果要表示图 5-28(b)的网络的固有谐振频率对耦合电感的曲线，我们会得到本质上相同的曲线。电容器 C_0 对应于电极对的静态电容，并联调谐电路表示电极对区域，而由正和负电感器组成的倒量器则表示电极对之间的区域。

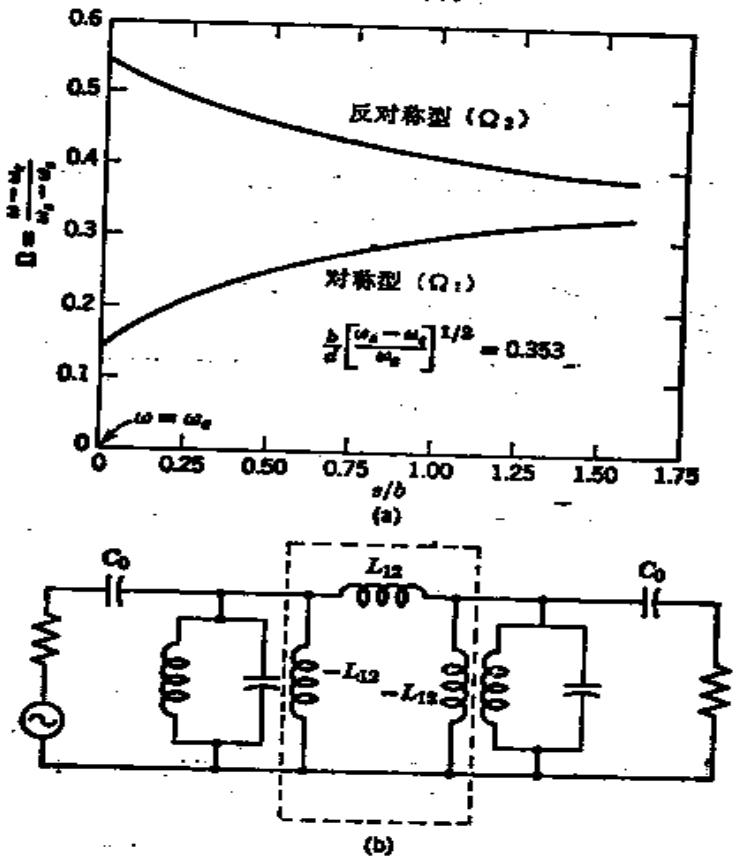


图 5-28　双电极对单片滤波器：(a) 最低固有频率对电极间隔和半电极宽度之比的关系，(b) 等效电路。

使本节所展示的结果普遍化，就有可能以大致类似于设计常用机械滤波器的方式来设计 n 谐振器的石英机械滤波器。有关图 5-18 所示网络的方程，可直接适用于单片情况。可以把等效电路中的耦合和声学系统之间的关系通过利用象(5.46)和(5.47)这样的方程来解析地建立、或者通过在实验室内测量耦合对的带宽来实验性地建立。

5.7 摘 要

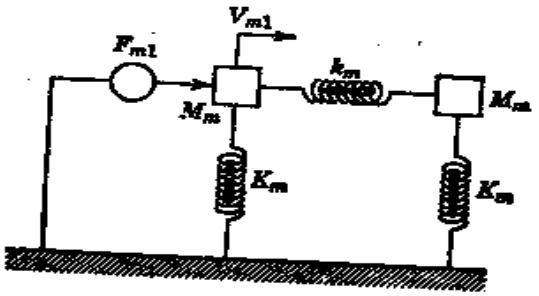
本章有相当大一部分内容是致力于等效电路的论述。这个重点是为了要在电声学和电路理论之间建立起一座桥梁。换句话说，试图把电声学理论和测量转换为电气工程语言。这是以忽略详细的声学问题为代价(单片滤波器情况除外)才作到的。这些问题固然重要，但也许还赶不上能导出可供整个系统分析与综合用的模型那样重要。

根据网络模型，也许最重要的概念是等效质量和机电耦合。例如，机电耦合系数使电网络参数非常简单地和机械参数联系起来((5.14)就是一个例子)。机械谐振器之间的耦合涉及耦合线的柔量和机械谐振元件在耦合点的视在质量(或等效质量)之间的关系。这些关系的彻底理解，对机械滤波器的理解来说是基本的。

单片滤波器方程的推导是很重要的，因为它们几乎可以应用于任何复杂的振动课题，而且同样还可应用于其他领域的课题。

习　题

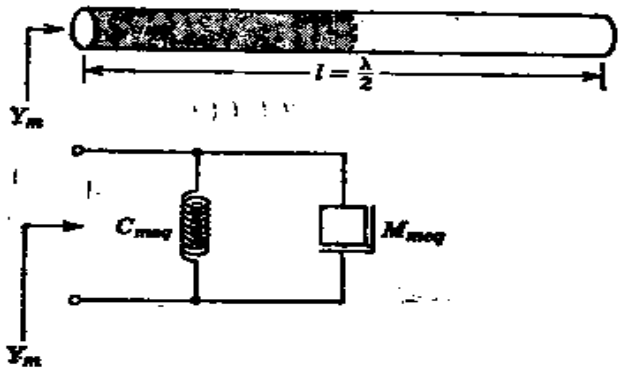
5.1 对于图 5-29 中所示的滤波器，试草拟并标明机械简图和导纳型模拟，计算圆有谐振频率，并把网络表示为 4 元件策动点力阻抗 F_{m1}/V_{m1}(福斯特形式)。



5.2 试草拟图 5-8 中所示磁致伸缩换能器等效电路的另外 3 种导纳型表示法。可以附加回转器和倒量器。

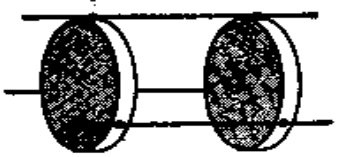
5.3 对于象图 5-7 中所示的电场换能器情况，试依据 C_m^0、M_m、C_0 和下列各项：(a)回转器阻抗 A，(b)机电变量器 n 和(c)机电耦合系数 k_{em}，来表示短路情况下($V=0$)的机械固有谐振频率。

5.4 试用(a)使策动点力阻抗在谐振时的斜率相等和(b)用课本中所提出的方法，求图 5-30 中所示半波长棒的等效质量。



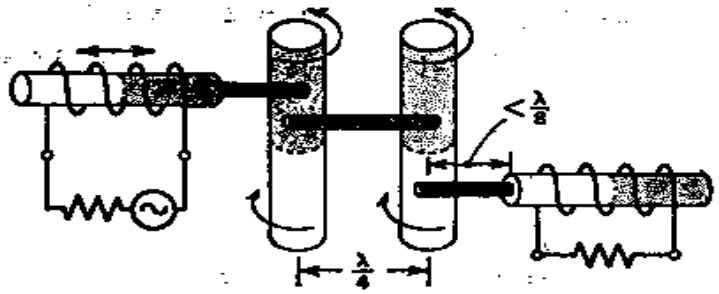
5.5 试草拟图 5-31 中所示的圆盘谐振器、耦合线机械滤波器的机械等效电路。每圆盘只考虑两个固有谐振。以图 5-16 作为参考。假定耦合线短到可以把静态质量效应忽略不计，即假定耦合线只起简单

弹簧的作用。

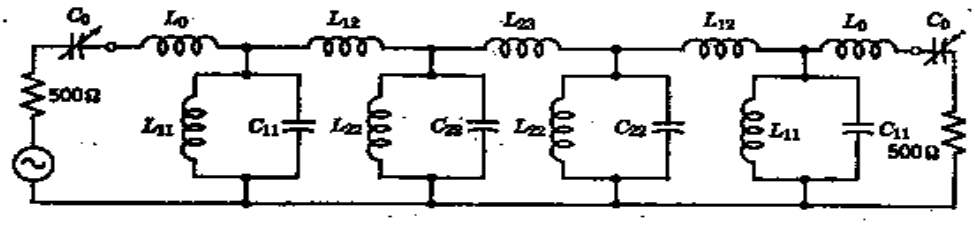


5.6 试用(5.15)证明，短线(短于八分之一波长)的集总元件 π 型等效电路的并臂等于金属线静态质量的一半，而串臂等于柔量 l/AE_m。

5.7 试草拟并标明表示图 5.32 滤波器的、集总元件机械的和电的等效电路。



5.8 计算图 5-33 所示等效电路(表示盘-线机械滤波器的)的元件值。其中心频率为 455 KHz，带宽在 0.1 dB 为 3 KHz。对应于 0.1 dB 波纹的低通参数为：$g_1=g_4=1.34$、$k_{12}=k_{34}=0.690$ 和 $k_{23}=0.542$。假定使用磁致伸缩换能器，且在中心频率用串联电容器加以调谐。机电耦合系数 $k_{em}=0.10$ 已高到可以忽略换能器对频率响应的效应。所有的圆盘谐振器都有同样的等效质量。换能器的等效质量则为圆盘等效质量的一半。用 500 欧来终接滤波器。



5.9 为了使图 5-22(c)的网络变换为图 5-22(b)的网络，试写出(可以容

易按计算机语言编程的)一系列方程。把诺顿(Norton)变换应用于耦合元件，在实现相等大小(电容器值)的谐振器方面往往是有帮助的。

5.10 导出(5.33)。

5.11 分别导出(5.44)和(5.45)。经假定对称（或反对称)，把特征行列式的复杂性简化为 2×2。

5.12 导出(5.46)和(5.47)。为了简化问题的复杂性，须分别导出每个方程以便得以假定对称或反对称。以单电极对情况作为榜样，尽管你也许想用正弦或余弦而不是用指数来表示陷波。

5.13 试草拟 4 谐振器单片滤波器的等效电路。使用导纳型模拟。画出滤波器的实物电路图并讨论电极间隔对等效电路耦合电感的关系。

参 考 文 献

[1] J. P. Maxfield and H. C. Harrison, "Methods of high quality recording and reproducing of music and speech based on telephone research," *Bell System Tech. J.*, 5, 493-523(July, 1926).

[2] W. P. Mason, *Electromechanical Transducers and Wave Filters*, (Sec. Ed., 1948), D. Van Nostrand, New York, 1942.

[3] J. C. Hathaway and D. F. Babcock, "Survey of mechanical filters and their applications," *Proc. I.R.E.*, 45, No. 1,5-16 (Jan., 1957).

[4] R. A. Sykes and W. D. Beaver, "High frequency monolithic filters with possible application to single frequency and single side band use," *Proc. Ann. Freq. Control Sympos.*, Atlantic City, 288-308 (April, 1966).

[5] H. M. Trent, "On the construction of schematic diagrams for mechanical systems," *J. Acoust. Soc. Am.*, 30, 795-800(August, 1958).

[6] H. M. Trent, "Isomorphisms between oriented linear graphs and lumped physical systems," *J. Acous. Soc. Am.*, 27, 500-527 (May, 1955).

[7] R. S. Woollett, "Effective coupling factor of single-degree-of-freedom transducers," *J. Acous. Soc.* Am., 40, No. 5,1112-1123 (May, 1966).

[8] H. W. Katz, Ed., *Solid State Magnetic and Dielectric Devices*, John Wiley, New York, 1959.

[9] R. Saal and E. Ulbrich, "On the design of filters by synthesis," *IRE Trans.* Circuit Theory, CT-5, No. 4,284-327 (Dec., 1958).
[10] International Telephone and Telegraph Corporation, *Reference Data for Radio Engineers.* Howard W. Sams, Indianapolis, 1969.
[11] R. A. Johnson, M. Borner and M. Konno. "Mechanical filters—a review of progress," *IEEE Trans. Sonics Ultrasonics.* SU-18, No. 3,155-170 (July, 1971).
[12] M. Konno, C. Kusakabe, and Y. Tomikawa, "Electromechanical filter composed of transversely vibrating resonators for low frequencies," *J. Acous. Soc. Am.*, 41, No. 4,953-961 (April, 1967).
[13] R. A. Johnson and R. J. Teske, "A mechanical filter having general stopband characteristics," *IEEE Trans. Sonics Ultrasonics.* SU-13, No. 2,41-48 (July, 1966).
[14] W. Shockley, D. R. Curran, and D. J. Koneval, "Trapped-energy modes in quartz filter crystals," *J. Acous. Soc. Am.*, 41, No. 4,981-993 (April, 1967).

6 计算机辅助电路最优化

J. W. 班德勒(J. W. Bandler)
麦克马斯特(Mc Master)大学
汉密尔顿，安大略省

当经典综合方法（不论是解析的还是用数字表示的）都不合宜时，本章讨论的公式和方法可以在越来越多的情况下使用。当通常所说的闭式解由于某些原因而无能为力时，现代方法则是用有效的、迭代的、自动的最优化方法来完成能满足或超过一定要求的设计。为了最优化，通常，可以充分地利用经典方法来为优化提供初始的可行设计。

为了使数学处理容易，通常把可用的综合法局限于理想的可通约的网络。当必需计及有源器件、小范围元件值、寄生效应、高频运行、非线性、随频率变化的元件、不可通约的元件(即：混合的集总和分布元件、具有长度不等或可变的均匀分布传输线等等)、由测量数据所表征的元件、响应的约束条件等等情况时，经典设计方法所提供的充其量也仅是近似的答案。有时这些答案是很接近实际设计问题的解，但在许多情况下它们并不能做到。

由于其本身的原因作者并不提倡数值法。一般地说，对于同样的作业，迭代法比不需要迭代的更专门的方法(如果存在)

需要更多的计算时间。可是，计算时间不是工程师必须考虑的唯一准则。例如，在决定是否应花时间去推导一个解析算法，就与数值算法不同，他还必须自问：算法是否经常使用、它能把真实情况表示得多么好、它的应用范围如何，最后但并不是不重要的是，数值结果的准确度如何。作为工程师，毕竟要为解决实际设计问题尽全力算出有意义的数值。

要强调能使最优设计过程自动化的方法，而不鼓励利用通用解析程序的试凑法，特别是对于滤波器设计问题（除最简单的设计指标和可变参数很少的情况以外）更是这样。在自动化法情况下缺陷同样存在，关于它们的策略必然是不太完善的，而且最终几乎肯定是花费更大。需要进行的计算应该尽可能留给计算机。

在计算机辅助电路最优化中(或在任何设计过程的情况下)得出的不良或不能接受的结果，看来很可能是由于：对问题的准备不好、对可能碰到的不测事件缺少了解以及算法的错误选择。因此本章试图说明怎样把滤波器设计范围内的问题有效地明确表达为最优化问题，解释这些公式之间的差别，指出合理的最优化方法，并指出可以怎样解释这些结果。最优化算法的详细内容、收敛的证明等等，则超出了本著作的范围。有大量的原著和相关的教科书，请读者自行研究。

开始一节是基本概念，这对最优化理论的了解是很重要的，以后介绍典型目标和目标函数的公式和描述。再下一节详细讨论约束条件和有关它的某些方法，并包括约束最小值的条件。然后讨论极大极小逼近，包括极大极小最佳值的条件。这以后的各节则介绍一维搜索法、直接搜索法以及利用梯度的方法。最小 p 乘逼近自然是放在梯度法的讨论之后。把相当长一节专用于求梯度值的伴随网络法。

6.1 基本概念

最优化的问题可以叙述如下。使标量目标函数*U 减至最小，这里

$$U \triangleq U(\boldsymbol{\phi}) \tag{6.1}$$

受到不等式约束

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}) \geqslant \mathbf{0} \tag{6.2}$$

和等式约束

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0} \tag{6.3}$$

在(6.1)到(6.3)中，$\boldsymbol{\phi}$ 是 k 个自变量亦即参数+的向量，因而

$$\boldsymbol{\phi} \triangleq \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

它规定了 k 维空间。通常，我们可能有 m 个不等式约束和 s 个等式约束，结果

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}) \triangleq \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{\phi}) \\ g_2(\boldsymbol{\phi}) \\ \vdots \\ g_m(\boldsymbol{\phi}) \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

和

---

* 也叫做价值(成本)函数、性能指标或误差准则。

\+ 典型的如，元件值、留数、关键频率等等。

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\phi}) \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\boldsymbol{\phi}) \\ h_2(\boldsymbol{\phi}) \\ \vdots \\ h_s(\boldsymbol{\phi}) \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

可行区域 R 由满足(6.2)和(6.3)的所有向量 $\boldsymbol{\phi}$ 来定义。这可以写成

$$\mathrm{R} \triangleq \{\boldsymbol{\phi} \mid \mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}) \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}\}. \tag{6.7}$$

如果象(6.2)中那样容许取等号，则将 R 说成是闭的。如果不容许等号，则将它说成是开的。在由 $U(\boldsymbol{\phi})$ 所确定的响应超曲面上，用向量 $\check{\boldsymbol{\phi}}$ 来标记的 U 的真极小值，是这样一个点，对于任何接近 $\check{\boldsymbol{\phi}}$ 但不等于 $\check{\boldsymbol{\phi}}$* 的可行 $\boldsymbol{\phi}$ 总有

$$\check{U} \triangleq U(\check{\boldsymbol{\phi}}) < U(\boldsymbol{\phi}) \tag{6.8}$$

因为我们通常不能保证找到全局极小值，所以通常只好考虑局部极小。因此我们的目标是打算找到可行 $\check{\boldsymbol{\phi}}$（如果它的确存在），使

$$U(\check{\boldsymbol{\phi}}) = \min_{\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{R}} U(\boldsymbol{\phi}).$$

图 6-1 是一个二维问题的说明，而且它含有一些在最优化问题中常常碰到的特征。注意图中只表明了不等式约束，即(6.2)形式的约束。

单变量的单峰函数、多峰函数、严格凹函数和严格凸函数的例子示于图 6-2 中。对我们来说，单峰函数就是在可行区域中有唯一最佳值的函数。它在连续导数情况下可能是连续的也可能不是连续的。严格凸函数就是这样的函数，当在其表面上的两点之间作线性插值时，其估值总是偏高。因而，当 $\boldsymbol{\phi}^a \neq \boldsymbol{\phi}^b$ 对于严格凸函数，有

---

* $U(\check{\boldsymbol{\phi}}) \leqslant U(\boldsymbol{\phi})$也可以定义极小值，但 $\check{\boldsymbol{\phi}}$ 可能为非单值的。

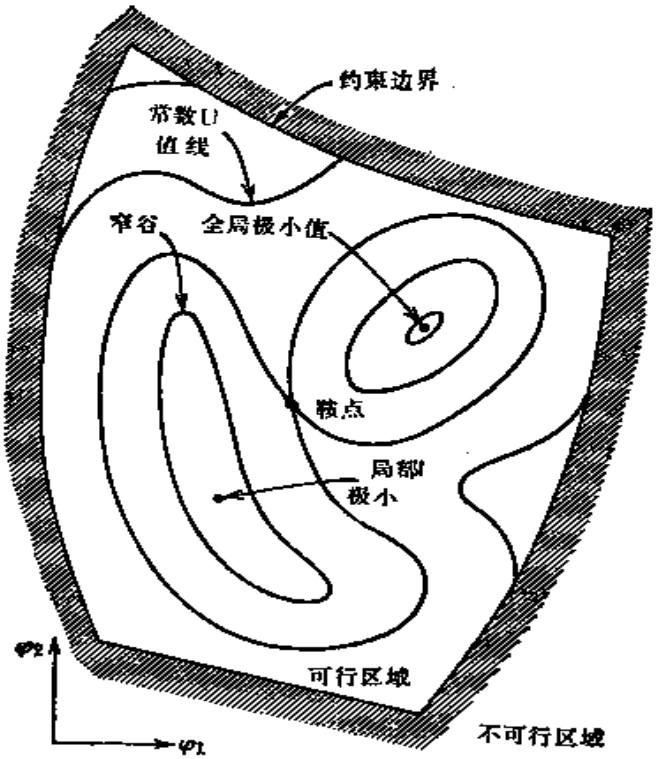


图 6-1　在最优化问题中所碰到的一些特征

$$U(\boldsymbol{\phi}^a+\lambda(\boldsymbol{\phi}^b-\boldsymbol{\phi}^a))<U(\boldsymbol{\phi}^a)+\lambda(U(\boldsymbol{\phi}^b)-U(\boldsymbol{\phi}^a))$$
$$0<\lambda<1 \qquad (6.9)$$

参看图 6-3。严格凹函数就是其负数为严格凸的函数。注意如果我们省略“严格”，那就意味着：这种函数和线性插值式间的等号可以存在，即要(6.9)包含等号。

如果对于所有的 $\boldsymbol{\phi}^a$、$\boldsymbol{\phi}^b \in \mathbf{R}$，区域 R 都是凸的则所有满足下式的点

$$\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}^a+\lambda(\boldsymbol{\phi}^b-\boldsymbol{\phi}^a)$$
$$0\leqslant\lambda\leqslant 1 \qquad (6.10)$$

都在 R 内。凸区域和非凸区域的说明在图 6-4 中给出。

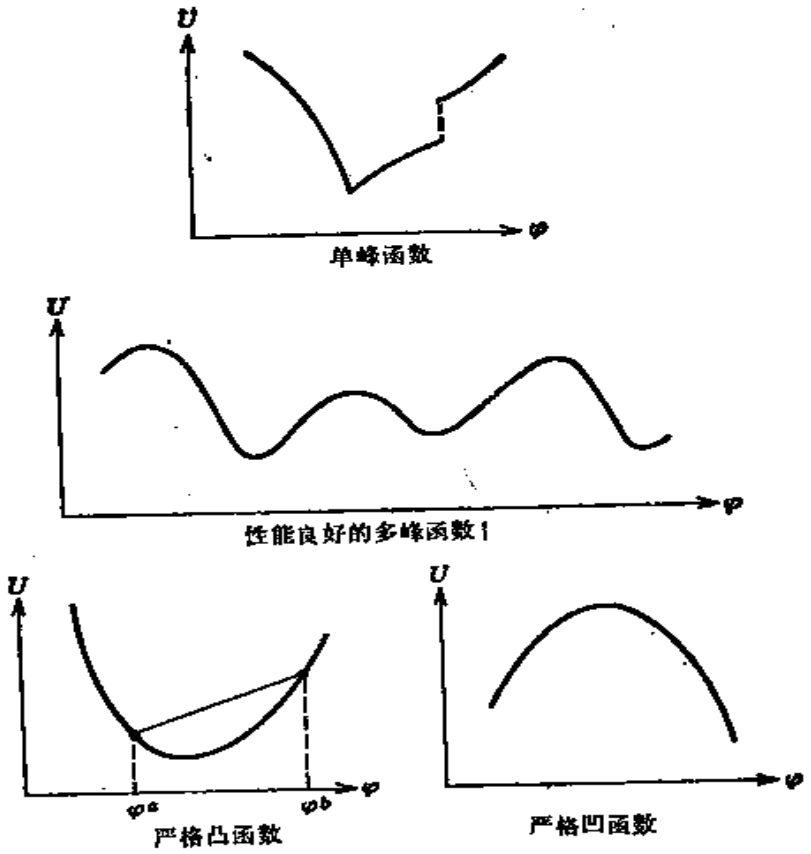


图 6-2 单变量函数

$U(\boldsymbol{\phi})$的多维泰勒(Taylor)级数展开的头三项给定为

$$U(\boldsymbol{\phi}+\Delta\boldsymbol{\phi})=U(\boldsymbol{\phi})+\nabla U^{T}\Delta\boldsymbol{\phi}+\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\phi}^{T}\mathbf{H}\Delta\boldsymbol{\phi}+\cdots \quad (6.11)$$

式中向量

$$\Delta\boldsymbol{\phi}\triangleq\begin{bmatrix}\Delta\phi_1\\ \Delta\phi_2\\ \vdots\\ \Delta\phi_k\end{bmatrix} \quad (6.12)$$

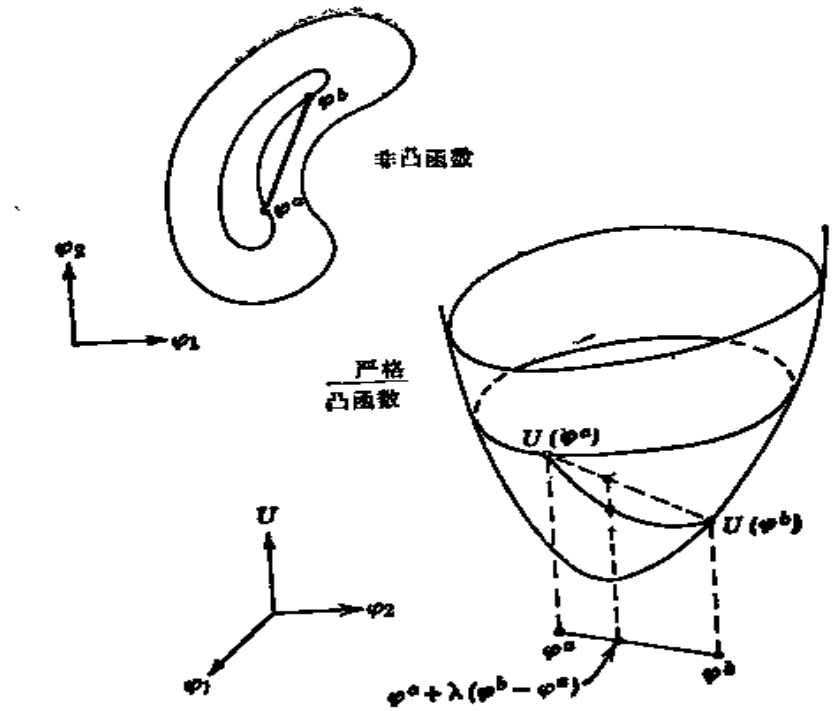


图 6-3 凸性的说明

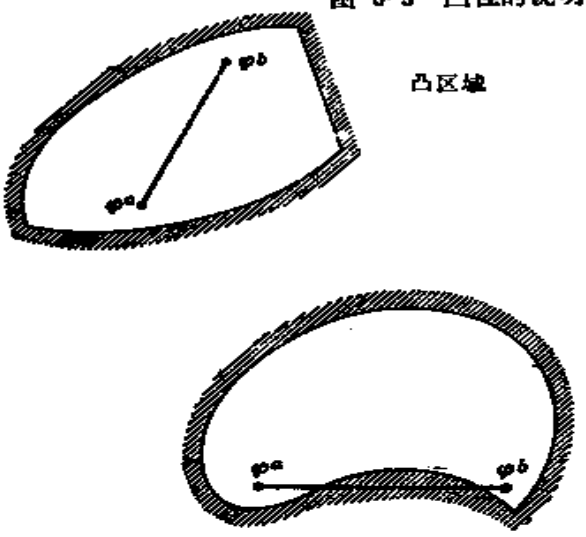


图 6-4 凸区域和非凸区域

含有 k 个参数的增量，$\Delta\phi^T$ 为转置（行）向量，

$$\nabla U \triangleq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial \phi_1} \\ \dfrac{\partial U}{\partial \phi_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial U}{\partial \phi_k} \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

为含有目标函数的一阶偏导数的向量、叫做**梯度向量**，而

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi_1^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi_1 \partial \phi_k} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi_2 \partial \phi_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi_2 \partial \phi_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi_k \partial \phi_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi_k \partial \phi_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi_k^2} \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

则为含有二阶偏导数的对称 $k \times k$ 矩阵并叫做**海赛(Hesslan)矩阵**。在具有连续的一阶和二阶偏导数的连续函数的最小值外，有 $\nabla U(\check{\phi}) = \mathbf{0}$ 而且 $\mathbf{H}(\check{\phi})$ 为半正定的*。援用这些条件于(6.11)中，但取 $\mathbf{H}$ 为正定，可以证明(6.8)是满足的，这意味着有真极小。$U(\phi)$ 在 $\mathbf{H}$ 为正定的区域内是严格凸的，这可由(6.9)和(6.11)看出。

用公式表示于(6.1)到(6.3)中的问题叫做**数学规划问题**。

---

* 应该注意到：有时甚至在 $U(\phi)$ 为严格凸的情况下，$\mathbf{H}$ 都可能不是正定的。

如果所有函数都是线性的，就是**线性规划**；如果不是，就是**非线性规划**。在 $U(\phi)$ 为凸的和 $g(\phi)$ 为凹的时候，往往用术语**凸规划**来描述由(6.1)和(6.2)所定义的问题。在这类条件下，R 为凸的，而 $\check{U}$ 则为全局极小值。

在实际情况下，确定特定问题是不是属于凸规划范围，通常是做不到的。尽管如此，似乎还是可作出清楚的概括：对实际问题更可靠而且有效的最优化方法，必定就是那种在其收敛的证明方面援用了凸规划的某些微妙性质的方法。较好方法通常都建立了防护措施以对付可能的更一般非线性规划问题，这时能实质上保持其所希望的收敛特性，注意，无约束问题实质上可以看作上面讨论情况的特例。

6.2 几种目标和目标函数

解非线性方程来最优化

经典性地求出 $\check{U}$，一般必须解含有 k 个未知数的 k 个非线性方程，即

$$\nabla U = 0.$$

将这组方程记为 $\mathbf{f}(\phi)=0$，这里

$$\mathbf{f}(\phi) \triangleq \begin{bmatrix} f_1(\phi) \\ f_2(\phi) \\ f_k(\phi) \end{bmatrix}, \tag{6.15}$$

我们可规定新的要使最小化的目标函数为

$$U(\phi) = \mathbf{f}^T\mathbf{f} \tag{6.16}$$

其极小值为零、就意味着已找到了 $\mathbf{f}(\phi)=0$ 的答案。现利用泰勒级数展开，得

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}+\Delta\boldsymbol{\phi})=\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi})+\mathbf{J}\Delta\boldsymbol{\phi}+\cdots \tag{6.17}$$

式中

$$\mathbf{J}\triangleq\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2}\cdots\frac{\partial f_1}{\partial \phi_k}\\ \frac{\partial f_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi_2}\cdots\frac{\partial f_2}{\partial \phi_k}\\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots\\ \frac{\partial f_k}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_k}{\partial \phi_2}\cdots\frac{\partial f_k}{\partial \phi_k}\end{bmatrix} \tag{6.18}$$

为 $k\times k$ 雅可比(Jacobian)矩阵。有名的牛顿·拉菲逊 (Newton-Raphson)解法、就是根据这样的设想： 即如果在 $\boldsymbol{\phi}$ 处求 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{J}$ 的值，那么增量

$$\Delta\boldsymbol{\phi}=-\mathbf{J}^{-1}\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}) \tag{6.19}$$

使结果更接近于答案。(在 6.8 节将推广这些概念)。

二次目标函数

考虑二次目标函数

$$U(\boldsymbol{\phi})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\phi}+\mathbf{b}^T\boldsymbol{\phi}+c \tag{6.20}$$

式中 $\mathbf{A}$ 为 $k\times k$ 对称常数矩阵，

$\mathbf{b}$ 为具有 k 个分量的常数向量，

c 为常数。

在这种情况，很容易证明：

$$\nabla U=\mathbf{A}\boldsymbol{\phi}+\mathbf{b}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{A}.$$

$U(\boldsymbol{\phi})$的驻点、可以由解下列线性方程来找到

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi}+\mathbf{b}=\mathbf{0}.$$

如果 $\mathbf{A}$ 为非奇异的， 则驻点是唯一的、 而且可 以用有限次的

运算找到。把术语二次收敛（弗莱彻(Fletcher)[1]则喜欢术语“特征Q”）用来描述最优化方法的收敛性质，它保证能在有限步骤中求出二次函数的极小值。对于那种在极小值附近其特性可用正定二次型充分描绘的函数进行极小化时，这样一些方法、可以预期是很有效的。其中的一些将在以后几节中讨论。

误差准则

大部分的电网络设计问题、都可以有系统地阐述为逼近问题。因此，让我们引入在规定函数和逼近函数之间的加权误差或偏差为

$$e(\phi,\psi)\triangleq w(\psi)[F(\phi,\psi]-S(\psi)] \tag{6.21}$$

式中 $S(\psi)$为实或复规定函数，

$F(\phi,\psi)$为实或复逼近函数，

$w(\psi)$为加权函数，

ψ为自变量，

ϕ表示可调参数。

因而$F(\phi,\psi)$可以是网络响应，$S(\psi)$可以是所需响应，而ψ可以是频率或时间。参看图 6.5。

对连续情况、我们可以定义一个范数

$$\|e\|_p\triangleq\left\{\int_{\psi_1}^{\psi_u}|e(\phi,\psi)|^p d\psi\right\}^{1/p},1\leqslant p\leqslant\infty \tag{6.22}$$

对离散情况、也可以定义一个范数

$$\|e\|_p\triangleq\left\{\sum_{i\in I}|e_i(\phi)|^p\right\}^{1/p},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty \tag{6.23}$$

式中

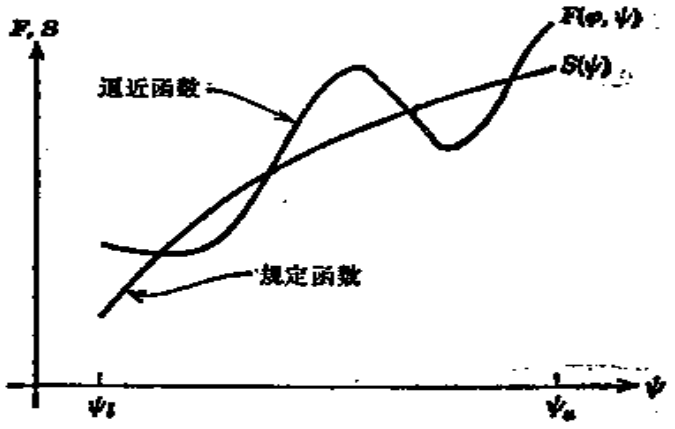


图 6-5 逼近问题

$$\mathbf{e}(\phi) \triangleq \begin{bmatrix} e_1(\phi) \\ e_2(\phi) \\ e_n(\phi) \end{bmatrix}, \tag{6.24}$$

$$e_i(\phi) \triangleq e(\phi, \psi_i) = w(\psi_i)[F(\phi, \psi_i) - S(\psi_i)] \tag{6.25}$$

和

$$I \triangleq \{1, 2, \cdots, n\}, \tag{6.26}$$

因而，I 为关于离散 ψ 值在区间$[\psi_e, \psi_u]$上所确定的指数集，区间是有限而且是闭区间。

现如果在$[\psi_e, \psi_u]$上来定义$|e(\phi, \psi)|$，则对于性能良好的函数

$$\max_{[\psi_e, \psi_u]} |e(\phi, \psi| = \lim_{p \to \infty} \left\{ \frac{1}{\psi_u - \psi_e} \int_{\psi_l}^{\psi_u} |e(\phi, \psi)|^p d\psi \right\}^{1/p}. \tag{6.27}$$

如果$|e(\phi, \psi)|$在有限区间$[\psi_e, \psi_u]$上是连续的，那么(6.27)肯定就是有效的。同样地有

$$\max_i |e_i(\phi)| = \lim_{p \to \infty} \left\{ \sum_i |e_i(\phi)|^p \right\}^{1/p}, i \in I. \tag{6.28}$$

对连续情况，假定我们把目标函数明确表达为

$$U=\int_{\psi_a}^{\psi_b}|e(\phi,\psi)|^p d\psi \tag{6.29}$$

并对离散情况明确表达为

$$U=\sum_{i\in I}|e_i(\phi)|^p. \tag{6.30}$$

(6.29)或(6.30)的U的极小化叫做**最小 p 乘逼近**。连续情况的极小值、叫做对(6.22)中所定义的$\|e\|_p$的最佳逼近。离散情况的极小值、则叫做对(6.23)中所定义的$\|e\|_p$的最佳逼近。现在把$\|e\|_\infty$和$\|e\|_\infty$叫做**切比雪夫范数**、或**均匀范数**。由于(6.27)和(6.28)的结果，对$\|e\|_\infty$或$\|e\|_\infty$的极小化被广泛认为是**极大极小逼近**。最小p乘逼近当$p\to\infty$时就趋于极大极小逼近。

值得提及的是，加权函数$w(\psi)$和指标p。显然，它们的目的是强调、或不强调$F(\phi,\psi)$和$S(\psi)$间的差别。因而，对应于某个加权函数或p值的最佳值，可能不再是对应于另一个的最佳值。大的误差、会被大的p值所强调。如果人们预先知道这些大的误差大概是在哪里，也可以用$w(\psi)$来强调它们。不过这样来使用$w(\psi)$是一种拙劣的方法，并不应得到鼓励。

6.3 约束条件的考虑

无约束的任何网络设计问题是少有的。如果物理分析指出最优值能位于可行区域内部，则设计者是幸运的，并应利用它。但这通常不会是这样，因而必须采取步骤、以保证得到一种可实现、而且实际的设计。计算机辅助电路最优化的重大优点之一就是：如果设计问题已适当公式化，假定初始设计是可

行的，则总是能够得到可行的设计。

网络设计中的约束、可以具有各种形式。它们可以包括有关参量的上界和下界；它们可以包括有关网络元件的非负值要求。拓扑结构、整个体积、抑制不需要的运行模式、对于电抗、或耗散的寄生效应的考虑、以及有源器件的稳定性，全都可以导致对参数的约束。响应约束、例如有关相位的约束，当振幅最优化的时候、也可以存在。

大多数网络设计者、似乎把约束当作马后炮，并抱怨最优化过程给了它们负电阻等等。结果损伤了他们对自动化最优化方法的信心。作者很想强调：应在选择最优化策略之前、就给约束一番彻底考虑。

本节我们将着眼于、把约束问题变为本质上无约束问题的某些方法。关于非线性规划的其他方法，读者可以参考[2、3、4]。

关于参数约束的变换

加于可变参数的各种上界和下界，大概是最普通种类的约束[5]。表 6.1 中我们用适当变换、表明某些归入这一类的简单参数约束。区分开与闭可行区域的约束、是有用的。如果指望最优值、位于运离界限，或者要求答案不要太靠近，则可选择前一种型式。

更一般考虑事项

如下参数约束的形式

$$\phi_{li} \leqslant \phi_i \leqslant \phi_{ui} \tag{6.31}$$

在必要时可写成

$$\phi_i - \phi_{li} \geqslant 0$$

表 6-1　　简单参量约束和变换

约　　束	变　　换
$\phi_i \geqslant 0$	$\phi_i = \phi_i'^2$
$\phi_i > 0$	$\phi_i = \exp\phi_i'$
$\phi_i \geqslant \phi_{li}$	$\phi_i = \phi_{li} + \phi_i'^2$
$\phi_i > \phi_{li}$	$\phi_i = \phi_{li} + \exp\phi_i'$
$-1 \leqslant \phi_i \leqslant 1$	$\phi_i = \sin\phi_i'$
$0 \leqslant \phi_i \leqslant 1$	$\phi_i = \sin^2\phi_i'$
$0 < \phi_i < 1$	$\phi_i = \dfrac{\exp\phi_i'}{1+\exp\phi_i'}$
$\phi_{li} \leqslant \phi_i \leqslant \phi_{ui}$	$\phi_i = \phi_{li} + (\phi_{ui} - \phi_{li})\sin^2\phi_i'$ $\phi_i = \dfrac{1}{2}(\phi_{li} + \phi_{ui}) + \dfrac{1}{2}(\phi_{ui} - \phi_{li})\sin\phi_i'$
$\phi_{li} < \phi_i < \phi_{ui}$	$\phi_i = \phi_{li} + (\phi_{ui} - \phi_{li})\dfrac{\exp\phi_i'}{1+\exp\phi_i'}$ $\phi_i = \phi_{li} + \dfrac{1}{\pi}(\phi_{ui} - \phi_{li})\cot^{-1}\phi_i'$ 对 $0 < \cot^{-1}\phi_i' < \pi$

$$\phi_{ui} - \phi_i \geqslant 0, \tag{6.32}$$

以便使它们适合于(6.2)的方案。可以把随频率或时间而变化的约束、表达成形式

$$c_j(\phi, \psi) \geqslant 0 \tag{6.33}$$

其中 j 表示某第 j 个函数，或把在 ψ 轴上的离散点表达成下式

$$c_j(\phi, \psi_i) \geqslant 0 \tag{6.34}$$

其中 i 表示第 i 样值点。(6.34)式、比(6.33)式更为可取，因为它允许我们考虑有限、而不是无限的约束数目。

我们可能消除一些物理基础或逻辑基础上的约束，例如如果

1．$U(\phi)\to\infty$ 当 $g_i(\phi)\to 0$。例如，零值元件对结构短路，滤波器的衰减成为无限；

2．可以把某些 $h_i(\phi)=0$ 明确写成 $\phi_j=f(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{j-1}, \phi_{j+1}, \cdots, \phi_k)$。在这种情况可用 $k-1$ 个参量来最优化；

3．事前知道 $g_i(\overset{\vee}{\phi})$ 是正的。

设计问题可能是这么复杂，以致在最优化过程中不容易找到一个原始设计来用作可行的起点。我们可通过无约束最优化，使

$$-\sum_{i=1}^{m} w_i g_i(\phi)+\sum_{j=1}^{s} h_j^2(\phi) \qquad w_i\begin{cases}=0 & g_i(\phi)\geqslant 0\\ >0 & g_i(\phi)<0\end{cases} \tag{6.35}$$

为最小，来寻求一个原始设计。如果极小值为零，我们得到可行点。但不收敛到零，也并不必然就意味着可行点不存在。

已得到可行起点，我们就可能决定简单地把不可行点（如果在最优化的时候得到）抑制掉。相应地，如果出现任何破坏，可能置 $U(\phi)$ 于最不诱人的值。另一种，我们也能把

$$\sum_{i=1}^{m} w_i g_i^2(\phi)+\sum_{j=1}^{s} h_j^2(\phi) \qquad w_i\begin{cases}=0 & g_i(\phi)\geqslant 0\\ >0 & g_i(\phi)<0\end{cases} \tag{6.36}$$

项加到目标函数上。只要约束被满足，目标函数就不会恶化。可惜这种方法并不总是保证严格得到可行的解。

刚才叙述的简单方法，还有其他缺点。可能导致新函数或其导数中的不连续性。在可行区域的界限那里可能形成峭壁或谷值，使最优化过程急剧地放慢下来。简单地抑制不可行点的方法，就容易终止在假的极小值上[6]。

序列式无约束极小化方法

最著名而且高度发展的序列式无约束极小化方法(SUMT)之一，将在这里概述 [7]。首先考察在 (6.1) 和 (6.2) 所定义的不等式约束条件下的极小化问题。设

$$P(\phi, r) \triangleq U(\phi) + rG(g) \tag{6.37}$$

式中 $G(g)$ 对 $g>0$ 是连续的，对任何 $g_i(\phi)\to 0$ 则 $G(g)\to\infty$，而且其中 $r>0$。两种可供选择的 $G(g)$ 马上就在跟前呈现，即

$$G(g)=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(\phi)}, \tag{6.38}$$

和

$$G(g)=-\sum_{i=1}^{m}\log g_i(\phi). \tag{6.39}$$

让我们用 R° 表示可行点区域 R 的内部，此处

$$R^\circ \triangleq \{\phi \mid g(\phi)>0\} \tag{6.40}$$

和

$$R \triangleq \{\phi \mid g(\phi)\geqslant 0\}。 \tag{6.41}$$

步骤是分别选择 ϕ 和 r 值，一开始分别为 $\phi^\circ\in R^\circ$ 和 $r_1>0$，并使(6.37)的函数 P 最小化。这种方程的形式是这样的能指望所得到的极小值即 $\check{\phi}(r_1)$ 会位于 R°。按不同的 r 值重复这种步骤其中

$$r_1>r_2>\cdots r_i>0 \quad 和 \quad \lim_{i\to\infty} r_i=0, \tag{6.42}$$

使每个极小化都从前一个极小值开始。即 $P(\phi,r_2)$ 的极小化应从 $\check{\phi}(r_1)$开始，余此类推。

每当减小参量 r 的时候就减小了补偿的效应，所以，可以

指望在适当条件下有

$$\lim_{j\to\infty}\check{\phi}(r_j)=\check{\phi},$$

因为由(6.42)

$$\lim_{j\to\infty} r_j=0$$

所以约束最小值为

$$\lim_{j\to\infty} U[\check{\phi}(r_j)]=\check{U}。$$

在 R^n 中应总是有 P 的极小值，所以可能碰到的任何不可行点都可以被抑制。这种防护措施，显然不应该忽视。

把这种步骤叫做内点无约束极小化方法，而且要求一个初始值 $\phi^0\in R^n$。如果得不到，则可以采用以下的方法。设

$$S\triangleq\{s\mid g_s(\phi)\leqslant 0,\ s\in\{1,2,\cdots,m\}\}$$

$$T\triangleq\{t\mid g_t(\phi)>0,\ t\in\{1,2,\cdots,m\}\}。$$

现在规定

$$P(\phi,r)=-\sum_{s\in S} g_s(\phi)+r\sum_{t\in T} G_t(g_t(\phi)) \qquad (6.43)$$

按满足(6.42)的 r 值序列使它最小化。(6.43)的含义就是：在致力使各条约束得以满足的过程中，能防止任何已满足了的约束被破坏。一当某个约束被满足后，就把其相应标号由 S 转到 T，并重复上述步骤。当 S 用空时，就得到 $\phi^0\in R^n$ 从而可以开始问题的求解过程。

为了证明收敛性，必须援引凸规划的条件(参看 6.1 节)。不过，事实上即使这些条件成立，也可能难以证实。即便如此，这种方法应能成功地用于各种各样的其收敛性不容易加以证明的实际课题。r 和 ϕ 的初始值选择不恰当，会使收敛放慢下来。r_1 值太大，可能使 P 的最初几个极小值变得与 U 相对无关；而 r_1 值太小又可能使补偿变得无效，但接近边界处除外，在那里将引起具有陡峭边沿的长谷。由于这些以及无约束问题的

序列必须加以解决的事实，效率高的梯度法通常是需要的。

当过程开始后，对于 r 值来说，减为十分之一也可能与其它值效果一样。这事的随意性，可以通过使用没有 r 参量的 SUMT 法而稍加缓和[7,8]。

为了包括等式约束，可以把

$$\frac{1}{r^{1/2}}\sum_{i=1}^{s}h_i^2(\phi) \tag{6.44}$$

项加到(6.37)的右边。显然，如 $r\to 0$，$\mathbf{h}(\phi)$也必须接近 **0**，否则就不会达到极小值。

读者可参考一些讨论或推广 SUMT 的所选参考文献[7、8、9、10]。透彻的讨论可在科瓦利克(Kowalik)和奥斯本(Osborne)的第 5 章内找到[8]。

约束最小值的条件

在 $\mathbf{g}(\phi)\geqslant\mathbf{0}$ 的约束下，使 $U(\phi)$最小化的问题中，可以把驻点 ϕ°必须满足的必要条件写成公式。假定 $U(\phi)$和 $g(\phi)$ 在可行驻点 ϕ°附近是可微的，那么

$$\nabla U(\phi^\circ)=\sum_{i=1}^{m}u_i\nabla g_i(\phi^\circ) \tag{6.45}$$

和

$$\mathbf{u}^T\mathbf{g}(\phi^\circ)=0 \tag{6.46}$$

式中

$$\mathbf{u}\triangleq\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_m\end{bmatrix}\geqslant\mathbf{0}.$$

可以把这些必要条件解释如下：$\nabla U(\phi^\circ)$是(在ϕ°为能动*的那类约束的) 梯度 $\nabla g_i(\phi^\circ)$的非负线性组合。

在凸规划的条件下，即：如果$U(\phi)$为凸的、$g(\phi)$为凹的以及R°为非空的，则对于ϕ°是约束最小值$\check{\phi}$，条件变为充分的。关系式(6.45)和(6.46)叫做库恩-塔克 (Kuhn-Tucker)关系[11]。示意说明于图 6.6 中。注意如果用的是可靠的最优化方法，并且满足关系式，我们就可以有理由确信已经得到局部极小值，即使凸性要求还不满足。

对库恩-塔克关系的详细论述，包括它们的求导以及有关必须的约束规范的讨论，读者可参考象赞格威尔(Zangwill)那样的书籍[4]。

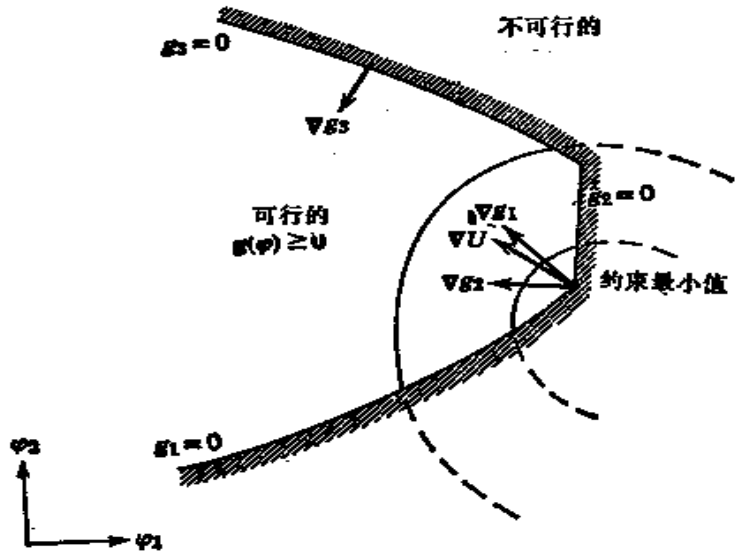


图 6-6 约束最小值的充分条件：$u_1>0$、$u_2>0$、$u_3=0$

---

* 约束 $g_i(\phi)\geq 0$ 在 ϕ°为能动的，如果 $g_i(\phi^\circ)=0$。

6.4 极大极小逼近

极大极小逼近（定义参看 6.2 节）在传统意义上是指对适当多项式或有理函数的系数作选择，使它以等波纹最优方式吻合某些（通常在闭区间上连续的）所需技术要求。在利用多项式和有理函数来得到最佳逼近的迭代方法中，雷米兹(Remez)法*及其推广是突出的例子。

在滤波器设计中，可以用经典方法求解的实际问题的数目与必须求解的数目相比肯定还是正在减少，尽管在频率变量的变换、对传输线网络的理查兹(Richards)变换等等在进展。因此，本节将不太强调应用到大量实际设计问题的专业化方法。最近有许多参考文献详细地讨论了很适合于滤波器设计方面的多项式和有理函数的方法[12、13、14、15]。

不等式约束的公式化

图 6.7 说明一典型的滤波器设计问题。我们试图找出适当网络的（约束）参数，使能满足或超过通带和阻带指标。假定逼近函数和指标都是实数，将误差函数 e_u 和 e_l 给定为

$$\begin{aligned} e_u(\phi,\psi) &\triangleq w_u(\psi)[F(\phi,\psi)-S_u(\psi)] \\ e_l(\phi,\psi) &\triangleq w_l(\psi)[F(\phi,\psi)-S_l(\psi)] \end{aligned} \tag{6.47}$$

结果

$$\begin{aligned} e_{ui}(\phi) &\triangleq e_u(\phi,\psi_i),\quad i\in I_u \\ e_{li}(\phi) &\triangleq e_l(\phi,\psi_i),\quad i\in I_l. \end{aligned} \tag{6.48}$$

这只不过是(6.21)、(6.25)和(6.26)的推广，式中符号具有同

* Remez 法是根据最佳逼近的一些特征性质，用逐次逼近来给出计算方案的一种方法。——译者注。

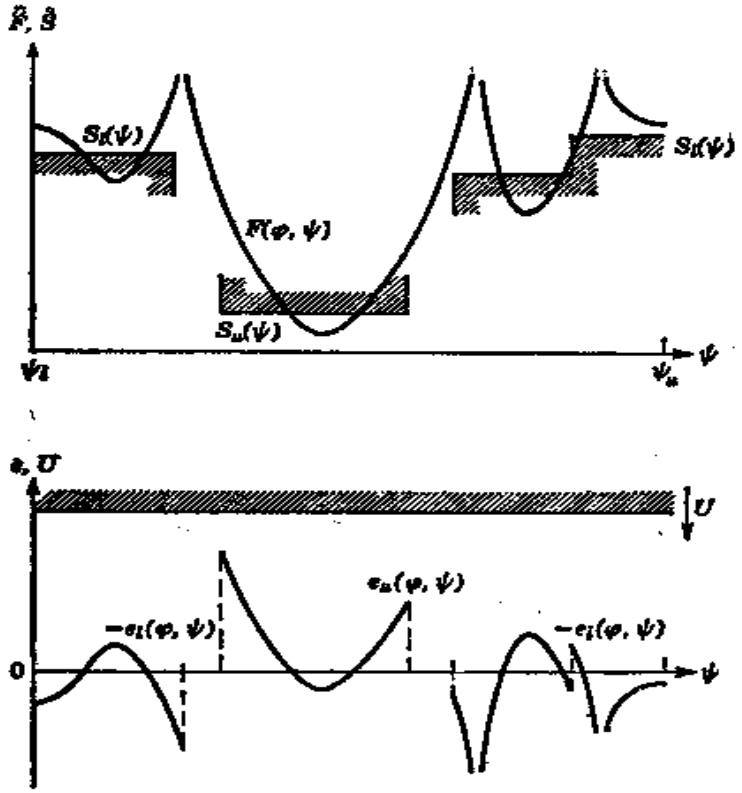


图 6-7 典型滤波器设计问题(规格被破坏)

样意义。在目前(6.47)和(6.48)的情况下，下标 u 指的是上限或通带指标，下标 l 指的是下限或阻带指标。

因为在时域及其他域中的逼近公式，都可以用这些项表示，所以采用 ψ 而不是频率。而且，指标集 I_u 和 I_l 不一定是分离的。

现在可以把最优化问题规定为：使数量 U 为最小，受到

$$\begin{aligned} U &\geqslant e_{ui}(\phi), \quad i \in I_u \\ U &\geqslant -e_{li}(\phi) \quad i \in I_l \end{aligned} \tag{6.49}$$

并且还受到所有其他约束，例如有关 ϕ 的。注意到 U 是附加

的自变量。如图 6.7 所示，可以把U设想为一种水准或压板，它迫使偏差 e_u 和 $-e_l$ 下降。

在U的某最小值处，(6.49)中至少一种约束必须是等式。否则可以在不破坏的情况下把U再降低。此外如果：

1. $\overset{\vee}{U}<0$，把网络响应超过指标的最低值最大化；

2. $\overset{\vee}{U}>0$，使网络响应不足指标的最高值最小化。

对于衰减均衡或相位均衡，以及时域逼近之类的课题，我们可能仅有一种指标，即 $S(\psi)$。为了处理这类特殊情况，只需要简单地去掉(6.47)到(6.49)中的下标 u 和 l，目的等于使

$$U=\max_{i\in I}|e_i(\phi)| \tag{6.50}$$

最小化。

(6.47)中的加权函数适用于以下的目的。如果一个较其它一个更大，当不满足指标时加权函数就以响应的其余部分为代价使伴随它而产生的偏差得到强调。在指标被满足的时候（如果需要的话，现在可以有效地把加权函数调到无穷大），再把工作转到响应的其余部分。

极大极小逼近的方法

一种在最优滤波器设计[16]中应用很成功并由沃伦(Warren)、拉斯敦(Lasdon)和萨奇曼(Suchman)[17]考察过的方法，就是利用序列式无约束极小化。例如我们可以定义

$$P(\phi,U,r)=U+r\left\{\sum_{i\in I_u}\frac{w_{ui}}{U-e_{ui}(\phi)}\right.$$

$$\left.+\sum_{i\in I_l}\frac{w_{li}}{U+e_{li}(\phi)}+\text{其他项}\right\} \tag{6.51}$$

式中的其他项可能包括参数约束。注意(6.51)中 $g(\phi)$ 的元素包括

$$\frac{1}{w_{ui}}\left[U-e_{ui}(\phi)\right]\geqslant 0,\quad i\in I_u$$
$$\frac{1}{w_{li}}\left[U+e_{li}(\phi)\right]\geqslant 0,\quad i\in I_l. \tag{6.52}$$

并且，应该记住U是自变量。6.3 节中所叙述的适当公式因而可应用到极大极小逼近。

艾希扎凯(Ishizaki)和瓦塔纳勃(Watanabe)[18] 所提出的方法在许多方面都类似于奥斯本 (Osborne) 和沃森 (Watson)[19]的较新方法，这种方法是把线性规划反复地应用来完成在极大极小意义上的最佳逼近。让我们也关心(6.50)所提出的目标。可是不应认为这种方法不如已经概述过的方法普遍。

使 $e_i(\phi)$线性化 (它在某些点 ϕ^j 处为实数)，这个问题在受到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{w_i}\left[U-e_i(\phi^j)-\nabla e_i^T(\phi^j)\Delta\phi^j\right]\geqslant 0\\&\frac{1}{w_i}\left[U+e_i(\phi^j)+\nabla e_i^T(\phi^j)\Delta\phi^j\right]\geqslant 0\end{aligned}\qquad i=1,2,\cdots,n>k \tag{6.53}$$

和其他(线性化)约束条件下就成为使U最小化的问题。注意线性规划的变量应完全是非负数，并强加一种 ϕ 元素不应改变符号的更实际约束，我们有按照 $X\triangleq[x_1x_2\cdots x_{k+1}]^T$ 的线性程序，以使

$$U=x_{k+1}\text{ 为最小，}$$

并受到

$$\pm\left\{e_i(\phi^l)+\nabla e_i^T(\phi^l)\begin{bmatrix}\phi_1^i x_1-\phi_1^i\\ \phi_2^i x_2-\phi_2^i\\ \vdots\\ \phi_k^i x_k-\phi_k^i\end{bmatrix}\right\}\leqslant x_{k+1},\quad i=1,2,\cdots,n>k \tag{6.54}$$

$$X\geqslant O$$

的约束，式中

$$x_i\triangleq\frac{\Delta\phi_i^i}{\phi_i^i}+1,\quad i=1,2,\cdots,k.$$

其解给出一个由 $\Delta\phi^l$ 确定的方向。其次，我们寻求 α^l 以使 $\max_i|e_i(\phi^l+\alpha^l\Delta\phi^l)|$ 为最小值，令 $\phi^{l+1}=\phi^l+\alpha^l\Delta\phi^l$ 并重复这过程。关于收敛的条件，请读者参看原著[18、19]。其他线性化约束也可加以考虑[14、15]。这样一种方法显然可直接应用到象多项式那样的线性函数，对于这种函数，在最优时，有 $(k+1)$个相等的极值点。

班德勒(Bandler)、斯里尼法斯安(Srinivasan)和查雷兰布斯 (Charalambous)[20] 提出了一种极大极小逼近的下降型算法，也使用了线性规划。对于U的最小化问题，算法基本上是试图寻求局部最优的下降方向，这里

$$\mathrm{U}=\max_{i\in I}f_i(\phi), \tag{6.55}$$

式中 $f_i(\phi)$通常为非线性实可微函数。线性化 $f_i(\phi)$并使

$$J\triangleq\{i\,|\,f_i(\phi)=\max_i f_i(\phi),\ i\in I\} \tag{6.56}$$

我们可以在某些可行点 ϕ^l 得到一阶增量

$$\Delta f_i(\phi^l)=\nabla f_i^T(\phi^l)\Delta\phi^l,\quad i\in J. \tag{6.57}$$

为了使 $\Delta\phi^l$ 代表 $\max_{i\in I}f_i(\phi)$的下降方向，我们必须有

$$\nabla f_i^T(\phi^l)\Delta\phi^l<0,\quad i\in J.$$

考虑

$$\Delta\phi^i=-\sum_{i\in J}\alpha_i^i\nabla f_i(\phi^i) \tag{6.58}$$

$$\sum_{i\in J}\alpha_i^i=1 \tag{6.59}$$

$$\alpha_i^i\geqslant 0,\ i\in J, \tag{6.60}$$

这就提出线性程序：

$$\text{把 } \alpha_{r+1}^i\geqslant 0 \text{ 最大化} \tag{6.61}$$

并受到

$$-\nabla f_i^T(\phi^i)\sum_{i\in J}\alpha_i^i\nabla f_i(\phi^i)\leqslant-\alpha_{r+1}^i,\ i\in J \tag{6.62}$$

以及(6.59)和(6.60)的约束，这里假设 J 有 r 个元素。

注意到 J 应是非空的，而且如果 J 只有一个元素，则可得到对于 $f_i(\phi)$的对应最大值的最速下降方向。线性程序的解提供了 $\Delta\phi^i$。然后找到能使 $\max_{i\in J}f_i(\phi^i+\gamma^i\Delta\phi^i)$为最小的 γ^i。再令 ϕ^{i+1} 等于 $\phi^i+\gamma^i\Delta\phi^i$，并重复这步骤。

实际上，我们将没有一组和最大值恒等的 $f_i(\phi)$。因此必须把适当容差引入(6.56)，并把更合适的对 J 元素的选择步骤公式化。有关详细情形应请查阅原文[20]。可以证明：算法将收敛到极大极小解，如果正确执行的话。

例 6.1 图 6.8 表明极大极小逼近的一例 [21]。目的要为 3 节不均匀矩形波导阻抗变量器寻求

$$\tilde{U}=\min_{\phi}\left\{\max_{[f_l,f_u]}|\rho(\phi,f)|\right\},$$

式中 ρ 为反射系数而 f 为频率单位用 GHz。可调参量 ϕ 是诸节的实际几何尺寸。下频带和上频带边缘分别为 $f_l=5.4$ GHz 和 $f_u=6.95$ GHz。必须指出：(1) 输入和输出波导两者都具

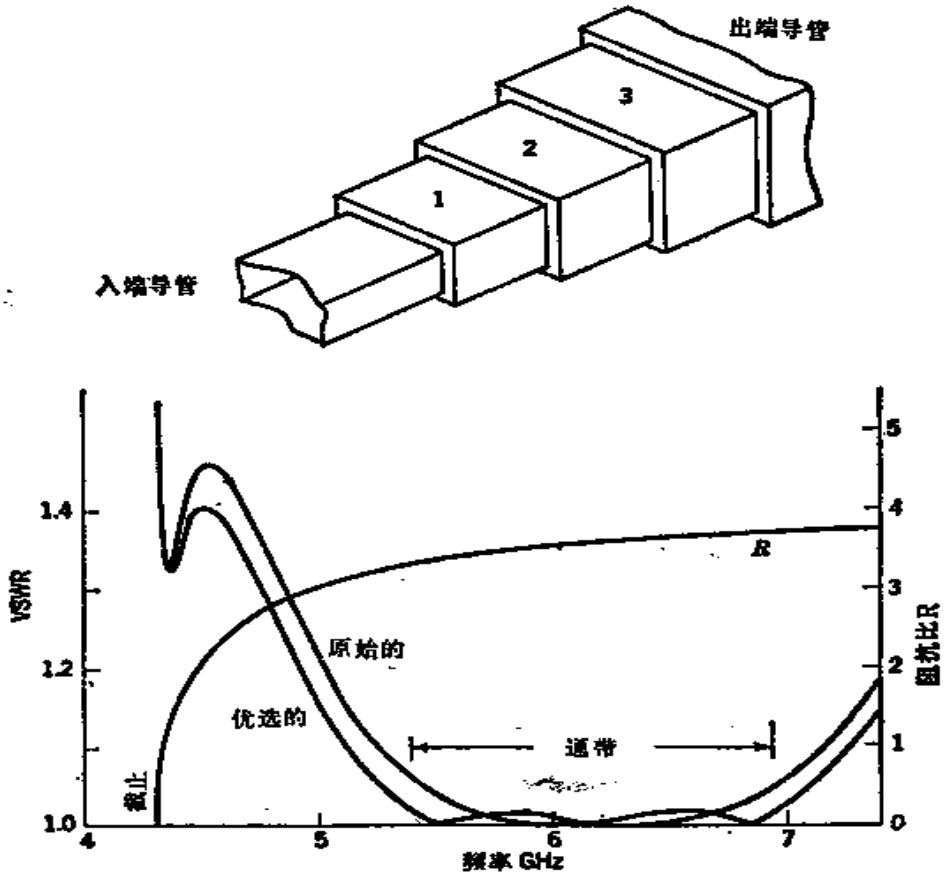


图 6-8 约束的极大极小逼近的例子

有不同的截止频率，因此准确综合是不可能的，(2) 由于种种实际原因而把严格约束加到了参数上，(3) 可以直接计及不连续性电纳，以及(4)使用了剃刀搜索法 [22] (参看 6.6 节)。欲知这种类型问题的详情和另外一些数值结果，请读者参看班德勒(Bandler)的著作[21]。

例 6.2 让我们较详细地考察图 6-9 中所示的七节级联传输线滤波器的最优化。在各端都终接着

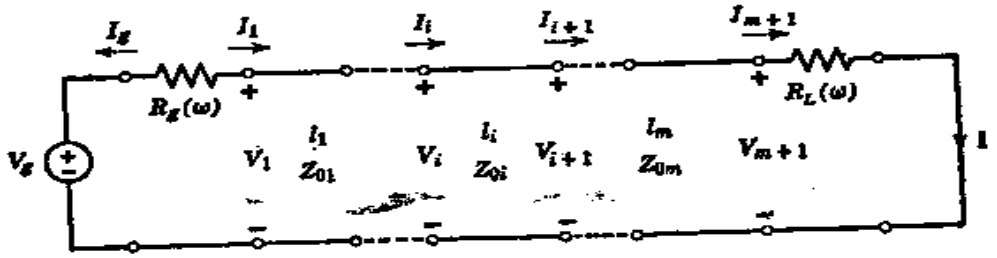


图 6-9　在频率可变电阻器之间的级联传输线滤波器

$$R_g(\omega)=R_L(\omega)=\frac{377}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$$

式中 f 为频率（单位为 GHz）且 $f_c=2.077$ GHz。因而该终端的频率变化与按 H_{10}型波运行，截止频率为 2.077 GHz 的矩形波导的相似。这个有意义的问题以前由卡林(Carlin)和格普塔(Gupta)考虑过[23]。把所有节长都固定保持在 1.5 cm，因此最大阻带插入衰减总是发生在大约 5 GHz。选择定通带为 2.16 至 3 GHz，规定其最大衰减为 0.4 dB。把卡林和格普塔方法所得到的解用作初始解，如图 6.10 所示。

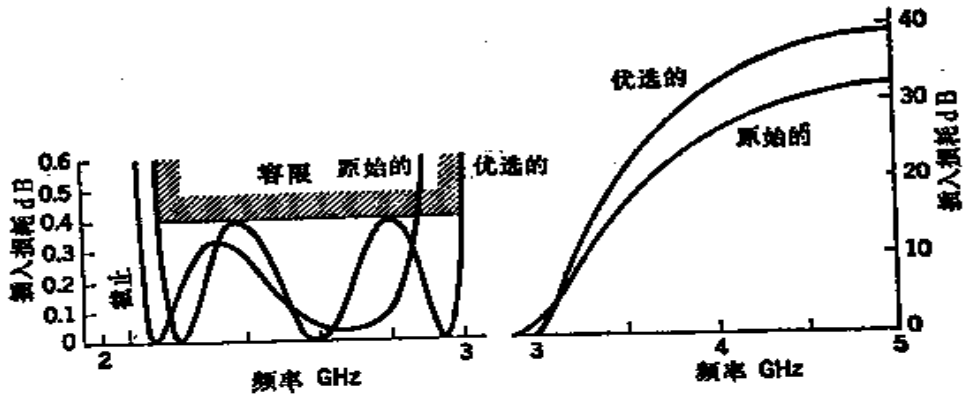


图 6-10　图 6.9 滤波器的原始响应和优选响应之间的比较

按班德勒(Bandler) 和李·钱(Lee-Chan) [24] 所作的优化，问题是要使 $\max_i f_i(\phi)$最小化，这里

$$f_i(\phi)=\begin{cases}\frac{1}{2}[|\rho_i(\phi)|^2-r^2] & \text{在通带内}\\ \frac{1}{2}[1-|\rho_i(\phi)|^2] & \text{在阻带内}\end{cases}$$

$$\phi=\begin{bmatrix}Z_{01}\\ Z_{02}\\ \vdots\\ Z_{07}\end{bmatrix}$$

r 是对应于 0.4 dB 插入衰减的反射系数的幅度，而 $\rho_i(\phi)$为滤波器在第 i 频率点的反射系数。具体地是，在通带选定了 22 个均匀间隔的频率在阻带选单频即 5 GHz。恰当的优化响应示于图 6.10 中。这些结果，也已由班德勒、斯里尼法斯安和查雷兰布斯[20]的方法重新得到了，利用

$$\phi=\begin{bmatrix}Z_{01}\\ Z_{02}\\ Z_{03}\\ Z_{04}\end{bmatrix}$$

并使 $Z_{05}=Z_{03}$，$Z_{06}=Z_{02}$，$Z_{07}=Z_{01}$。

在各个频率处，用来分析滤波器的方法，示于图 6-9 中。其中假定了 1 安培的负载电流，并为了寻求图中所示的所有其他电压和电流变量而进行了简单 $ABCD$ 矩阵分析(当然在这种情况下，V_g 一般会是复数，并随频率而变化)。利用伴随网络法(6.9 节)，对每一个频率点，作一次这样的分析，可得到所需的偏导数。

极大极小最佳值的条件

为了洞察在极大极小逼近问题中，驻点 ϕ° 必须满足的必要条件[25]，让我们把它简化为下列形式

$$\text{使 } U=\phi_{k+1} \text{ 最小化} \tag{6.63}$$

并受到

$$\phi_{k+1}\geqslant f_i(\phi),\ i=1,2,\cdots,m \tag{6.64}$$

的约束。再把约束写成

$$g_i(\phi)\triangleq\phi_{k+1}-f_i(\phi)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m, \tag{6.65}$$

就允许我们应用库恩-塔克关系（6.3 节）。假定 U 和 $f_i(\phi)$ 在 ϕ° 附近是可微的，则在 $\phi=\phi^\circ$ 有

$$\begin{bmatrix}\nabla U\\ \dfrac{\partial U}{\partial\phi_{k+1}}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{m}u_i\begin{bmatrix}\nabla\\ \dfrac{\partial}{\partial\phi_{k+1}}\end{bmatrix}(\phi_{k+1}-f_i(\phi))$$

$$U^T g=0, \tag{6.66}$$

式中 U 由(6.46)定义。可是处处

$$\nabla U=\nabla\phi_{k+1}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\phi_{k+1}}=1$$

$$\frac{\partial f_i(\phi)}{\partial\phi_{k+1}}=0。 \tag{6.67}$$

而且，至少一种约束必须为等式。为了方便起见，假定前 m_0 个约束为等式。那么

$$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{m_0}u_i\begin{bmatrix}-\nabla f_i(\phi^\circ)\\ 1\end{bmatrix} \tag{6.68}$$

因为 $u_i=0,\ i=m_0+1,\ m_0+2,\cdots,m.$

也可以把必要条件写成另一种形式，

$$\sum_{i=1}^{m_a} u_i \nabla f_i(\phi^*) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m_0} u_i = 1$$

$$u_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, m_0. \tag{6.69}$$

这类关系的意义说明于图 6-11 中。在凸规划的条件下，$f_i(\phi)$总必须是凸的，因而这些条件就成为 ϕ^*是极大极小最佳值 ϕ 的充分条件。通常 m_0会等于 $k+1$，但这并不是普遍的要求。读者应注意到对 $\Delta\phi' = 0$(6.58) 到(6.60)和(6.69) 间的对应关系。参看班德勒(Bandler) 的著作[25]可更加洞察这些关系，尤其是当它们与滤波器问题有关的时候。

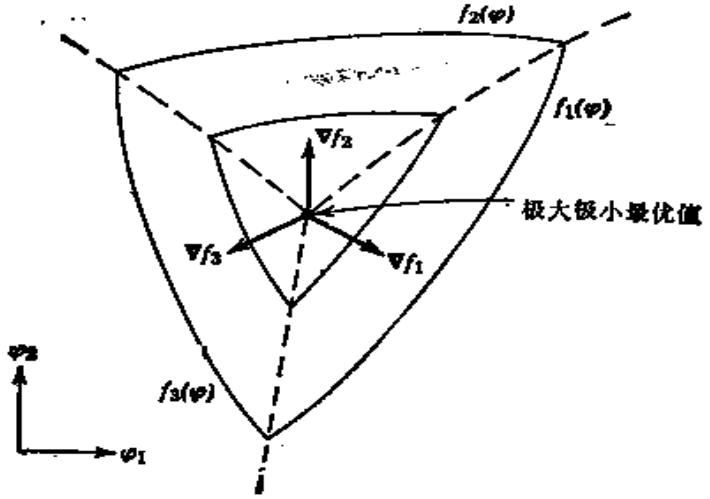


图 6-11 极大极小最佳值的充分条件：
$u_1 > 0$、$u_2 > 0$、$u_3 > 0$

6.5 求最小值的一维搜索法

对于研究单变量函数的最佳值，人们会立刻想到三个主要

可能的理由。明显的一个是：它可能就是所给定的课题。第二个是：我们使用的多维方法可能要用一维搜索来求在某些可行的下降方向*的最小值。第三个是：可能碰到这种逼近课题在其最优化过程中需要求误差函数的极值。

对已知在一个区间上为单峰的函数已有强有力的方法。我们可以广泛区别为两类，第一类是消去法：它有效地切掉不包括最佳值的子区间，除单峰性外不用什么假定；第二类是逼近法亦即插值法：它假定函数是光滑的，而且在接近最佳值处能用低阶多项式来很好表征的。

不失去普遍性并为了简化讨论将假定：我们有一种单变量 ϕ 的函数 U。

消去法

在搜索单峰函数最小值的 j 次迭代开始时，假定有一个不确定性区间 I^j，参看图 6-12 有

$$I^j \triangleq u - l \tag{6.70}$$

这里 $\phi_u^j = u$，$\phi_l^j = l$。此外，我们有两个内点 $\phi_a^j = a$ 和 $\phi_b^j = b$，并已在此处计算了目标函数。设 $U(a)$ 和 $U(b)$ 分别表示为 U_a 和 U_b。注意取

$$l < a < b < u. \tag{6.71}$$

可以作出两个结论：

1. 如果 $U_a > U_b$，最小值位于 $[a, u]$ 而且 $I^{j+1} = u - a$.

2. 如果 $U_a < U_b$，最小值位于 $[l, b]$ 而且 $I^{j+1} = b - l$.

在两种有名而且有效的方法：菲博纳西 (Fibonacci) 搜索和黄金分刈 (Golden Section) 搜索之间的差别在于，怎样确

---

* 也就是在 U 可行的下降方向。

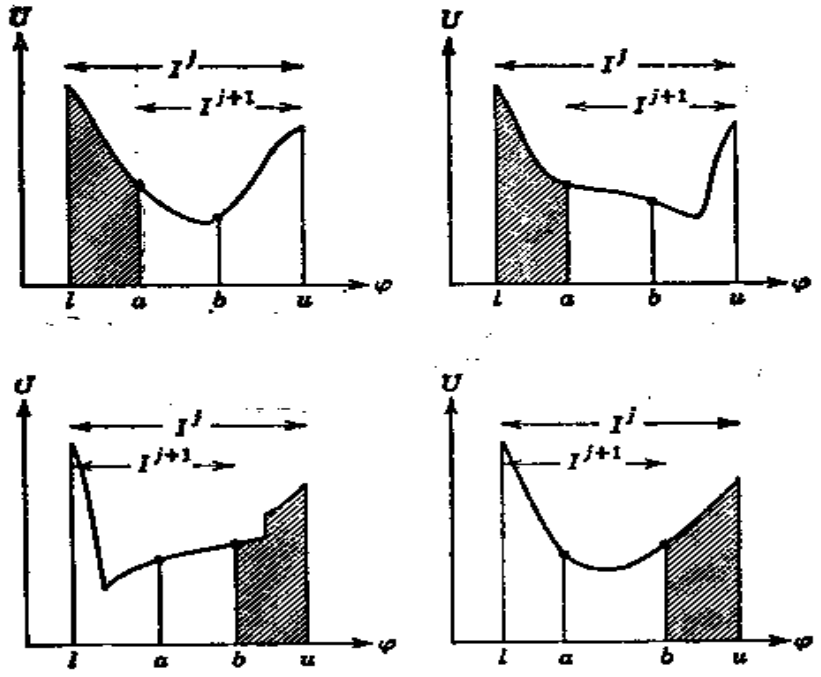


图 6-12 不确定性区间的缩小

定这些内点所在位置。让我们讨论效率稍低，但较简单的黄金分刈搜索法。欲知各种方法的更详细内容，请读者参考[6、8、26]。

U_a 和 U_b 相比的无论什么结果，都要求

$$I^{j+1}=u-a=b-l, \tag{6.72}$$

这可由 a 和 b 在$[l,u]$上的对称位置来得到。我们想要使 I^{j+1} 为最小，并再在新区间中利用诸点之一，导致

$$I^{j+2}=u-b=a-l. \tag{6.73}$$

由(6.70)到(6.73)得

$$I^j=I^{j+1}+I^{j+2}. \tag{6.74}$$

为了在每次迭代中都用常数因子 r 来减小不确定性区间：

$$\frac{I^j}{I^{j+1}}=\frac{I^{j+1}}{I^{j+2}}=\tau. \tag{6.75}$$

方程(6.74)和(6.75)导致

$$\tau^2=\tau+1, \tag{6.76}$$

相关的解为 $\tau=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\cong 1.618034$。按照(6.74)和(6.75)分划线条就叫做线条的黄金分划*。

在这种方案的 j 次迭代中

$$\begin{aligned}\phi_a^j&=\frac{1}{\tau^2}I^j+\phi_i^j\\ \phi_b^j&=\frac{1}{\tau}I^j+\phi_i^j\end{aligned}\qquad j=1,2,3,\cdots. \tag{6.77}$$

注意除第一次外的每次迭代中，由于对称性都只计算一次函数值。依靠第 j 次迭代的结果，就可为第$(j+1)$次迭代定出适当的量并重复这种步骤。在作了 n 次函数值计算之后有

$$\frac{I^1}{I^n}=\tau^{n-1}. \tag{6.78}$$

对于所需的精度 δ，应这样选择 n 以使

$$\tau^{n-2}<\frac{\phi_a^1-\phi_i^1}{\delta}\leqslant\tau^{n-1}. \tag{6.79}$$

容易证明：对于大的 n 值，黄金分划法所提供的不确定性区间只比菲博纳西搜索法的约大 17%。但后一方法又有函数计算的数目需要预先加以固定的缺点。

也可能构成由特姆斯(Temes)[15]所描述的方案，在这种方案中最初的不确定性区间并不必须预先加以固定。已把这种方案和班德勒、斯里尼法斯安和查雷兰布斯[20]的方法一起加

* 一般把 0.618 法叫做黄金分划法，但 0.618034 的倒数就是 1.618034——译者注。

以使用(6.4 节)。

插值法

有几种可用的插值法，包括二次的和三次的[8、26、27、28]。一种由戴维斯(Davies)、斯旺(Swann)和坎皮(Campey)所提出的很直截了当的方法[8、26]，将在这里加以叙述。这种方法并不需要事先知道含有最小值的单峰区间，但单峰性限制仍应该保持。

把$U^i \triangleq U(\phi^\circ + \alpha^i s)$对

$$\alpha^\circ = 0$$

$$\alpha^i = \sum_{j=1}^{i} 2^{j-1}\delta, \quad i = 1, 2, \cdots \tag{6.80}$$

求值。其中 s 决定负梯度方向，即

$$s \triangleq \left.\frac{-\dfrac{\partial U}{\partial \phi}}{\left|\dfrac{\partial U}{\partial \phi}\right|}\right|_{\phi=\phi^\circ} \tag{6.81}$$

而且 $\delta > 0$，例如 ϕ° 的 1% 就是一个方便的增量。因而 α^i 在降低 U 方向为正步长。对某些 i 来说，如果

$$U(\alpha^i) > U(\alpha^{i-1}), \tag{6.82}$$

则在

$$\alpha^{i+1} = \alpha^{i-1} + (\alpha^{i-1} - \alpha^{i-2}) \tag{6.83}$$

处计算 U^{i+1}。显然，在 α 轴上现在有四个均匀隔开的点，即按照 α 增大的顺序为 α^{i-2}、α^{i-1}、α^{i+1} 和 α^i。注意 $i \geqslant 2$。

如果 $U(\alpha^{i+1}) < U(\alpha^{i-1})$，则使 $a = \alpha^{i-1}$、$b = \alpha^{i+1}$、$c = \alpha^i$。

如果 $U(\alpha^{i+1}) > U(\alpha^{i-1})$，则使 $a = \alpha^{i-2}$、$b = \alpha^{i-1}$、$c = \alpha^{i+1}$。

(6.84)

容易证明：在 a、b 和 c 点拟合的二次函数的最小值，就在

$$\alpha_{\min}=b+\frac{(b-a)(U_a-U_c)}{2(U_a-2U_b+U_c)}. \qquad (6.85)$$

在 $\alpha_{\min}$ 处计算 U 的值就给出最小值的估值并且完成该方法的一个阶段。减少 δ 的新阶段可以在 b 或 $\alpha_{\min}$ 处开始，它们都对应于较小的 U 值。

6.6 求最小值的直接搜索法

作者所说明的直接搜索法就是：并不明显地依靠目标函数梯度向量的求值或估值的一类方法。这样一类方法在网络最优化方面已相当广泛地使用[6、21、22、29]。然而，与求导数值的目前可用方法（参看6.9节）相比，它能在多大程度上保持竞争还无定论。

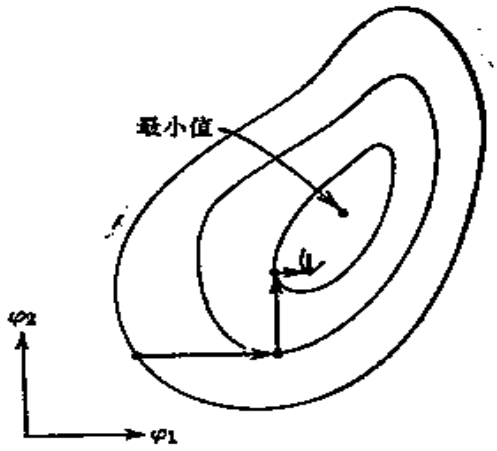


图 6-13 时分搜索

最简单的方法之一就是时分法。如图 6-13 所示，这个过程基本上包括使一个参量变化直到得不到改进，然后搜索另一个参量等等。在与任何座标轴方向都不相符的谷区上，过程是相当慢的。

显然我们必须考虑更有效的方法。两种广泛使用的方法要加以回顾，即胡克(Hooke)与吉夫斯(Jeeves)的模型搜索法[30]和纳尔德(Nelder)与米德（Mead）的单纯形法[31]。其他有名

的方法为：罗森布罗克（Rosenbrock)法[32]、鲍威尔-赞格威尔(Powell-Zangwill)法[28、33]以及戴维斯、斯旺和坎皮的方法[26]。这些方法在某些一般参考文献中[1、6、8、26、34]有讨论。

模型搜索

模型搜索法优于时分法之处在于，它设法检出存在的谷区，并沿谷区调整搜索的方向。模型搜索所使用的策略，将用图

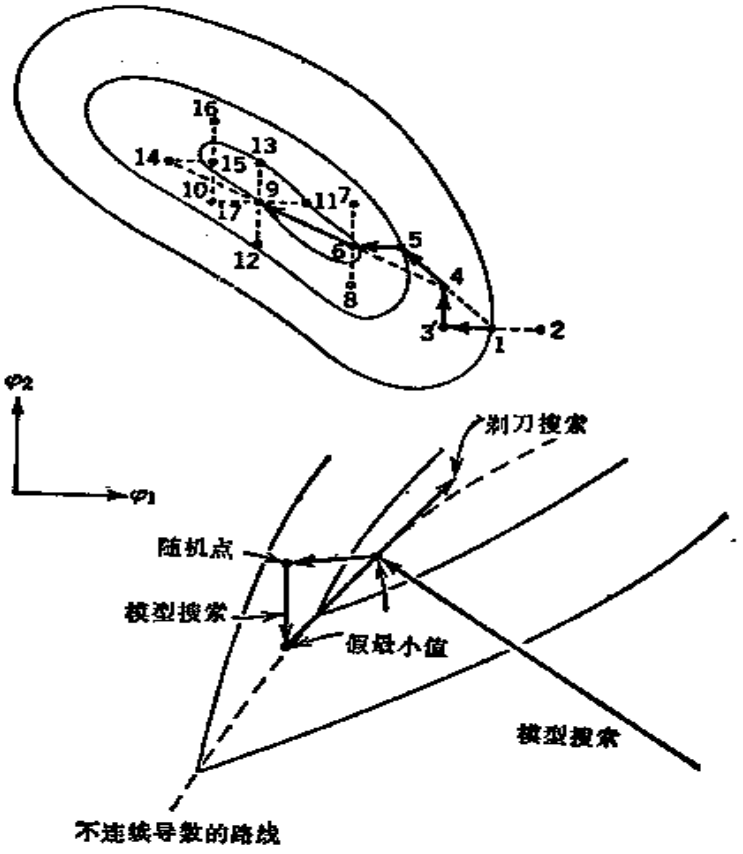


图 6-14 顺沿谷值进行模型搜索和剃刀搜索

6.14 所示的例子来解释。

取第一个基点 δ^1 作为开始点 ϕ^1。从 ϕ^1 着手一系列探索移步来寻求第二个基点。在例子中，增加 ϕ_1 以引导我们到 ϕ^2。现在 $U^2>U^1$ 所以舍弃 ϕ^2，并按相反方向增加 ϕ_1 到 ϕ^3。沿 ϕ_1 的探索结束。$U^3<U^1$ 所以保留 ϕ^3，并开始沿 ϕ_2 的探索。$U^4>U^3$ 所以保留 ϕ^4 以代替 ϕ^3。第一组探索移步就完了，从而 ϕ^4 成为第二个基点 δ^2。在还会成功的指望下，我们进行模型移步到 $\phi^5=2\delta^2-\delta^1$，这是按 $\delta^2-\delta^1$ 方向移步。用另一组探索移步，设法在 ϕ^5 附近来寻求最有希望的点。这个点，在这里就是 ϕ^6，它成为第三个基点 δ^3，因为 $U^6<U^4$。搜索继续按 $\delta^3-\delta^2$ 方向模型移步到 ϕ^9。

象围绕 ϕ^{14} 那样如果模型移步再加上探索失败，模型方向就被破坏。对策是应回到先前的基点。如果围绕基点的探索移步失败，象围绕 ϕ^9 那样，则把参量增量减小并就在那里重新开始上述步骤。当参量增量落在规定界限内或者函数求值的次数已达上限或执行程序的时间已达到上限时，搜索就可能终止。

斑德勒(Bandler)和麦克唐纳(Macdonald)的剃刀搜索法[22]，是模型搜索的一种发展，适合于不使用导数的直接最优化(在极大极小意义上)。“剃刀尖”谷值一般发生于当企图使(6.50)形式的函数最小化时，常常会出现“剃刀口”一样的谷区，由这个事实而提出了剃刀搜索这个名称。沿着这样的谷底可找到导数不连续的轨迹线，如图 6-11 和 6-14 所示。

在电阻性终端之间起阻抗变量器作用的不可通约传输线的级联装置的最优化方面，对模型搜索的性能进行了研究[29]。据观察只有在碰到了尖锐的谷区（其围线完全落在座标轴的一个象限以内）时，模型搜索才失败。在这种情况下，作平行于

这些轴的搜索，没有任何改善的可能。

剃刀搜索法在模型搜索失败的点上（假定是假最小值）做随机移步，并利用模型搜索返回到不连续导数的轨迹线。（参看图 6-14。）如果模型搜索再度失败，就设法在明显的倾斜方向建立一个模型，并继续模型搜索。用剃刀搜索法得出了图 6-8 中所示的结果[21]。

值得在这里一提的看法是，利用相互作用系统并使用比如说时分法，进行在极大极小意义上的人工网络最优化时，容易终止在假的最小值上。在目前这种情况下的假最小值可能就代表着等波纹响应，但不是在极大极小意义上的局部最优点。

单纯形法

在非线性优化的单纯形法中，目标函数是在 k 维空间内单纯形的 $k+1$ 顶点上计算的。例如，在二维内就会有三角形，对于三维就会有四面体。于是它力图用另一点来替换具有最大目标函数值的点。

一种具有很需要的跟踪谷区性质的方法，是由纳尔德(Nelder)和米德（Mead）提出的方法[31]。它的基本移步是将具有最大函数值的点在由余下各点所形成的单纯形的质心处反射出去。如果反射点的函数值低于现有最低函数值，则进行扩展，要不然就保留该点，如果它的函数值低于第二个最高函数值的话。如果反射失败，则进行压缩。最后，当压缩失败时，就在对应于最低函数值的顶点周围收缩单纯形。这些移步当中有些在图 6.15 中说明。

单纯形策略的一例示于图 6-16 中。注意到 ϕ^4、ϕ^6、ϕ^8、ϕ^9 和 ϕ^{10} 是由反射得出；ϕ^5 由扩展得出；而 ϕ^7 和 ϕ^{11} 则由压缩得出。读者应按照策略充分仔细地领会它。它所需要的跟踪

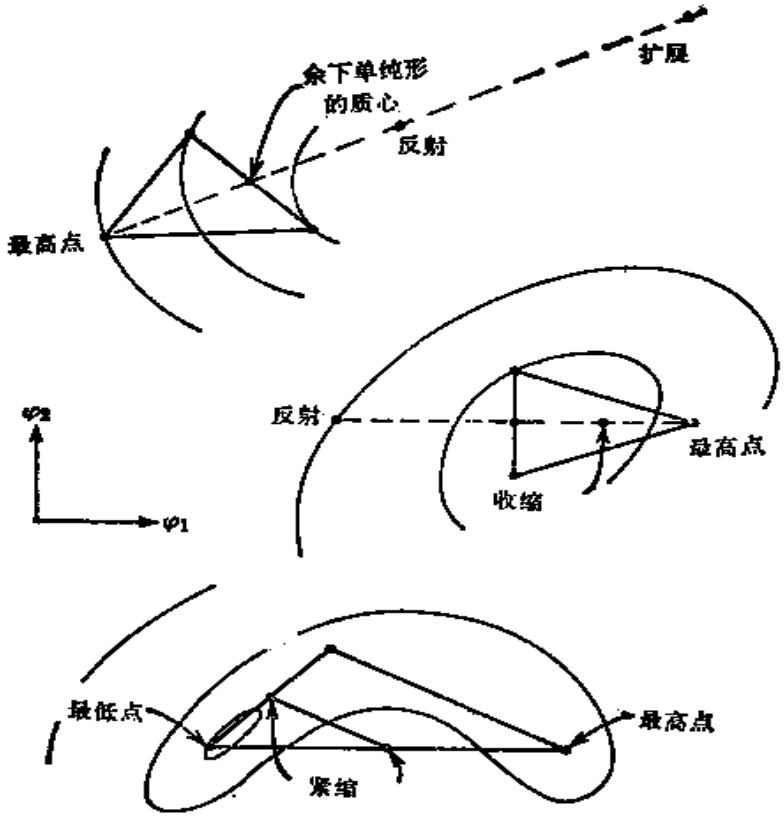


图 6-15　用单纯形法所作的移步的例子

谷区的性质，来源于它具有按谷区方向调整其延长了的单纯形的能力。尤其是屡次成功，例如，如果正沿着长直谷区探索，势必增加移步的大小；反过来如果接连失败，例如碰到谷区的拐弯处，则势必使移步的大小减小。

有人多次对作者断言：跟其他一些直接搜索法不同，单纯形法可以成功地用于极大极小逼近。按作者的经验，举例来说，单纯形法在确实可靠方面不亚于模型搜索。辩论中的主要谬误就是假定：如果这种方法不要求导数知识，它就必然可以处理

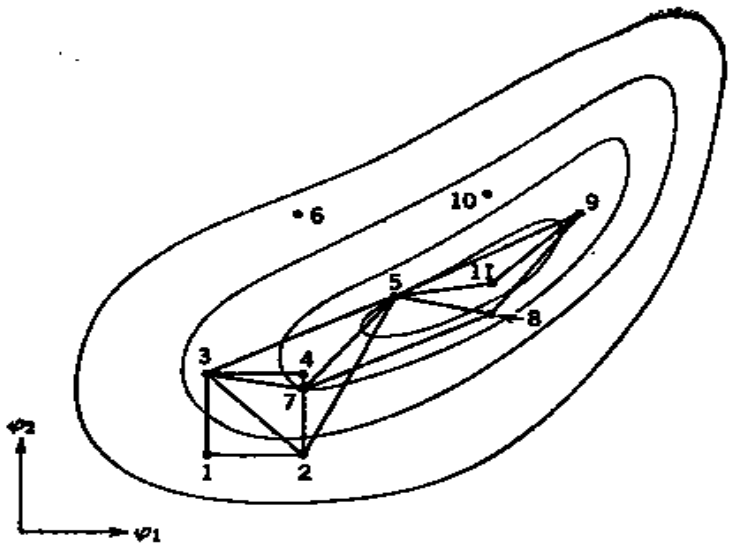


图 6-16　用单纯形法最优化

具有不连续导数的问题。

6.7　求最小值的梯度法

现在把注意力转向要求导数的一类极小化方法。一般说来，现行可用的最有效算法是依靠梯度向量的求值[1、5、6、8、14、15、26、27、35]。

最陡下降

在大部分梯度法的第 j 次迭代中，我们继续取

$$\boldsymbol{\phi}^{j+1}=\boldsymbol{\phi}^{j}+\alpha^{j}\boldsymbol{s}^{j} \tag{6.86}$$

式中 $\boldsymbol{s}^{j}$（有希望地）是一下降的搜索方向，而且 $\alpha^{j}>0$ 是使 $U(\boldsymbol{\phi}^{j}+\alpha^{j}\boldsymbol{s}^{j})$ 为最小所选择的标度因子。适合于这个目的的一维极小化方法已在 6.5 节中讨论过了。

对 s^t 的最明显选择就是如下所规定的在 ϕ^t 的最陡下降方向。参考前面的(6-11)，注意到目标函数展开式中的一阶变化项为

$$\Delta U = \nabla U^T \Delta \phi. \tag{6.87}$$

如果 $\Delta\phi = \alpha s$，其中固定 $\alpha > 0$ 而且 $\|s\| = 1$*，那么容易证明：使 ΔU 为最小的 s 为

$$s = -\frac{\nabla U}{\|\nabla U\|}. \tag{6.88}$$

(6.88)中的 s 为归一化梯度向量的负数。尽管 $-\nabla U/\|\nabla U\|$ 提供最大的局部变化，但最陡下降法的成功还是高度取决于比例描绘。如图 6-17 所示，最初的少数几次迭代可能引起 U 的显著减小，但其后这种方法通常就迅速恶化成起伏状，进展也就变得很慢。

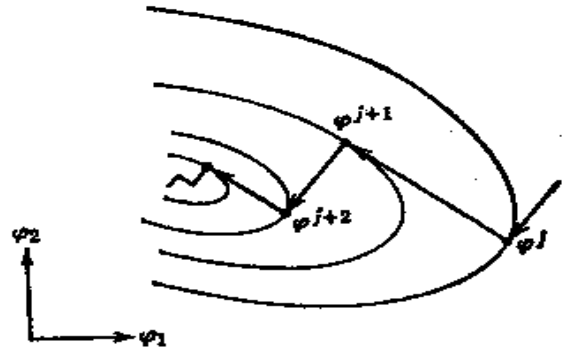


图 6-17 最陡下降策略

牛顿法

这个方法已经在 6.2 节解非线性方程组的时候提到过了。微分泰勒级数 (6.11) 得

$$\nabla U(\phi + \Delta\phi) = \nabla U(\phi) + \mathbf{H}\Delta\phi + \cdots. \tag{6.89}$$

要使 $\phi + \Delta\phi$ 为最小点 $\hat{\phi}$，则 $\nabla U(\phi + \Delta\phi)$ 应为 **0**，因此(略去高阶项)

---

* 这个符号 $\|\cdot\|$ 是尤斯利迪安 (Euclidean) 范数。取 $p=2$ 则有(6.23)的形式。

$$\Delta\phi = -\mathbf{H}^{-1}\nabla U. \tag{6.90}$$

如果我们是在处理二次函数（6.2 节），则这个增量变化只在一次迭代中就把我们引到最小值。把（6.90）与（6.19）相比是有教益的。

在 U 不是二次型的时候，我们可以试用迭代方案

$$\phi^{i+1} = \phi^i - \mathbf{H}^{-1}\nabla U^i \tag{6.91}$$

式中 $\mathbf{H}^{-1}$ 为在第 j 次迭代的海赛（Hessian）逆矩阵。可是，这个方案有几个缺点。H 必须是正定的，否则就会出现发散性。特别是，$-\mathbf{H}^{-1}\nabla U^i$ 可能不是指向下坡。为了防止这些可能性，可以修改为：

$$\phi^{i+1} = \phi^i - \alpha^i\mathbf{H}^{-1}\nabla U^i, \tag{6.92}$$

式中选择 α^i 来使 U^{i+1} 为最小。这可能还是无效的，α^i 可能必须为负，H 可能是局部奇异的。最后，H 及其倒数的计算是费时间的。

共轭方向

利用与二次函数有关的共轭方向的性质、而且并不明显地计算 H 或其倒数的某些梯度法是非常有效的。在讨论它们之前，让我们先定义共轭方向。

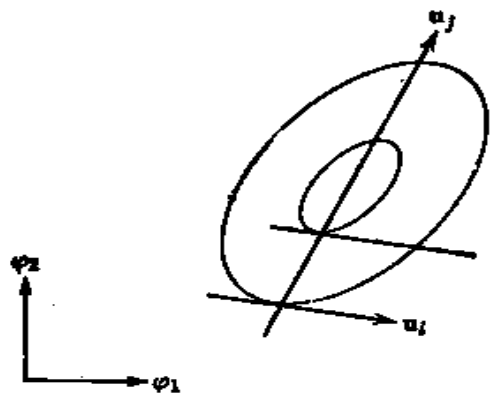


图 6-18 两个共轭方向的说明

如果

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{A}\mathbf{u}_j = 0, \quad i \neq j. \tag{6.93}$$

就把方向 $\mathbf{u}_i$ 和 $\mathbf{u}_j$ 说成是（对于正定矩阵 A）共轭的，在图 6-18 中，给出了共轭方向的二维解释。产生

这样方向的方法将在有限次迭代中使二次函数为最小。很明显，依次沿每个方向作线性极小化可定出最小值。

利用共轭方向的三个有名的方法是：弗莱彻（Fletcher）和里夫斯（Reeves）所叙述的**共轭梯度法**[35]、弗莱彻-鲍威尔（Powell）-戴维敦（Davidon）法[27]、以及并不要求导数的鲍威尔-赞格威尔（Zangwill）法[28、33]（并参看参考文献[1、8]）。

共轭梯度法

搜索方向 $\mathbf{s}^i$ 给定为[35]

$$\mathbf{s}^i = -\nabla U^i + \beta^i \mathbf{s}^{i-1} \tag{6.94}$$

式中

$$\beta^i = \frac{(\nabla U^i)^T \nabla U^i}{(\nabla U^{i-1})^T \nabla U^{i-1}}, \tag{6.95}$$

而且最初 $\beta^0 = 0$。因而第一次迭代是在最陡下降方向。不及计舍入误差，这个步骤至多经 k 次迭代就可达到二次函数的最小值。不过，通常最好是作完 $k+1$ 次迭代后，再重新开始下一轮迭代。

弗莱彻-鲍威尔-戴维敦法

重新把 $\mathbf{H}$ 规定为任一正定矩阵，我们有[27]

$$\mathbf{s}^i = -\mathbf{H}^i \nabla U^i. \tag{6.96}$$

注意 $\mathbf{H}^i$ 是海赛逆矩阵的第 j 次近似值。最初 $\mathbf{H}^0$ 为单位矩阵，而且还是最陡下降方向。

$\mathbf{H}$ 是利用一阶导数知识作不断的修改，以使

$$\boldsymbol{\phi}^{i+1} - \boldsymbol{\phi}^i = \mathbf{H}^{i+1} \mathbf{g}^i \tag{6.97}$$

式中

$$\mathbf{g}^i = \nabla U^{i+1} - \nabla U^i .$$

利用以下的修改步骤：

$$\mathbf{H}^{i+1} = \mathbf{H}^i + \frac{\Delta\boldsymbol{\phi}^i \Delta\boldsymbol{\phi}^{iT}}{\Delta\boldsymbol{\phi}^{iT}\mathbf{g}^i} - \frac{\mathbf{H}^i\mathbf{g}^i\mathbf{g}^{iT}\mathbf{H}^i}{\mathbf{g}^{iT}\mathbf{H}^i\mathbf{g}^i} \qquad (6.98)$$

式中

$$\Delta\boldsymbol{\phi}^i = \alpha^i \mathbf{s}^i ,$$

并由一维搜索找到 α^i（6.5 节）。

弗莱彻和鲍威尔用归纳法证实：如果 $\mathbf{H}^i$ 是正定的，那么 $\mathbf{H}^{i+1}$ 也是正定的。$\mathbf{H}^0$ 为单位矩阵，显然是正定的。有关二次函数有人进一步证明：$\mathbf{H}^k$ 是海赛逆矩阵而且 $\nabla U^k = \mathbf{0}$，不及计舍入误差。收敛的证明和成就两者实际上都取决于线性搜索中最小值的准确位置。必要时，$\mathbf{H}$ 可以复位到单位矩阵。

一般仍然把这种方法公开认为是最好的通用梯度最优化方法。

6.8 最小 p 乘逼近

本节中的材料，同样完全可以在梯度法中加以讨论。不过，分清这些问题是有用的，因为对于最小 p 乘逼近，有现成的特殊方法可用。

对于（6.29）和（6.30）形式的目标函数，对连续情况可以写出

$$\nabla U = \int_{\psi_l}^{\psi_u} \mathrm{Re}\{p|e(\boldsymbol{\phi},\psi)|^{p-2}e^*(\boldsymbol{\phi},\psi)\nabla e(\boldsymbol{\phi},\psi)\}d\psi , \qquad (6.99)$$

对离散情况则可以写出

$$\nabla U = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}\{p|e_i(\boldsymbol{\phi})|^{p-2}e_i^*(\boldsymbol{\phi})\nabla e_i(\boldsymbol{\phi})\} . \qquad (6.100)$$

如果合适的导数即∇，可以得到，我们就可以用适当的梯度法着手最优化（6.7 节）。

在更复杂的情况下，我们可以想象按（6.29）和（6.30）形式的函数的线性组合，例如

$$U=\alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2+\cdots. \tag{6.101}$$

多个响应指标的同时逼近可以按这种方式列出(参看 6.9 节)。因数 α_1、α_2 等应给定的数值要与 U_1、U_2 等的重要性成比例。

特姆斯（Temes）和蔡（Zai）[15、36] 已把有名的高斯(Gauss) 的最小二乘法 [6、8、14] 推广成最小 p 乘法。因为前法属于一种特例，将简短地叙述后法。为了明确起见，假定目标函数具有形式（$e_i(\phi)$ 为实数）

$$U=\sum_{i=1}^{n}[e_i(\phi)]^p, \tag{6.102}$$

式中 $n>k$ 并且 p 为任一偶正整数。那么

$$\nabla U=\sum_{i=1}^{n} p\cdot e_i^{p-1}\nabla e_i \tag{6.103}$$

而且

$$\mathbf{H}=\nabla(\nabla U)^T=\sum_{i=1}^{n}[pe_i^{p-1}\nabla(\nabla e_i)^T+$$

$$p(p-1)e_i^{p-2}\nabla e_i(\nabla e_i)^T]. \tag{6.104}$$

现在假定第一项与第二项相比可以忽略。这确实相当于 $e_i(\phi)$ 的线性化。于是

$$\mathbf{H}\approx\sum_{i=1}^{n} p(p-1)e_i^{p-2}\nabla e_i(\nabla e_i)^T.$$

可以再把这写成

$$\mathbf{H}\approx p(p-1)\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{A} \tag{6.105}$$

式中

$$\mathbf{A}\triangleq[\nabla e_1\ \nabla e_2\cdots\nabla e_n]^T.$$

和

$$\mathbf{B}\triangleq\begin{bmatrix} e_1^{p-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2^{p-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n^{p-2} \end{bmatrix}.$$

设

$$\in\triangleq[e_1^{p-1}\ e_2^{p-1}\cdots e_n^{p-1}]^T,$$

则 (6.103) 变成

$$\nabla U=p\mathbf{A}^T\in. \tag{6.106}$$

利用牛顿法所给定的步骤 (6.90),

$$\Delta\phi=-(p-1)^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\in. \tag{6.107}$$

在适当条件下可以证明：$\Delta\phi$ 指向下坡的方向。修改的牛顿步骤

$$\phi^{i+1}=\phi^i-\alpha^i(p-1)^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\in \tag{6.108}$$

是可取的，式中 α^i 的选择应使 U^{i+1} 为最小。

类似于用在高斯法中的那些阻尼技术是可应用的[8、14]。例如，规定

$$U=\sum_{i=1}^{n}[e_i(\phi)]^p+\lambda\Delta\phi^T\Delta\phi. \tag{6.109}$$

那么

$$\mathbf{H}\approx p(p-1)\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{A}+2\lambda\mathbf{I}_n \tag{6.110}$$

而且

$$\Delta\phi=-p[p(p-1)\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{A}+2\lambda I_n]^{-1}\mathbf{A}^T\in. \tag{6.111}$$

可以证明：保持了收敛和倾斜性质，而且对 $\lambda>0$，则步长不大于无阻尼步长。如 $\lambda\to0$，过程是无阻尼的；而对 $\lambda\to\infty$，则步长是沿着最陡下降方向。也可以引入 α^i 来进行 (6.108) 那

种线性搜索。

例 6.3 最小 p 乘逼近［37］与极大极小逼近相比较的例子，描绘于图 6-19。它是在 6.4 节中所讨论的一种滤波器，其结构是七节传输线的级联。这里的问题是要观察：在题目的约束下通带插入衰减可能达到多小（如果 R_g 和 R_L 不随频率变化，或者允许长度变更，则答案总是不重要的）。

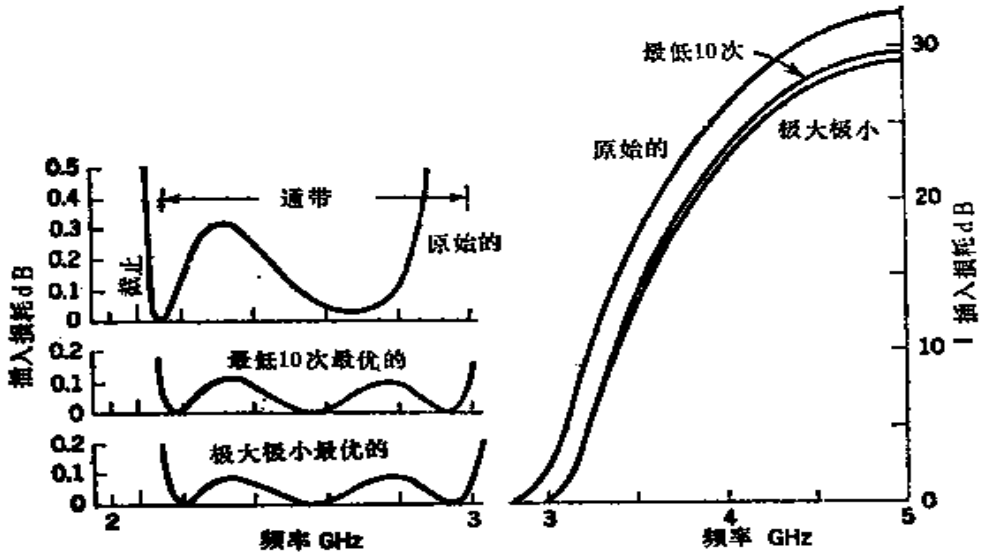


图 6-19 在优化图 6.9 滤波器的通带中，最小10乘逼近与极大极小逼近相比的例子

利用 51 个在通带中彼此均匀隔开的点，并按 $p=10$ 来建立最小 p 乘目标函数。这个目标函数具有形式

$$U=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p}|\rho_i(\phi)|^p.$$

利用了弗莱彻-鲍威尔-戴维敦法（6.7 节），所要求的一阶导数则是利用伴随网络法（6.9 节）从一种网络分析得到的。

把所得到的其通带最大插入衰减约 0.1 dB 的几乎等波纹的通带响应，同极大极小逼近所产生的等波纹响应（最大插入损耗 0.086 dB）进行比较。后者的解是由班德勒和李-钱 [24] 利用梯度算法包括用来判定波纹极值的二次插值法而得到的。

由这个例子所获得的主要结论就是：用比较适中的 p 值就可以达到满意的结果。如果不采取特殊预防措施来避免病态，则不宜使用比 10 大的 p 值。

6.9 计算梯度的伴随网络法

在计算与增益、插入衰减、反射系数或其他所需的任何响应有关的目标函数的梯度向量值方面，采用**伴随网络法**是很有利的。很大一类网络都可以用这种方法来处理。将会看到，无论可变参数的数目有多少都仅仅需要两个完全的网络分析来计算梯度向量。

戴雷克托（Director）和罗勒（Rohrer）已讨论过伴随网络的概念，并且指出它在频域和时域中与网络的自动化设计的关系[38、39]。在频域中[39]，他们考虑了互易和非互易、集总、线性和非时变元件。我们在此将只考虑频域情况回顾戴雷克托和罗勒的结果，并把它们推广到最小 p 乘逼近和极大极小逼近。还将包括一些均匀的分布元件[37、40]。

伴随网络和网络灵敏度

设

$$\mathbf{V} \triangleq \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} \tag{6.112}$$

包括一网络中的所有支路电压，并且

$$\dot{\mathbf{I}} \triangleq \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_b \end{bmatrix} \tag{6.113}$$

包括所有对应的支路电流（利用相关的参考方向*）。v 和 $\dot{\mathbf{I}}$ 必须分别满足基尔霍夫（Kirchhoff）电压和电流定律。于是特勒金(Tellegen)定理叙述为[41]

$$v^T \dot{\mathbf{I}} = 0. \tag{6.114}$$

只要两网络的拓扑结构相同，v 可归属于一个网络，而 $\dot{\mathbf{I}}$ 则归属于另一个网络（参看图 6-20 中的例子）。因此让我们设想有两个网络：一个是应加以最优化的原网络，另一个是具有相同拓扑结构的伴随网络。如早先所叙述的，我们在频域中将只涉及线性、非时变网络的研究。因而用变量 V 和 I 表示原网络的有关相量，而 $\hat{\mathbf{V}}$ 和 $\hat{\mathbf{I}}$ 则表示伴随网络的有关对应相量。由特勒金定理

$$\mathbf{V}_B^T \hat{\mathbf{I}}_B = 0$$

$$\mathbf{I}_B^T \hat{\mathbf{V}}_B = 0 \tag{6.115}$$

式中下标 B 意味着相关向量包含所有对应的复数支路电压和电流。扰动原网络中的元件，我们有

$$\Delta \mathbf{V}_B^T \hat{\mathbf{I}}_B = 0 \tag{6.116 a}$$

$$\Delta \mathbf{I}_B^T \hat{\mathbf{V}}_B = 0 \tag{6.116 b}$$

因为基尔霍夫电压和电流定律也必然适用于 $\Delta \mathbf{V}_B$ 和 $\Delta \mathbf{I}_B$。由(6.116 a)减去(6.116 b)得

---

* 用相关的参考方向，电流总是在“+”进入支路，并在“−”离开支路。

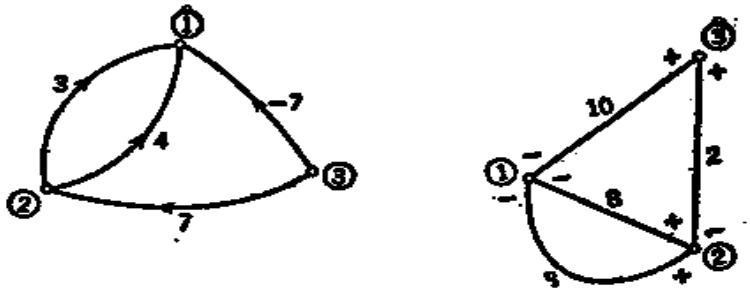


图 6-20　特勒金定理用于两个具有相同拓扑网络的说明。注意有 $\mathbf{v}^T\mathbf{I}=24+32-70+14=0$。因为元件的性质不重要，故用支路替换了它们。

$$\Delta\mathbf{V}_B^T\hat{\mathbf{I}}_B-\Delta\mathbf{I}_B^T\hat{\mathbf{V}}_B=0. \tag{6.117}$$

图 6-21 表示分别用开路阻抗矩阵 $\mathbf{Z}$ 和 $\hat{\mathbf{Z}}$ 来表征 N 端对原单元网络和伴随单元网络。设 $\mathbf{V}$、$\mathbf{I}$、$\hat{\mathbf{V}}$ 和 $\hat{\mathbf{I}}$ 代表包含相关端对变量的 N 元向量

$$\mathbf{V}=\mathbf{Z}\mathbf{I} \tag{6.118}$$

$$\hat{\mathbf{V}}=\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{I}}. \tag{6.119}$$

扰动原单元网络的参数并忽略高阶项，得

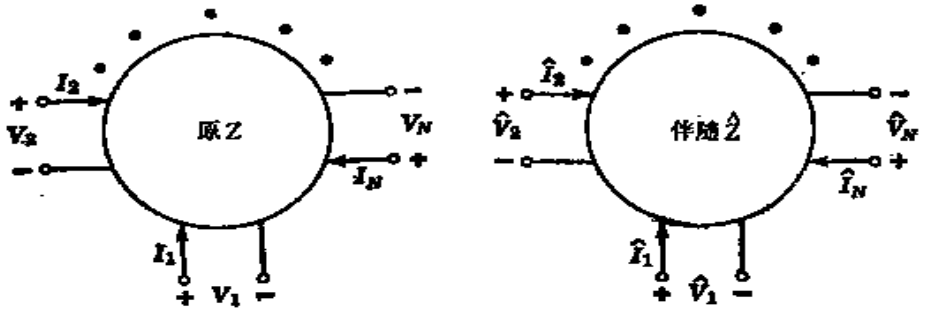


图 6-21　用阻抗矩阵表示的原单元网络和伴随元单元网络。通常把许多这样的单元网络适当连接，就形成原网络和伴随网络。

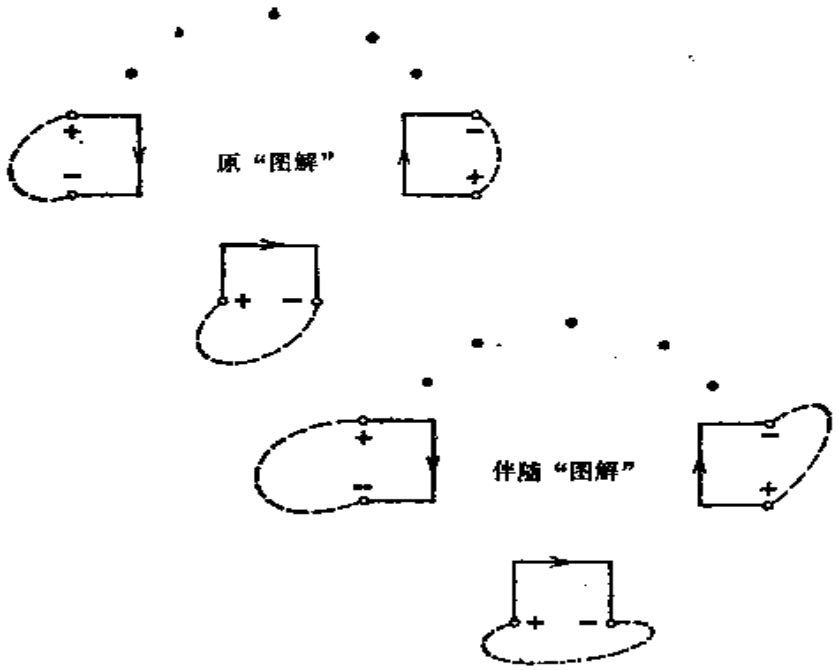


图 6-22　在应用特勒金定理时，图 6-21 单元网络的表示法。某些等效支路（设为第 i 支路），可由其值为 $z_{ij}I_j$ 的电压发生器与阻抗 z_{ij} 串联组成，$j=1, 2, \cdots$。参看图 6-25 的例子。

$$\Delta\mathbf{V}=\Delta\mathbf{Z}\mathbf{I}+\mathbf{Z}\Delta\mathbf{I}. \tag{6.120}$$

如图 6-22 所表示，可以把端对变量看做是等效支路变量，所以把(6.120)代入(6.117)，可以看出

$$(\mathbf{I}^T\Delta\mathbf{Z}^T+\Delta\mathbf{I}^T\mathbf{Z}^T)\hat{\mathbf{I}}-\Delta\mathbf{I}^T\hat{\mathbf{V}}$$

可以简化为

$$\mathbf{I}^T\Delta\mathbf{Z}^T\hat{\mathbf{I}}, \tag{6.121}$$

如果取

$$\hat{\mathbf{Z}}\equiv\mathbf{Z}^T. \tag{6.122}$$

这就给伴随单元网络下了定义。注意，表达式（6.121），是(6.117)中唯一与该N端对单元网络有关的项，它不包含$\Delta\mathbf{I}$或$\Delta\mathbf{V}$。此外还要看到，互易单元网络的伴随单元网络和原来的相同，因为$\mathbf{Z}^T=\mathbf{Z}$。

其次定义电压和电流的激励向量和响应向量如图 6-23。

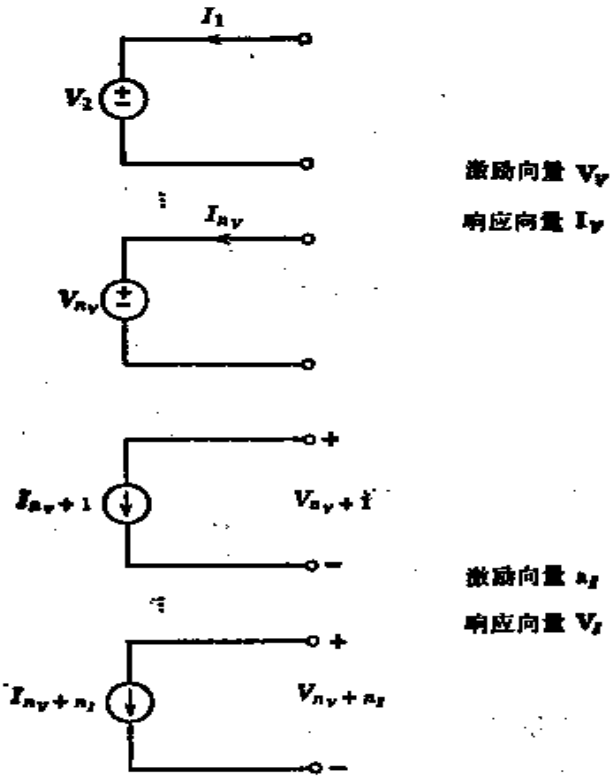


图 6-23　端对激励向量和响应向量

沿用现在的符号，帽“∧”用来表示伴随网络的对应量。在(6.117)中与激励和响应相应的几项为

$$\Delta\mathbf{V}_V^T\hat{\mathbf{I}}_V-\Delta\mathbf{I}_V^T\hat{\mathbf{V}}_V+\Delta\mathbf{V}_I^T\hat{\mathbf{I}}_I-\Delta\mathbf{I}_I^T\hat{\mathbf{V}}_I$$

它可简化为

$$-\Delta\mathbf{I}_V^T\hat{\mathbf{V}}_V+\Delta\mathbf{V}_I^T\hat{\mathbf{I}}_I \qquad (6.123)$$

因为激励保持固定时，$\Delta \mathbf{V}_v$ 和 $\Delta \mathbf{I}_i$ 变为零。

显然，可以把任何网络都看做是由一些多端对单元网络的互连组成的。因而可以在（6.117）中出现几个具有表达式(6.121)形式的项。

对于导纳矩阵表示法，我们可以证明：

$$-\mathbf{V}^T\Delta\mathbf{Y}^T\hat{\mathbf{V}} \tag{6.124}$$

相当于表达式（6.121)。$\mathbf{Y}^T$ 为伴随的导纳矩阵。对于混合矩阵，事情更稍微复杂。如果我们采取

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_a\\ \mathbf{V}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y} & \mathbf{A}\\ \mathbf{M} & \mathbf{Z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_a\\ \mathbf{I}_b\end{bmatrix}, \tag{6.125}$$

那么其伴随的对应关系为

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{I}}_a\\ \hat{\mathbf{V}}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}^T & -\mathbf{M}^T\\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{Z}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{V}}_a\\ \hat{\mathbf{I}}_b\end{bmatrix}. \tag{6.126}$$

可以把相当于(6.121)的表达式表示为

$$[\mathbf{V}_a^T\ \mathbf{I}_b^T]\begin{bmatrix}-\Delta\mathbf{Y}^T & \Delta\mathbf{M}^T\\ -\Delta\mathbf{A}^T & \Delta\mathbf{Z}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{V}}_a\\ \hat{\mathbf{I}}_b\end{bmatrix}. \tag{6.127}$$

为了总结上面讨论的结果，注意可以把(6.117)写成形式

$$\Delta\mathbf{I}_v^T\hat{\mathbf{V}}_v-\Delta\mathbf{V}_i^T\hat{\mathbf{I}}_i=\mathbf{G}^T\Delta\boldsymbol{\phi} \tag{6.128}$$

式中 G 为与网络可调参量即 $\boldsymbol{\phi}$ 有关的灵敏度分量的向量。方程（6.128）基本上是有关于由于元件值变化所造成的端对响应中的变化。

图 6-24 表明直接把公式(6.121）和（6.124)应用于三种常用单元网络的结果。表 6-2 总结了一些常用的集总和分布单元网络的灵敏度表达式。由单支路组成的单元网络，可简单地看作单端对元件。

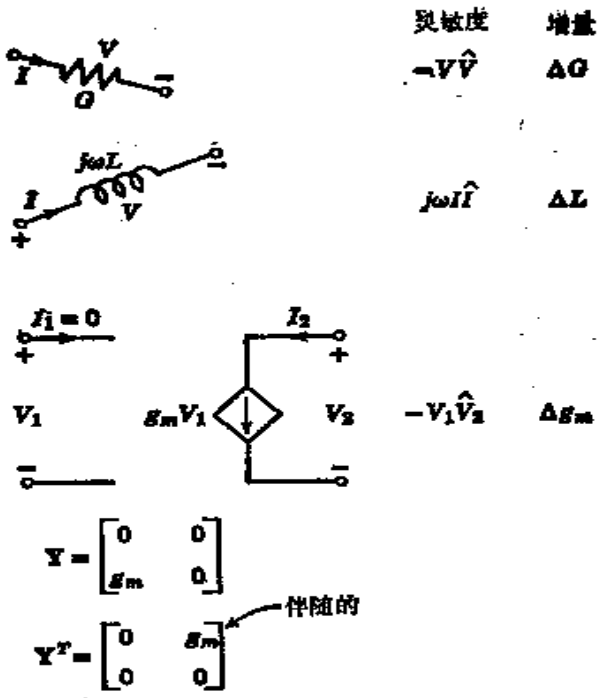


图 6-24　三个常用单元网络：电导为G的电阻器、电感为L的电感器、和具有转移电导g_m的电压控制电流源的灵敏度。

例如，考虑具有特性阻抗Z_0和电长度θ的均匀线（图6-25）。因为它是互易的：

$$\hat{\mathbf{Z}}=\mathbf{Z}^T=\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_0\begin{bmatrix}\coth\theta & \operatorname{csch}\theta\\ \operatorname{csch}\theta & \coth\theta\end{bmatrix}. \tag{6.129}$$

援引表达式(6.121)我们得到

$$\mathbf{I}^T\Delta\mathbf{Z}^T\hat{\mathbf{I}}=\mathbf{I}^T\left(\Delta Z_0\begin{bmatrix}\coth\theta & \operatorname{csch}\theta\\ \operatorname{csch}\theta & \coth\theta\end{bmatrix}-\frac{Z_0\Delta\theta}{\sinh\theta}\begin{bmatrix}\operatorname{csch}\theta\coth\theta & \\ \coth\theta\operatorname{csch}\theta & \end{bmatrix}\right)^T\hat{\mathbf{I}}$$

$$=\left(\frac{\Delta Z_0}{Z_0}\mathbf{ZI}-\frac{\Delta\theta}{\sinh\theta}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{ZI}\right)^T\hat{\mathbf{I}}=\frac{\Delta Z_0}{Z_0}\mathbf{V}^T\hat{\mathbf{I}}$$

表 6-2　　对一些集总和分布单元网络的灵敏度表达式

元件	方程		灵敏度（G 的分量）	增量（Δφ 的分量）
	原来的	伴随的		
电阻器	$V=RI$ $I=GV$	$\hat{V}=R\hat{I}$ $\hat{I}=G\hat{V}$	$I\hat{I}$ $-V\hat{V}$	ΔR ΔG
电感器	$V=j\omega LI$ $I=\frac{1}{j\omega}\Gamma V$	$\hat{V}=j\omega L\hat{I}$ $\hat{I}=\frac{1}{j\omega}\Gamma\hat{V}$	$j\omega I\hat{I}$ $-\frac{1}{j\omega}V\hat{V}$	ΔL $\Delta\Gamma$
电容器	$V=\frac{1}{j\omega}SI$ $I=j\omega CV$	$\hat{V}=\frac{1}{j\omega}S\hat{I}$ $\hat{I}=j\omega C\hat{V}$	$\frac{1}{j\omega}I\hat{I}$ $-j\omega V\hat{V}$	ΔS ΔC
变压器	$\begin{bmatrix}V_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & n\\-n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\V_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\hat{V}_1\\\hat{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & n\\-n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\\hat{V}_2\end{bmatrix}$	$V_2\hat{I}_1+I_2\hat{V}_2$	Δn
回转器	$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}0 & \alpha\\-\alpha & 0\end{bmatrix}\mathbf{I}$	$\hat{\mathbf{V}}=\begin{bmatrix}0 & -\alpha\\\alpha & 0\end{bmatrix}\hat{\mathbf{I}}$	$I_1\hat{I}_2-I_2\hat{I}_1$	$\Delta\alpha$
电压控制电压源	$\begin{bmatrix}I_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\\mu & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\I_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\\hat{V}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\mu\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{V}_1\\\hat{I}_2\end{bmatrix}$	$V_1\hat{I}_2$	$\Delta\mu$
电压控制电流源	$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0 & 0\\g_m & 0\end{bmatrix}\mathbf{V}$	$\hat{\mathbf{I}}=\begin{bmatrix}0 & g_m\\0 & 0\end{bmatrix}\hat{\mathbf{V}}$	$-V_1\hat{V}_2$	Δg_m

续表

电流控制电压源	$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ r_m & 0\end{bmatrix}\mathbf{I}$	$\hat{\mathbf{V}}=\begin{bmatrix}0 & r_m\\ 0 & 0\end{bmatrix}\hat{\mathbf{I}}$	$I_1\hat{I}_2$	Δr_m
电流控制电流源	$\begin{bmatrix}V_1\\ I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \beta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ V_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\hat{V}_1\\ \hat{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\beta\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\ \hat{V}_2\end{bmatrix}$	$-I_1\hat{V}_2$	$\Delta\beta$
短路的均匀分布线	$V=Z_0\tanh\theta I$	$\hat{V}=Z_0\tanh\theta\hat{I}$	$\tanh\theta I\hat{I}$ $Z_0\operatorname{sech}^2\theta I\hat{I}$	ΔZ_0 $\Delta\theta$
	$I=Y_0\coth\theta V$	$\hat{I}=Y_0\coth\theta\hat{V}$	$-\coth\theta V\hat{V}$ $Y_0\operatorname{csch}^2\theta V\hat{V}$	ΔY_0 $\Delta\theta$
开路的均匀分布线	$V=Z_0\coth\theta I$	$\hat{V}=Z_0\coth\theta\hat{I}$	$\coth\theta I\hat{I}$ $-Z_0\operatorname{csch}^2\theta I\hat{I}$	ΔZ_0 $\Delta\theta$
	$I=Y_0\tanh\theta V$	$\hat{I}=Y_0\tanh\theta\hat{V}$	$-\tanh\theta V\hat{V}$ $-Y_0\operatorname{sech}^2\theta V\hat{V}$	ΔY_0 $\Delta\theta$
均匀分布线	$\mathbf{V}=Z_0\begin{bmatrix}\coth\theta & \operatorname{csch}\theta\\ \operatorname{csch}\theta & \coth\theta\end{bmatrix}\mathbf{I}$	与原网络方程相同但分别以$\hat{\mathbf{V}}$与$\hat{\mathbf{I}}$代换V与I	$\frac{1}{Z_0}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{I}$ $-\frac{1}{\sinh\theta}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{I}$	ΔZ_0 $\Delta\theta$
	$\mathbf{I}=Y_0\begin{bmatrix}\coth\theta & -\operatorname{csch}\theta\\ -\operatorname{csch}\theta & \coth\theta\end{bmatrix}\mathbf{V}$		$-\frac{1}{Y_0}\mathbf{I}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{V}}$ $-\frac{1}{\sinh\theta}\mathbf{I}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\hat{\mathbf{V}}$	ΔY_0 $\Delta\theta$

续表

无耗传输线	$\mathbf{V}=-jZ_0\begin{bmatrix}\cot\beta l & \csc\beta l\\ \csc\beta l & \cot\beta l\end{bmatrix}\mathbf{I}$ $\mathbf{I}=-jY_0\begin{bmatrix}\cot\beta l & -\csc\beta l\\ -\csc\beta l & \cot\beta l\end{bmatrix}\mathbf{V}$	与原网络方程相同	$\frac{1}{Z_0}\mathbf{V}^T\mathbf{I}$ ΔZ_0 $-\frac{\beta}{\sin\beta l}\mathbf{V}^T\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{I}$ Δl $-\frac{1}{Y_0}\mathbf{I}^T\mathbf{V}$ ΔY_0 $-\frac{\beta}{\sin\beta l}\mathbf{I}^T\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{V}$ Δl
均匀RC线	属于均匀分布线， 以$Z_0=\sqrt{\frac{R}{sC}}$ 和$\theta=\sqrt{sRC}$	但分别以$\hat{\mathbf{V}}$与$\hat{\mathbf{I}}$ 代换V与I	$\frac{1}{2R}\mathbf{V}^T\begin{bmatrix}1 & -\frac{\theta}{\sinh\theta}\\ -\frac{\theta}{\sinh\theta} & 1\end{bmatrix}\mathbf{I}$ ΔR $-\frac{1}{2C}\mathbf{V}^T\begin{bmatrix}1 & \frac{\theta}{\sinh\theta}\\ \frac{\theta}{\sinh\theta} & 1\end{bmatrix}\mathbf{I}$ ΔC

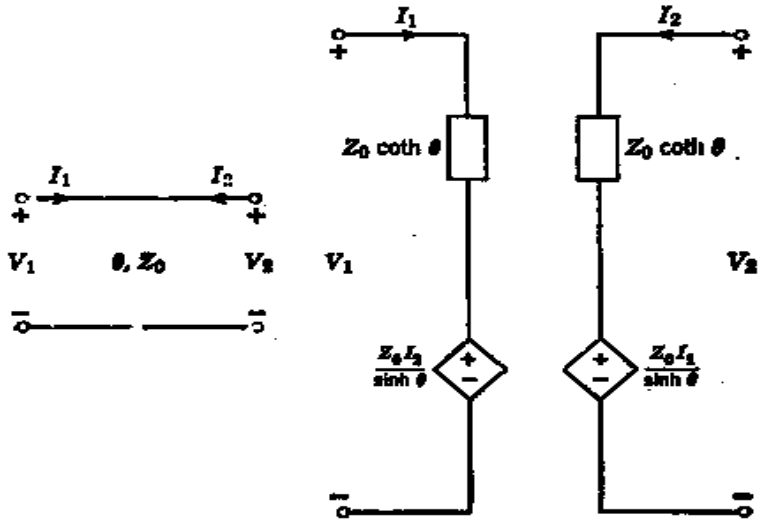


图 6-25　均匀线及其方便的表示法

$$-\frac{\Delta\theta}{\sinh\theta}\mathbf{V}^T\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\hat{\mathbf{I}}. \qquad (6.130)$$

注意到表 6-2 中所示的灵敏度，取决于未经扰动的原来网络和伴随网络中出现的电流和电压。因此，至多作两种网络的分析（利用任何一种适当方法）就会得出计算它们所需要的资料。注意如果在某个端对没有激励，就把适当电源置零。如果在某端对的响应不具有重要性，则适当的伴随激励应置零。不变化的元件或参量不在 G 或 ϕ 中表示即可。

应用于极大极小逼近

考虑图 6-26 中所描绘的情况。假定给予我们这样问题：在

$$U \geqslant f(\phi,\omega_i) \triangleq |\rho(\phi, j\omega_i)|^2,\ \omega_i \in \Omega_d \qquad (6.131)$$

条件下使正自变数U为最小，式中ρ为入端反射系数，而Ω_d为重要频带内的离散频率集。那么这个问题实际上应该使反射系数在一个频带上的最大幅度为最小[37、42]。现在

$$\rho=\frac{Z_{in}-R_g}{Z_{in}+R_g}=1-\frac{2R_g}{Z_{in}+R_g}=1+\frac{2R_gI_g}{V_g} \tag{6.132}$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla f(\phi,\omega_i)&=\mathrm{Re}\{2\rho^*(\phi,j\omega_i)\nabla\rho(\phi,j\omega_i)\}\\&=\mathrm{Re}\left\{\frac{4R_g}{V_g}\rho^*(\phi,j\omega_i)\nabla I_g(\phi,j\omega_i)\right\}.\end{aligned} \tag{6.133}$$

由(6.128)

$$\Delta I_g\hat{V}_g=\mathbf{G}^T\Delta\phi. \tag{6.134}$$

所以

$$\Delta I_g=\left(\frac{1}{\hat{V}_g}\mathbf{G}^T\right)\Delta\phi=\nabla I_g^T\Delta\phi,$$

因此

$$\nabla I_g=\frac{1}{\hat{V}_g}\mathbf{G}, \tag{6.135}$$

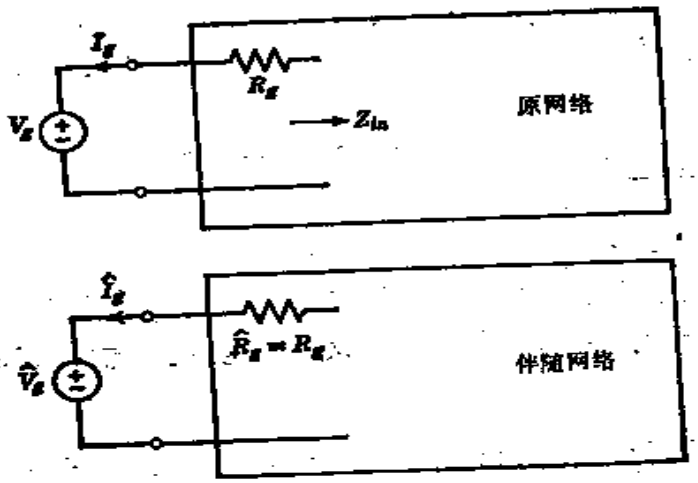


图 6-26 按反射系数的设计中，可能的原来网络和伴随网络

并最后

$$\nabla f(\phi,\omega_i)=\mathrm{Re}\left\{\frac{4R_g}{V_g\hat{V}_g}\rho^*(\phi,j\omega_i)G(\phi,j\omega_i)\right\}. \tag{6.136}$$

注意到我们可以令 $\hat{V}_g=V_g$。如果原来网络是互易的，因此伴随网络和原来的相同，我们只需实行一种网络分析来得到 $\nabla f(\phi,\omega_i)$。

应用于最小 p 乘逼近

可以指出：如果有 n_V 个独立电压源和 n_I 个独立电流源

$$G=\sum_{i=1}^{n_V}\hat{V}_i\nabla I_i-\sum_{i=n_V+1}^{n_V+n_I}\hat{I}_i\nabla V_i. \tag{6.137}$$

假定给予我们目标函数[37、39、42]，

$$U=\sum_{i=1}^{n_V+n_I}\int_{\Omega}|e_i(\phi,j\omega)|^p d\omega, \tag{6.138}$$

式中 Ω 规定重要的频率范围，而 $e_i(\phi,j\omega)$ 则为(6.21)形式的第 i 函数，以致

$$F_i(\phi,j\omega)\triangleq\begin{cases}I_i(\phi,j\omega), & i=1,2,\cdots,n_V\\ V_i(\phi,j\omega), & i=n_V+1,\cdots,n_V+n_I\end{cases}. \tag{6.139}$$

因而方程(6.138)代表(6.101)形式的函数的总和。所规定的函数 $S_i(j\omega)$ 对应于所需的响应电流和电压。一般说来，$F_i(\phi,j\omega)$、$S_i(j\omega)$ 因而 $e_i(\phi,j\omega)$ 可能是复数的。现在，由(6.99)

$$\nabla U=$$

$$=\sum_{i=1}^{n_V+n_I}\int_{\Omega}\mathrm{Re}\{p|e_i(\phi,j\omega)|^{p-2}w_i(\omega)e_i^*(\phi,j\omega)\nabla F_i(\phi,j\omega)\}\,d\omega. \tag{6.140}$$

比较(6.137)、(6.139)和(6.140)，我们看出：如果伴随网络激励取为

$$p|e_i(\phi,j\omega)|^{p-2}w_i(\omega)e_i^*(\phi,j\omega)=\begin{cases}\hat{V}_i(j\omega) & i=1,2,\cdots,n_V\\ -\hat{I}_i(j\omega) & i=n_V+1,\cdots,n_V+n_I,\end{cases}\tag{6.141}$$

那么

$$\nabla U=\int_{\Omega}\mathrm{Re}\{\mathbf{G}\}d\omega.\tag{6.142}$$

对离散情况的对应表达式为

$$\nabla U=\sum_{\Omega_d}\mathrm{Re}\{\mathbf{G}\}\tag{6.143}$$

式中 Ω_d 为离散频率集。

应用于群延迟计算

在群延迟计算方面，我们主要是关心相对于频率 ω 的灵敏度[43]。这个参量和我们已考虑到的为整个网络通用的其他参量不同。特别让我们用下标 j 来明确地表明网络（由 n 个单元网络组成的某第 j 单元网络有关的变量。然后只假定 ω 变化，可以把(6.128)写成

$$\Delta\mathbf{I}_V^T\hat{\mathbf{V}}_V-\Delta\mathbf{V}_I^T\hat{\mathbf{I}}_I=\sum_{j=1}^{n}[\mathbf{V}_{a_j}^T\mathbf{I}_{b_j}^T]\begin{bmatrix}-\Delta\mathbf{Y}_j^T & \Delta\mathbf{M}_j^T\\ -\Delta\mathbf{A}_j^T & \Delta\mathbf{Z}_j^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{V}}_{a_j}\\ \hat{\mathbf{I}}_{b_j}\end{bmatrix},\tag{6.144}$$

为了更有普遍性，每个单元网络是由恰当的混合矩阵来表征。利用规则 $\Delta x=(\partial x/\partial\omega)\Delta\omega$，其中 x 为取决于 ω 的任何量，可以把(6.144)更恰当地写为

$$\sum_{i=1}^{n_V}\hat{V}_i\frac{\partial I_i}{\partial\omega}-\sum_{i=n_V+1}^{n_V+n_I}\hat{I}_i\frac{\partial V_i}{\partial\omega}=\sum_{i=1}^{n}G_{\omega i} \tag{6.145}$$

式中

$$G_{\omega j}\triangleq[\mathbf{V}_{aj}^T\mathbf{I}_{bj}^T]\begin{bmatrix}-\dfrac{\partial\mathbf{Y}_j^T}{\partial\omega} & \dfrac{\partial\mathbf{M}_j^T}{\partial\omega}\\ -\dfrac{\partial\mathbf{A}_j^T}{\partial\omega} & \dfrac{\partial\mathbf{Z}_j^T}{\partial\omega}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{V}}_{aj}\\ \hat{\mathbf{I}}_{bj}\end{bmatrix}. \tag{6.146}$$

尤其是，如果要研究第 k 端对，碰巧这又是电流激励的端对*，那么(6.145)简化为

$$-\hat{\mathbf{I}}_k\frac{\partial V_k}{\partial\omega}=\sum_{i=1}^{n}G_{\omega i} \tag{6.147}$$

这里把所有伴随激励除 $\hat{I}_k$ 外都调到零。灵敏度表达式 $G_{\omega j}$ 的求值，由两种网络分析的结果来达到。按照表 6.2 的灵敏度公式如果合适的话就可加以利用，因为

$$\begin{bmatrix}-\dfrac{\partial\mathbf{Y}_j^T}{\partial\omega} & \dfrac{\partial\mathbf{M}_j^T}{\partial\omega}\\ -\dfrac{\partial\mathbf{A}_j^T}{\partial\omega} & \dfrac{\partial\mathbf{Z}_j^T}{\partial\omega}\end{bmatrix}=\sum_r\begin{bmatrix}-\dfrac{\partial\mathbf{Y}_j^T}{\partial\phi_r} & \dfrac{\partial\mathbf{M}_j^T}{\partial\phi_r}\\ -\dfrac{\partial\mathbf{A}_j^T}{\partial\phi_r} & \dfrac{\partial\mathbf{Z}_j^T}{\partial\phi_r}\end{bmatrix}\frac{\partial\phi_r}{\partial\omega}, \tag{6.148}$$

式中下标 r 表示第 j 单元网络中的某第 r 参量，相对于这种参量，已有现成的灵敏度表达式。

例如，考察 $\theta=j\omega l/c=j\beta l$，其中 c 为传播速度。那么无耗传输线的 ω 灵敏度就是表 6.2 中所示 θ 灵敏度的 jl/c 倍。把电感器作为第二个例子。利用 $Z=j\omega L$，(6.148)的左边立即简化为 jL。

---

* 激励值当然应为零。

最后，为了计算群延迟 $T_g(\omega)$，注意

$$T_g(\omega)=-\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{V_k}\frac{\partial V_k}{\partial\omega}\right\}, \tag{6.149}$$

这里假定所有电源都具有恒定的、不随频率变化的相角。为了方便起见，设激励 $\hat{I}_k=1/V_k$，则

$$T_g(\omega)=\mathrm{Im}\left\{\sum_{i=1}^{n}G_{ki}\right\}. \tag{6.150}$$

方程(6.150)对于群延迟的计算同样是有效的，如果第 K 端对是一个电压激励的端对*。必须记住的是：除了将 $\hat{V}_K$ 调到 $-1/I_K$ 外，应把所有其它伴随激励都调到零。

推广和其他应用

记住关于伴随网络法的优点就是：对伴随网络的分析与原网络的分析相比，通常可以少费很多力气。例如，如果 Y_n 是原来网络的节点导纳矩阵，并已计算了其逆矩阵 Y_n^{-1}，那么我们就可以利用 $(Y_n^T)^{-1}=(Y_n^{-1})^T$ 关系。关于计算法效率的进一步讨论，读者可参考戴雷克托的著作(Director)[44]。

在二阶灵敏度方面的推广已公式化[45]，包括群延迟灵敏度[43]。对滤波器设计者来说特别有意义的是：在集总和分布网络中，新近将伴随网络概念应用于耗散引起的衰减失真的计算[46、47]。进一步的发展包括伴随网络概念在一阶和二阶灵敏度计算中的利用，这里采用波动变量而不是电压和电流[48、49、50]。这些结果对滤波器设计者来说也是有意义的。

---

* 激励值当然应为零。

6.10 摘　　要

在计算机辅助电路最优化方面，已讨论了一系列广泛题目。当经典方法不合宜时，强调了适合于自动化设计的公式化和方法。从设计目的讨论了目标函数的公式，包括最小 p 乘逼近和极大极小逼近。相当详细地研究了借助于变换或补偿来处理参量和响应约束的方法。讨论了经过线性规划和非线性规划的极大极小逼近。评述了有效的一维方法、多维的梯度搜索法和直接搜索法。研究了最小 p 乘逼近，着重于梯度解法。最后，为频域中的设计而评述了计算导数的伴随网络法。

大多数计算机中心在其程序库中应都有线性规划程序，并至少有一种有效的梯度算法程序，以及别的可能方法。希望本章能有助于网络设计者有效地将其课题公式化，以便能够充分利用现成的计算机程序。

致　　谢

深深感谢多伦多大学R.E.塞维奥拉(R.E.Seviora)的合作，尤其在伴随网络部分。麦克马斯特大学 E.德拉·托尔(E. Della Torre)博士提供了大量建设性的批评。

习　　题

6.1 (a)试证明对给定的步长 ΔU 是沿着 ∇U 方向最大化。

(b)试用多维泰勒级数展开来证明：凸可微函数的转折点就是全局极小值。

6.2 (a)如果 $g(\phi)$是凹的，试证明 $g(\phi)\geqslant 0$ 描述凸可行区域。

(b)在什么条件下才能在凸规划内包括等式约束？

6.3 为了可以利用无约束最优化，试对以下的约束寻求适当变换。

(a)$0\leqslant\phi_1\leqslant\phi_2\leqslant\cdots\leqslant\phi_i\leqslant\cdots\leqslant\phi_K$。

(b)$0<l\leqslant\phi_2/\phi_1\leqslant u$

$\phi_1>0$

$\phi_2>0$.

6.4 试导出(6.99)和(6.100)。

6.5 试从最初的法则导出灵敏度表达式(6.124)。

6.6 试导出表 6-2 的表值，关于：

(a)电压控制的电压源。

(b)开路的均匀线。

(c)均匀 RC 线。

6.7 试证明伴随网络可以用(6.126)中描述的混合矩阵来表征。

6.8 试求得以两端对网络的 $ABCD$ 矩阵亦即链矩阵特性来表示的伴随网络。对于表 6.2 表值中的一部分试用这些项求出灵敏度表达式。

6.9 试考虑使

$$U=\phi_3(\phi_1+\phi_2)^2$$

为最小的问题，如果

$$g_1=\phi_1-\phi_3^2\geqslant 0$$

$$g_2=\phi_2\geqslant 0$$

$$h=(\phi_1+\phi_2)\phi_3-1=0.$$

这就是一凸规划问题吗？试用序列式无约束极小化法对它形成求解公式。从可行点开始，试表明：随着参量$r\to 0$，它是怎样接近约束最小值的。画一围线略图来说明过程。对约束最小值的条件满足吗？

6.10 对于线性方程

$$F(\phi,\psi)=\sum_{i=1}^{K}\phi_i f_i(\psi),$$

(a)试把$F(\phi,\psi)$对 $S(\psi)$的离散极大极小逼近表达为线性规划问题，假定ϕ是无约束的。

(b)假定(6.102)形式的目标函数，试导出 ∇U 和 H（注意多项式为一特殊情况）。

6.11 试证明(6.137)。

6.12 试用不等式约束来阐述陷波滤波器的设计，给定以下的条件。在 0 到 ω_1 频率范围内，衰减应不超过 $A_1 dB$，在 ω_2 到 ω_3 范围内，则应不超过 A_2dB，如果 $0<\omega_1<\omega_2<\omega_3$。在 ω_0，则衰减必须超过 A_0dB，这里 $\omega_1<\omega_0<\omega_2$。

6.13 为了寻求一个变量的性能良好的多峰函数的极值（图 6.2），例如滤波器的通带响应，试设想出一种算法。

6.14 试讨论变换 $\phi_i=\exp\phi_i'$（表 6.1）的标度效应。

6.15 (a)在图 6.1 中沿可行区域的整个界限上都满足约束最小值的必要条件吗？

(b)约束最大值的条件如何？

6.16 假定我们必须使

$$U=\sum_{\omega_i\in\Omega_d}[L(\omega_i)-S(\omega_i)]^p$$

为最小，式中 $L(\omega_i)$为滤波器在 R_g 和 R_L 之间的插入衰减，单位用 dB，$S(\omega_i)$为在 R_g 和 R_L 间的所需插入衰减，Ω_d 为一组离散频率 ω_i，以及 p 为偶正整数。试得到使 ∇U 和 $G(j\omega_i)$相联系的表达式，其中 G 元素可能是象表 6.2 中的一样。对原来网络和伴随网络的激励则假定为合宜值。

参 考 文 献

[1] R. Fletcher, "A review of methods for unconstrained optimization," *Optimization*, R. Fletcher, Ed., Academic Press, New York, 1969.

[2] E. M. L. Beale, "Nonlinear programming," *Digital Computer User's Handbook*, M. Klerer and G. A. Korn, Ed., McGraw-Hill, New York, 1967.

[3] P. Wolfe, "Methods of nonlinear programming," *Nonlinear Programming*, J. Abadie, Ed., John Wiley New York, 1967.

[4] W. I. Zangwill, *Nonlinear programming*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
[5] M. J. Box, "A comparison of several current optimization methods, and the use of transformations in constrained problems," *Computer J.*, 9, 67-77 (May, 1966).
[6] J. W. Bandler, "Optimization methods for computer-aided design," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MTT-17, 533-552 (Aug., 1969).
[7] A. V. Fiacco and G. P. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques* John Wiley, New York. 1968.
[8] J. Kowalik and M. R. Osborne, *Methods for Unconstrained Optimization Problems*, Elsevier, New York, 1968.
[9] F. A. Lootsma, "Logarithmic programming: a method of solving nonlinearprogramming problems," *Philips Res. Repts.*, 22, 329-344 (June, 1967).
[10] J. Bracken and G. P. McCormick, *Selected Applications of Nonlinear programming*, John Wiley, New York, 1968.
[11] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. "Non-linear programming," *Proc. 2nd Symp on Math. Statistics and Probability. Berkeley, Calif.*, University of California press. 481-493,1951.
[12] D. C. Handscomb, Ed., *Methods of Numerical Approximation*, Pergamon. Oxford, 1966.
[13] G. C. Temes and J. A. C. Bingham, "Iterative Chebyshev approximation technique for network synthesis," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-14, 31-37 (March, 1967).
[14] G. C. Temes and D. A. Calahan, "Computer-aided network optimization the state-of-the-art," Proc. *IEEE*, 55, 1832-1863 (Nov., 1967).
[15] G. C. Temes, "Optimization methods in circuit design," *Computer Oriented Circuit Design*, F. F. Kuo and W. G. Magnuson, Jr., Ed, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
[16] L. S. Lasdon and A. D. Waren, "Optimal design of filters with bounded, lossy elements," *IEEE* Trans, *Circuit Theory*, CT-13, 175-187 (June, 1966).
[17] A. D. Waren, L. S. Lasdon, and D. F. Suchman, "Optimization in engineering design," *proc. IEEE*, 55, 1885-1897 (Nov., 1967).
[18] Y. Ishizaki and H. Watanabe, "An iterative Chebyshev approximation method for network design," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-15, 326-336 (Dec., 1968).

[19] M. R. Osborne and G. A. Watson, "An algorithm for minimax approximation in the nonlinear case," *Computer J.*, 12, 63–68 (Feb., 1969).
[20] J. W. Bandler, T. V. Srinivasan and C. Charalambous, "Minimax optimization of networksby grazor search," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MTT-20, 596–604 (Sept., 1972).
[21] J. W. Bandler, "Computer optimization of inhomogeneous waveguide transformers," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MTT-17, 563–571 (Aug., 1969).
[22] J. W. Bandler and P. A. Macdonald, "Optimization of microwave networks by razor search," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MTT-17, 552–562 (Aug., 1969).
[23] H. J. Carlin and O. P. Gupta, "Computer design of filters with lumpeddistributed elements or frequency variable terminations," *IEEE Trans Microwave Theory and Techniques*, MTT-17, 598–604 (Aug., 1969)
[24] J. W. Bandler and A. G. Lee-Chan, "Gradient razor search method for optimization," *1971 International Microwave Symp., Digest of Technical Papers*, 118–119 (May, 1971).
[25] J. W. Bandler Conditions for a minimax optimum," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, 476–479 (July, 1971).
[26] M. J. Box, D. Davies, and W. H. Swann, *Non-linear* Optimization *Techniques*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1969.
[27] R. Fletcher and M. J. D. Powell, "A rapidly convergent descent method for minimization," *Computer J.*, 6, 163–168 (June, 1963).
[28] M. J. D. Powell, "An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives," *Computer J.*, 7, 155–162 (July, 1964).
[29] J. W. Bandler and P. A. Macdonald, "Cascaded noncommensurate transmission-line networks as optimization problems," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-16, 391–394 (Aug, 1969).
[30] R. Hooke and T. A. Jeeves, "'Direct search'solution of numerical and statistical problems," *J. ACM*, 8, 212–229 (April, 1961).
[31] J. A. Nelder and R. Mead, "A simplex method for function minimization," *Computer J.*, 7, 308–313 (Jan., 1965).
[32] H. H. Rosenbrock, "An automatic method for finding the greatest or least value of a function," *Computer J.*, 3, 175–184 (Oct., 1960).
[33] W. I. Zangwill, "Minimizing a function without calculating derivatives," *Computer J.*, 10, 293–296 (Nov., 1967).
[34] R. Fletcher, "Function minimization without evaluating derivatives—

a review," *Computer J.*, 8, 33-41 (April, 1965).
[35] R. Fletcher and C. M. Reeves, "Function minimization by conjugate gradients," *Computer J.*, 7,149-154 (July, 1964).
[36] G. C. Temes and D. Y. F. Zai, "Least pth approximation," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-16, 235-237 (May, 1969).
[37] J. W. Bandler and R. E. Seviora, "Current trends in network optimization." *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MTT-18, 1159-1170 (Dec., 1970).
[38] S. W. Director and R. A. Rohrer, "The generalized adjoint network and network sensitivities," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-16, 318-323 (Aug., 1969).
[39] S. W. Director and R. A. Rohrer, "Automated network design-the frequencydomain case," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-16, 330-337 (Aug., 1969).
[40] J. W. Bandler and R. E. Seviora, "Computation of sensitivities for noncommensurate networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, 174-178 (Jan., 1971).
[41] C. A. Desoer and E. S. Kuh, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969, Chapter 9.
[42] R. E. Seviora. M. Sablatash and J. W. Bandler, "Least pth and minimax objectives for automated network design," *Electronics Letters*, 6,14-15 (Jan., 1970).
[43] G. C. Temes, "Exact computation of group delay and its sensitivities using adjoint-network concept," *Electronics Letters*, 6, 483-485 (July, 1970).
[44] S. W. Director, "*LU* factorization in network sensitivity calculations," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18,184-185 (Jan.,1971).
[45] G. A. Richards, "Second-derivative sensitivity using the concept of the adjoint network," *Electronics Letters*, 5,398-399 (Aug.,1969).
[46] G. C. Temes and R. N. Gadenz, "Simple technique for the prediction of dissipation-induced loss distortion," *Electronics Letters*, 6, 836-837 (Dec., 1970).
[47] R. N. Gadenz and G. C. Temes, "Computation of dissipation-induced loss distortion in lumped/distributed networks," *Electronics Letters*, 7,258-260 (May, 1971).
[48] J. W. Bandler and R. E. Seviora, "Sensitivities in terms of wave variables," *Proc. 8 th Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory*, 379-387 (Oct., 1970).
[49] J. W. Bandler and R. E. Seviora, "Wave sensitivities of networks," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MTT-20, 138-147

(Feb. 1972).
[50] J. W. Bandler and R. E. Seviora, "Computation of equivalent wave source using the adjoint network" *Electronics Letters*, 7,235-236 (May, 1971).

7 微波滤波器

E. G. 克赖斯特尔(E. G. Cristal)
休利特-帕卡德(Hewlett-Packard)公司
帕洛阿尔托(Palo Alto)，加利福尼亚州

本章对横向电磁波（TEM）微波滤波器的设计，作简短介绍。虽然关于这个题目所发表的著作很多，但这里所提出的材料不得不加以相当限制。因此，我们力求介绍一些一般设计方法（其中包括准确的方法和近似的方法），而不是列举具体的滤波器设计。从另一方面来说，在说明某些方法时也导出了几个有用的滤波器设计。

仅只稍许涉及按给定电气要求去实际实现微波滤波器的问题。省略这个题目，并不因为它不重要，而是因为没有可用来适当讨论这个题目的足够篇幅。在人们考虑到对于屏蔽 TEM 结构来说可实现的阻抗范围仅仅大致为 40 比 1 的时候，也许就可以意识到实现实际微波滤波器结构时的困难。这同参数值在大于 10^6的范围内都可用的集总元件相对比是大不相同的。

术语"微波"应用到的频带，通常被认为是超过 1 GHz的。然而，这里所提出的理论上的设计技术不必要被限制在这个频带。这种方法确实是可以而且正用于高频率(HF)(3-30 MHz)以及 20 GHz 上。限制主要是实际方面的问题，例如，具体硬

设备结构中的机械尺寸或容限。也许合理地说，实际上在这里所提出的设计方法，大体上适用于频带 0.1 到 20 GHz的范围。

7.1 引　　言

本章具体地涉及到波导系统，波的传播为横向电磁波(TEM)，也就是说，在波导系统内传播方向的场分量为零。不过，可以把某些课题内所讨论的理论和方法同样推广到非TEM 波导系统。就绝大部分而言，我们要讨论由集总电阻器、理想变量器和无损耗的可通约的传输线组成的网络*。因此，我们将交替着使用术语“微波滤波器”、“微波网络”和“传输线滤波器”、“传输线网络”。集总电感器和电容器，将只在少数情况下和传输线部分一起使用。

TEM 传输线网络，由在传输方向上没有电场或磁场分量来识别。因此，对于角频率 ω，麦克斯韦的场方程简化为

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_t = -j\omega\mu\mathbf{H}_t \times \mathbf{u}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{H}_t = -j\omega\epsilon(\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_t) \qquad (7.1)$$

$$j\omega\epsilon E_z = \nabla_t \cdot \mathbf{H}_t \times \mathbf{u}_z = 0$$

$$j\omega\mu H_z = \nabla_t \cdot \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_t = 0, \qquad (7.2)$$

式中：　$\mathbf{E}_t$＝垂直于 z 轴（传播方向）的矢量电场；

$\mathbf{H}_t$＝垂直于 z 轴的矢量磁场；

E_z, H_z＝电场和磁场的 z 分量；

ϵ＝介质的介电常数；

μ＝介质的导磁率；

---

* 可通约的：量度成比例的。可通约的传输线的长度有一公约数。

∇_t＝垂直于 z 轴的梯度算子，$(\nabla - \mathbf{u}_z(\partial/\partial z))$；

$\mathbf{u}_z$＝在 z 轴方向的单位矢量。

消去（7.1）中的 $\mathbf{H}_t$ 和（7.2）中的 $\mathbf{E}_t$，对横向电场和磁场得到以下的波方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{Bmatrix}\mathbf{E}_t\\ \mathbf{H}_t\end{Bmatrix}=\gamma^2\begin{Bmatrix}\mathbf{E}_t\\ \mathbf{H}_t\end{Bmatrix}, \tag{7.3}$$

而

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\ .$$

(7.3) 的解与 $\exp[\pm\gamma z]$ 成正比例。因而 TEM 波沿传输线传播，具有相速等于 $1/\sqrt{\mu\epsilon}$，对自由空间来说，它等于光速。

参看（7.1）知

$$\mathbf{E}_t = \sqrt{\mu/\epsilon}\,(\mathbf{H}_t \times \mathbf{u}_z).$$

量 $\sqrt{\mu/\epsilon}$ 有欧姆的量纲，叫做介质的波阻抗。

TEM 假定的另一结果是：传输线导体之间的唯一电压可加以确定。因为 $H_z\equiv 0$，从而对所有位置在垂直于 z 方向的平面内的闭合途径来说，

$$\oint \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{ds} \equiv 0.$$

因此，线积分与路径无关，而导体间的电压可以表示为

$$\mathrm{V} = -\int_a^b \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{ds},$$

式中的 a 和 b 表示两导体表面上的任意点。同样地，因为 $E_z\equiv 0$，故在两条传输线中随便哪一条中的电流均为

$$I = \oint (\mathbf{H}_t \times \mathbf{u}_z)\cdot \mathbf{ds},$$

其中积分的路线为：环绕导体而且处于对 z 轴为横向的平面内

的任何闭合曲线上。传输线的特性抗阻定义为

$$Z_0=\frac{V}{I}.$$

可以证明 TEM 传播还有一附加结果，即电容和电感的低频概念仍然是有效的，可以通过传统方法把它们解析地或实验性地予以确定。此外，可以把相速和特性阻抗表示为

$$v=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$$

式中 L 和 C 为传输线每单位长度的电感和电容。

理查兹(Richards)变换

理查兹变换适用于由集总电阻器、理想变量器和可通约-长度无损耗传输线组成的网络 [1]。这些条件保证这样一些网络的策动点导抗 $Z(s)$，将是 $\exp[\tau s]$的有理函数，其中：

$\tau=2\,l/v$，对最短可通约-长度线的来回程时延；

l＝最短可通约-长度线的长度；

v＝传播速度；

$s=\sigma+j\omega$，集总元件网络理论中的复频率变量。

理查兹引入了新频率变量

$$S=\tanh\left(\frac{\tau s}{2}\right)=\frac{e^{\tau s}-1}{e^{\tau s}+1}=\Sigma+j\Omega. \qquad (7.4)$$

在实频率轴上$\Sigma=0$，(7.4) 简化为

$$S=j\Omega=j\tan(\theta),$$

式中

$$\theta=\frac{\omega l}{v}=\text{电长度}.$$

对 $e^{\tau s}$ 求解 (7.4) 给出

$$e^{\tau s}=\frac{1+S}{1-S}.$$

因此

$$Z(S)=S \text{ 的有理函数.} \tag{7.5}$$

还会有机会利用理查兹变换的倒数形式，它定义为

$$W=\coth\left(\frac{\tau s}{2}\right)=\Gamma-j\sigma.$$

用先前的论点

$$Z(W)=W \text{ 的有理函数。}$$

理查兹证实：每当 $\sigma\geqslant 0$ 时，可通约的传输线的导抗函数 $Z(S)$ 总有正实部 $\sum$ [2]。因此，(7.4) 把 s 平面的右半面映射至 S 平面的右半面，而且

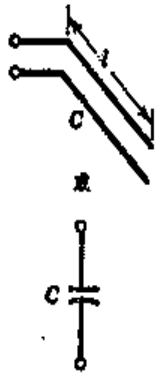
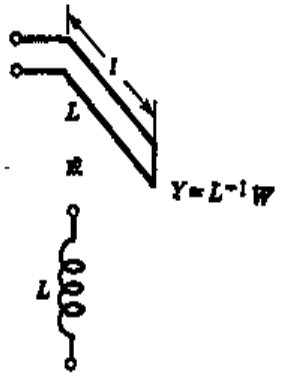
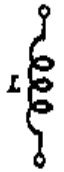
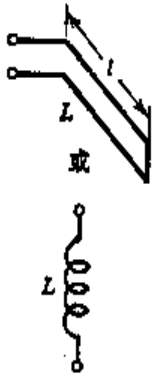
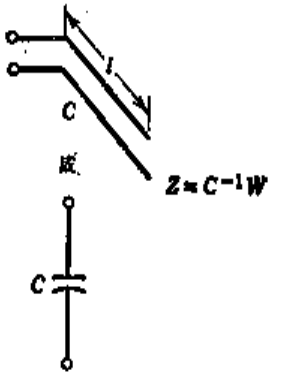
$$\text{对}\sum\geqslant 0 \text{ 来说，} \mathrm{Re}[Z(S)]\geqslant 0. \tag{7.6}$$

这种映射不是一一对应的。不过，反量的多值性只对应于传输线网络导抗函数的周期性。

在理查兹变换中，s 平面中的集总电感器与电容器和 S 与 W 平面中的短路与开路传输线之间存在有密切的对应关系。这可由表 7-1 加以说明。由表中可见：S 平面中的开路与短路传输线分别对应于 s 平面中的集总电容器与电感器。对 W 平面的元件来说，也有同样的对应关系。

在讨论可通约的传输线网络的过程中，用集总元件符号来表示分布元件，并采用集总元件的表达方式是较为方便的。因而，我们谈到 S 平面电容器和 S 平面电感器（或只说电容器和电感器），意思就指的是开路和短路的分布短截线。不过，也还将用到表 7-1 中所示的分布线表示法，特别是在要区分集总

表 7-1　　集总元件和分布元件的对应关系

p-平面			S-平面			W-平面		
p-平面元件	符号	导纳或阻抗	S-平面元件	符号	导纳或阻抗	W-平面元件	符号	导纳或阻抗
电容器		$Y=Cp$	开路传输线		$Y=CS$	短路传输线		$Y=L^{-1}W$
电感器		$Z=Lp$	短路传输线		$Z=LS$	开路传输线		$Z=C^{-1}W$

元件与分布元件的时候更是如此*。

单位元素

在集总网络和传输线网络之间不存在对应关系的情况，就是由可通约长度线组成的二端对网络。传输线有阻抗矩阵为

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -jZ_0 \cot\theta & -jZ_0 \csc\theta \\ -jZ_0 \csc\theta & -jZ_0 \cot\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix},$$

按照理查兹变换则成为

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{Z_0}{S} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{1-S^2} \\ \sqrt{1-S^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

奥扎基（Ozaki）和伊希（Ishii）把这种网络元件叫做“单位元素”，今后缩写作 UE[3]。其符号给出于表 7-2 中。注意单位元素在 $S=\pm 1$ 有半阶传输零点。因此，它没有集总元件相对应。不过，值得注意的是两个单位元素级联，在 $S=\pm 1$ 时产

表 7-2　　单位元素术语表

元件	符号	导纳或阻抗矩阵	
		S-平面	W-平面
单位元件	Z ① ②	$[Z]=\frac{1}{S}\begin{vmatrix} Z_0 & Z_0T \\ Z_0T & Z_0 \end{vmatrix}$	$[Z]=\begin{bmatrix} Z_0W & Z_0T' \\ Z_0T' & Z_0W \end{bmatrix}$
或 UE	W Z UE ① ②	$[Y]=\frac{1}{S}\begin{vmatrix} Y_0 & -Y_0T \\ -Y_0T & Y_0 \end{vmatrix}$	$[Y]=\begin{bmatrix} Y_0W & -Y_0T' \\ -Y_0T' & Y_0W \end{bmatrix}$
		$T=\sqrt{1-S^2}$	$T'=\sqrt{W^2-1}$

* 在本章的本节和以下几节中，对电路元件的所有符号表示都应该理解为分布的，除了以下的情况之外：(1) 网络明显为集总的，象课文中的图题或讨论所表示的，(2) 网络由既有集总又有分布的元件组成，此时分布元件要由表 7-1 中所给定的传输线符号来表示，而集总元件则由传统符号表示，和(3) 有相反的特殊说明。

生一阶传输零点。因而，两个单位元素级联就相当于一个集总元件理论的C节。

理查兹(Richards)定理

如果$Z(S)$是正实函数而且$Z(S)/Z(1)$不恒等于S或$1/S$，那么

$$Z'(S)=\frac{Z(S)-SZ(1)}{Z(1)-SZ(S)} \tag{7.7}$$

也是正实函数。进一步，如果$Z(S)$对S来说是有理的（这里所考虑的唯一情况），那么因子$S-1$在(7.7)的分子和分母中相消，并且$Z'(S)$和$Z(S)$同阶。如果还有$Z(1)+Z(-1)=0$，则另一因子$S+1$在分子和分母中相消，而$Z'(S)$则比$Z(S)$具有的阶次低。

这个定理在传输线网络理论中是非常重要的。理查兹定理的直接结果，就是以下的推论：

推论 7-1 设$Z(S)$为满足$Z(S)/Z(1)\neq S$或S^{-1}的正实阻抗函数。那么，其值为$Z(1)$的单位元素总可以从$Z(S)$提取，剩下与单位元素级联的正实阻抗$Z'(S)$。$Z'(S)$值为

$$Z'(S)=\frac{Z(S)-SZ(1)}{Z(1)-SZ(S)}\cdot Z(1). \tag{7.8}$$

如果$Z(1)+Z(-1)\neq 0$，阻抗$Z'(S)$也是正实的，并与$Z(S)$等阶。如果$Z(1)+Z(-1)=0$，则$Z'(S)$比$Z(S)$低1阶。这个推论示意地说明于图7-1中。

下面是另一推论。

推论 7-2 任意电抗函数，可用终端开路或短路的单位元素的级联来予以实现。证明是从推论7-1直接得出的，因为电抗函数的$Z(1)+Z(-1)=0$。

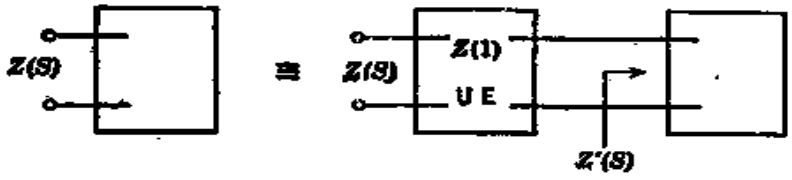


图 7-1 推论 1 的图示说明

策动点函数的综合

把理查兹变量 S 看做独立频率变量。那么(7.5)和(7.6)已被证明对 $Z(S)$ 为可实现的集总常数阻抗是必要的且充分的[4]。利用表 7-1 中所给出的集总元件和分布元件之间的对应关系，上述结论同样可转入到可通约传输线网络。从而，可以把集总元件理论的分析法和阻抗综合步骤推广到传输线网络。可以把象博德(Bode)[5]、达林顿(Darlington)[6]、吉尔曼(Guillemin)[7]、尤拉 (Youla) [8] 等人所给出的一些方法直接移过来应用。用理查兹定理和推论可以把这些方法加以推广，而且还可用于转移函数的综合。下面用一些例子来说明这些方法中的几种方法。

电抗函数综合

让我们来综合网络以实现电抗函数

$$Z(S)=\frac{8S+S^2}{2+7S^2}.$$

将 $Z(S)$ 按连分式展开，给出图 7-2(a)所示的网络。

根据推论 7-2，也可把 $Z(S)$ 展开成单位元素的级联。第一个单位元素值由指定 $S=1$ 来得到。这给出

$$Z_1=Z(1)=\frac{8+1}{2+7}=1.$$

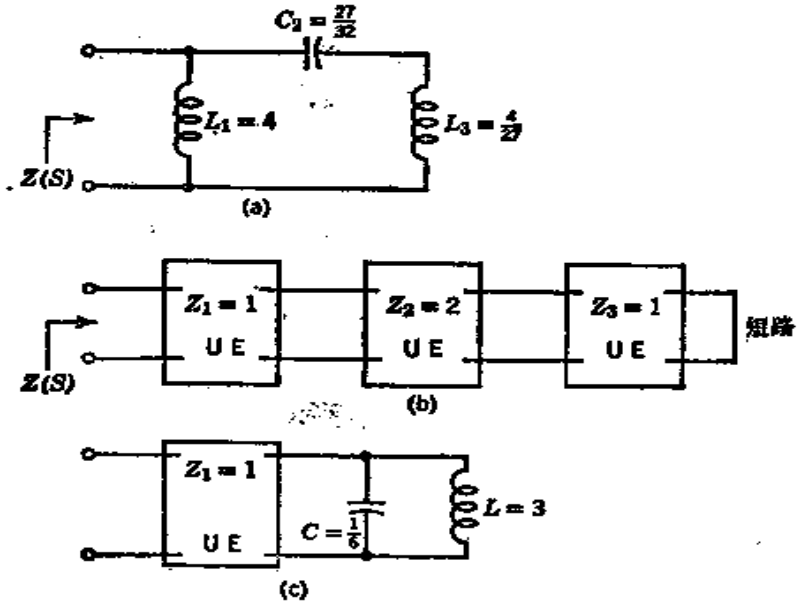


图 7-2　S 平面电抗综合例子

由推论 7-1，然后从阻抗函数 $Z(S)$中提取单位元素，剩下的简化阻抗函数 $Z'(S)$为

$$Z'(S)=\frac{\left[\frac{8S+S^3}{2+7S^2}\right]-S}{1-S\left[\frac{8S+S^3}{2+7S^2}\right]}=\frac{6S[1-S^2]}{2-S^2-S^4}.$$

以 $1-S^2$去除上面的分子和分母，得到

$$Z'(S)=\frac{6S}{2+S^2}, \tag{7.9}$$

然后由同样方法来得到第二个单位元素值。

$$Z_2=Z'(1)=\frac{6}{2+1}=2.$$

从阻抗函数 $Z'(S)$中提取第二个单位元素，剩下阻抗函数

$$Z''(S)=S.$$

$Z''(S)$可以被解释为其值为 1 的 S 平面电感器，或者被解释为在输出端对短路的其值为 1 的单位元素。对应于这样实现的网络给出于图 7-2(b)中。

当然，不论是极点提取或是单位元素提取，在综合中的任何步骤总是可能的，因此许多典型实现也是可能的。例如，在步骤(7-9)，可以把函数 $Z'(S)$由具有

$$L=3$$
$$C=1/6$$

的 LC 并联谐振电路以福斯特 (Foster) 形式来实现。这种实现由图 7-2(c)给出。

阻抗函数综合

其次，让我们来综合网络以实现阻抗

$$Z(S)=\frac{1+2S}{1+S+S^2} \quad 或 \quad Y(S)=\frac{1+S+S^2}{1+2S}. \qquad (7.10)$$

可见 $Y(S)$在无限大处有极点，这相当于 S 平面的并联电容器，其值

$$C=\lim_{S\to\infty}\frac{Y(S)}{S}=\frac{1}{2}.$$

从 $Y(S)$中提取 C，给出

$$Y'(S)=Y(S)-\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{2+S}{1+2S}\right].$$

$Y'(S)$在原点或无限大处没有极点或零点。因此，没有电容器或电感器可以移去。然而它不是最小函数。其实部的计算给出

$$\mathrm{Re}[Y'(j\Omega)]=\frac{1+\Omega^2}{1+4\Omega^2},$$

它在 $\Omega=\infty$时有最小值 1/4。因此，可以把 1/4 姆的电导移去。

从 $Y'(S)$减去 1/4，剩下

$$Y''(S)=\frac{3}{4(1+2S)},$$

和

$$Z''(S)=\frac{4}{3}+\frac{8S}{3}.$$

$Z''(S)$被认出为 4/3 的电阻与 8/3 的电感串联。最后网络给出于图 7-3(a)中。

同样的函数(7-10)可以通过达林顿法综合为用一个电阻终接的无损耗二端对网络。$Z(S)$的偶部

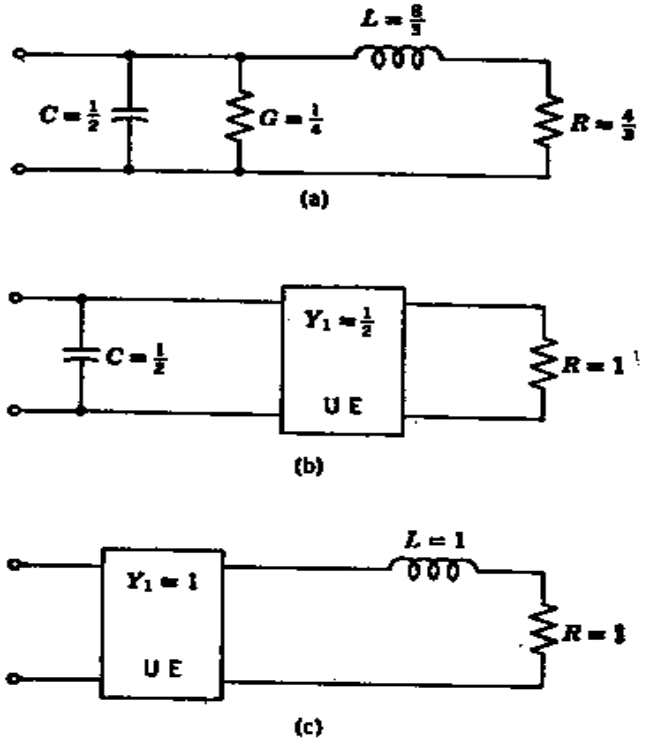


图 7-3　S平面阻抗综合例子

$$\mathrm{Ev}[Z(S)]=\frac{1-S^2}{1+S^2+S^4}$$

有零点，相当于 $S=\pm 1$ 的 1/2 阶传输零点和 $S=\pm\infty$ 的一阶传输零点。后面的零点需要 A 节或 B 节，而前面的零点则需要单位元素*。

象先前做了的那样，B 节可以从 $Z(S)$ 中移去并联电容器来实现。所以剩余导纳为

$$Y'(S)=\frac{1}{2}\left[\frac{2+S}{1+2S}\right].$$

最后一步是从 $Y'(S)$ 中提取单位元素。应用理查兹定理给出

$$Y_1=Y'(S)\big|_{s=1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

从 $Y'(S)$ 中减去单位元素，剩下

$$Y''(S)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{2+S}{1+2S}\right]-\frac{S}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{S}{2}\left[\frac{2+S}{1+2S}\right]}\right\}=1.$$

这种实现表示于图 7-3(b)中。第三种实现由首先提取单位元素来完成。这表示于图 7-3(c)。

转移函数综合

集总元件的转移函数综合的方法，也容易推广到传输线网络。实例留待 7.4 节阐述，

集总网络和分布网络的关系

集总元件网络的许多定理可以转用于传输线网络。例如，

* 值得注意的是集总网络中同样函数的综合，老是需要用因子$(S+1)$来增大(7.10)。

利用对应关系：

s 平面	S 平面
$s=\infty$	$S=\infty$
$s=0$	$S=0$
$s=j\omega$	$S=j\Omega=j\tan\omega l/v$
$d\omega$	$d\Omega=l/v\sec^2\omega l/v d\omega$

对于最小电抗函数 $Z(\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$，熟知的电抗面积定律

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{X(\omega)}{\omega}d\omega=R(\infty)-R(0)$$

成为 $$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{X(\Omega)}{\Omega}d\Omega=R(\infty)-R(0),$$

它简化为 $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{X(\theta)d\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=R(\pi/2)-R(0).$$

同样地对于电抗电路，关系

$$\frac{dX}{d\omega}\geqslant\frac{X}{\omega}$$

成为 $$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}\geqslant\frac{X}{\Omega},$$

它简化为 $$\frac{dX(\theta)}{d\theta}\geqslant\frac{X(\theta)}{\sin\theta\cdot\cos\theta}.$$

其他关系可以同样加以变换。

7.2 传输线网络的等效性

在传输线滤波器和其他微波器件的设计中，可以引用各种网络的等效性来获得电气上等效，但形式上或元件值方面有所不同的网络。这样的变换，不仅对设计者提供了灵活性，更重

要的是，这对用实际可行的尺寸去实际实现网络来说，往往是必不可少的。表 7-3 所示的库罗达(Kuroda)等效变换[3]给出了供把单位元素与串联电感器或电容器互换以及把单位元素与并联电感器或电容器互换用的一些等式。这些等式常常用于设计全极点带阻与带通滤波器中。

利维(Levy)已提出供把单位元素和任一正实二端对网络互换用的一般等式[9]。这说明于图 7-4。如果把未加撇的符号用来表示图 7-4 左边的网络参数，而加撇的符号则表示右边的网络参数，那么 Z' 和 N' 必须满足

$$Z'=\frac{B(1)+ZD(1)}{A(1)+ZC(1)}, \tag{7.11}$$

$$(1-S^2)A'=A+S(CZ-BY')-S^2DZY'$$
$$(1-S^2)B'=B+S(DZ-AZ')-S^2CZZ'$$
$$(1-S^2)C'=C+S(AY-DY')-S^2BYY'$$
$$(1-S^2)D'=D+S(BY-CY')-S^2AYZ'. \tag{7.12}$$

为了说明这些等式的应用，将导出库罗达(Kuroda)的第一等效(表 7-3，第 1 号)。对这个例子，网络 N 分别由其值为 Y_0 和 Y_1 的单位元素和并联电容器组成。并联电容器的[F]矩阵为

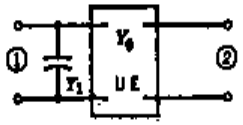
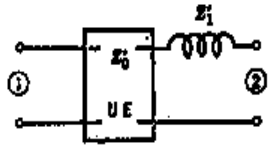
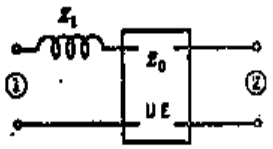
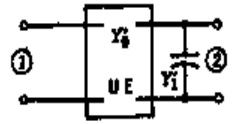
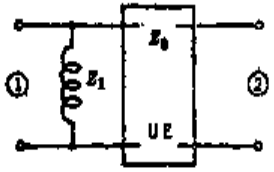
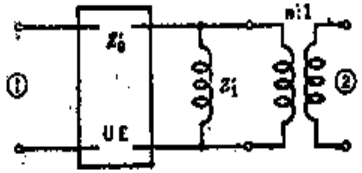
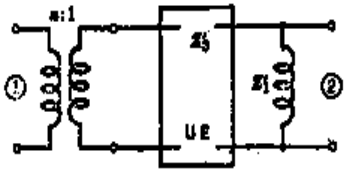
$$[F]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ SY_1 & 1\end{bmatrix}.$$

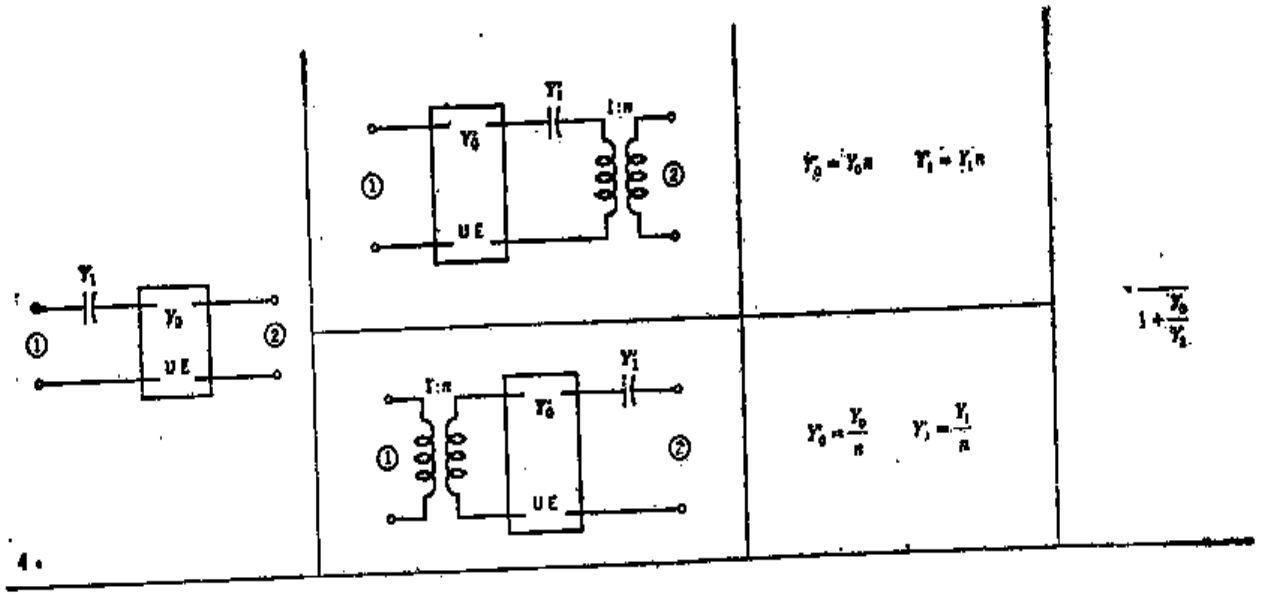
单位元素 Z_0' 通过把 $A=D=1$、$B=0$、$C=Y_1$ 代入(7.11)而得到。这给出

$$Z_0'=\frac{Z_0}{1+Z_0Y_1}.$$

网络 N' 的 A'、B'、C'、D' 参数、则通过代入(7.12)并除以 $(1-S^2)$而得到。

表 7-3　　传输线网络变换*

网络	等效网络	关系	
1 		$Z_0=\frac{1}{Y_0+Y_1}$ $Z_1=\frac{Y_1/Y_0}{Y_0+Y_1}$	
2 		$Y_0=\frac{1}{Z_0+Z_1}$ $Y_1=\frac{Z_1/Z_0}{Z_0+Z_1}$	
3 		$Z_0=Z_0n$　$Z_1=Z_1n$	$n=\frac{1}{1+\frac{Z_0}{Z_1}}$
		$Z_0=\frac{Z_0}{n}$　$Z_1=\frac{Z_1}{n}$	



• 表中原文漏标编号 1～4，现已补入——译者。

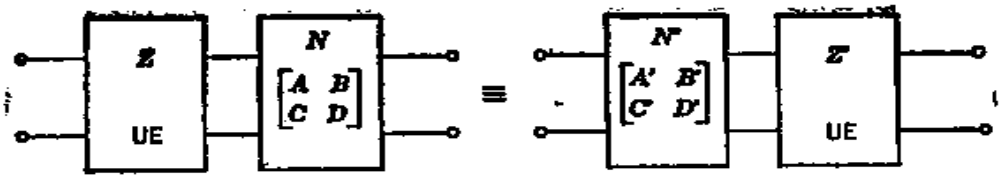


图 7-4 广义的库罗达(Kuroda)等效

$$A'=1$$

$$B'=\frac{SZ_0^2Y_1}{1+Z_0Y_1}$$

$$C'=0$$

$$D'=1.$$

可以看出，这些等式就是其值为

$$Z'=\frac{Z_0^2Y_1}{1+Z_0Y_1}$$

的串联电感的[F]矩阵。

7.3 耦合传输线网络

耦合传输线网络被利用在许多微波器件——滤波器、方向耦合器、匹配网络和均衡器中，这里只列举了几个。在地平面上面的 n 条耦合传输线的任意网络*，如图 7-5 所示，可以用下列导纳矩阵方程来描述[10]：

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \\ \vdots \\ i_{2n} \end{bmatrix} = \frac{v}{S} \begin{bmatrix} n\times n & n\times n \\ [C] & -T[C] \\ & \\ n\times n & n\times n \\ -T[C] & [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

* 地平面表示所有线路的公共回路。等效表示法为 n 对传输线。

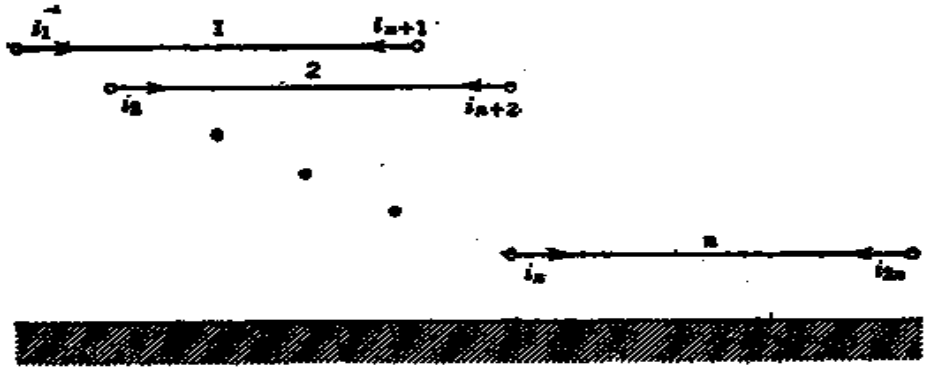


图 7-5　在地平面上面的一般 n 线线路

式中　v =传输介质中的光速度，

$$T=\sqrt{1-S^2},$$

而矩阵[C]为耦合线网络的麦克斯韦利 安 (Maxwellian) 静 电容分布：

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & -C_{12} & -C_{13}\cdots-C_{1n} \\ -C_{21} & C_{22} & -C_{23}\cdots-C_{2n} \\ -C_{n1} & -C_{n2} & \cdots \quad C_{nn} \end{bmatrix}$$

其中　$C_{ij}=C_{ji}$

$$C_{ij}\geqslant 0$$

$$C_{ii}\geqslant \sum_{j\neq i} C_{ij} \quad \text{对于 } i=1,2,\ldots,n. \qquad (7.14)$$

C_{ij}的量纲为法拉/单位长度。另外，可以选用阻抗矩阵：

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix}=\frac{v}{S}\begin{bmatrix} n\times n & n\times n \\ [L] & T[L] \\ & \\ n\times n & n\times n \\ T[L] & [L] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \\ i_n \\ \\ i_{2n} \end{bmatrix}$$

式中[L]为网络的电感分布，也满足(7.14)。L_{ij}的量纲为亨利/单位长度。[L]和[C]一起满足

$$[L][C]=[C][L]=\frac{1}{v^2}[I].$$

其中[I]为单位矩阵。

耦合双线线路的等效电路

耦合传输线的线对，在微波滤波器理论中形成一类重要网络。可以从耦合双线线路中导出二端对等效电路，这要引用一般四端对方程：

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}=\frac{v}{S}\begin{bmatrix} [C] & -T[C] \\ -T[C] & [C] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{7.15}$$

式中

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

首先，把边界条件加至两个端对上，使四端对简化为二端对。然后综合二端对网络。为了说明这一方法，试考虑将端对3和4短路接地、所得到的二端对网络。方程(7.15)简化为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}=\frac{v}{S}\begin{bmatrix} C_{11} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

其等效电路容易被认出为电感器的π形网络。这一等效变换如图7-6所示。用阻抗矩阵[Z]和混合矩阵[G]、[H]和[F]来描述耦合传输线，在获得等效电路方面也往往是有用的。对于等效电路较为复杂的情况，可以利用典型的综合法，例如考乌尔法或达林顿法。

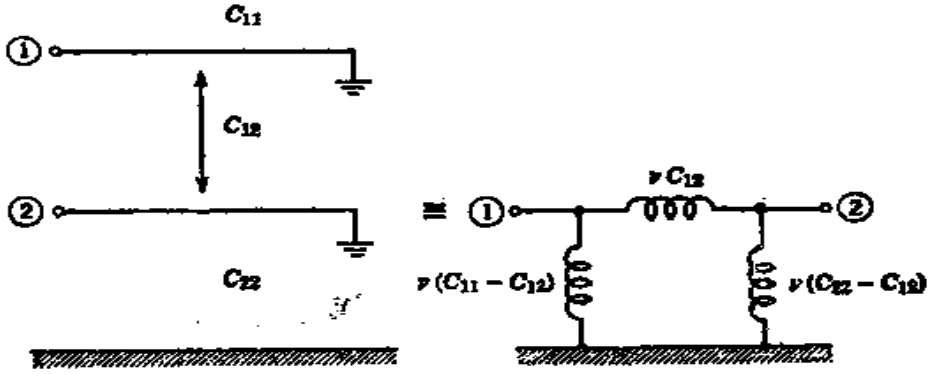


图 7-6 双线线路等效电路例子

对端子条件比较简单的双线线路网络来说，上面的方法是直截了当的，并不太困难，但是，对于多线线路网络，试图从多端对简化为二端对，通常是困难的。另外一种分析方法，即**图形变换法**[11]，往往是较为简便的。这个方法有时只经过少数几步就能得到等效电路，并不需要综合。对多端对网络来说，图形变换法差不多总是比较容易应用的。

图形变换法

在图形变换法中，要绘出代表耦合线网络的示意图（称为它的图形）。图形仅仅由电感器、电容器、变量器和非耦合单位元素组成。其次，把适当的边界条件应用到图形的端子上。然后，应用各种网络变换，直至得到满意的等效电路。在非邻近线路间的耦合可忽略不计的一种重要特殊情况下，n 线耦合线的图形表示如图 7-7 所示。其中的 y_{ij} 值是各线路的非归一化导纳，它与(7.13)的电容参数有如下关系

$$y_{ij}=vC_{ij}.$$

在图示中，所有线路都是非耦合的，而且所有节点都与实际网

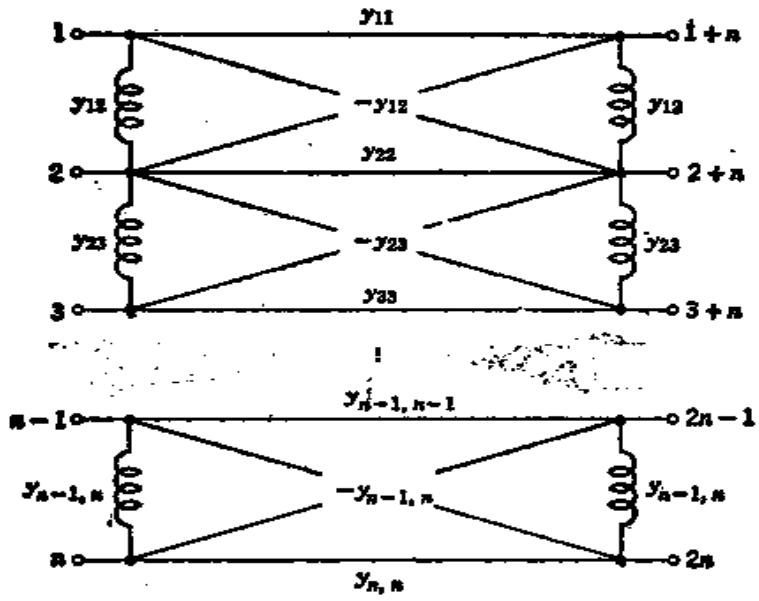


图 7-7　多线线路网络的图示，其中在近邻以外的耦合可以忽略不计

络一一对应。在阻抗基础上的对偶图形，有时候是有用的。不过，它较图 7-7 的图示更为复杂，并且需要理想变量器，因而使处置更为拥塞和麻烦。

许多耦合线网络等效电路，可以利用图 7-7 的图形得来。例如，图 7-6 的网络可以由图 7-8 中所示的步骤来得到。网络节点与图形节点一一对应；因此图 7-8(a) 的图形采取图 7-8 (b) 中所示的形式*。因为在端对 3 和 4 之间的电感器两端都被短路，故可把它从电路中移去。导纳 $-y_{12}$ 的单位元素与 y_{11} 和 y_{22} 为并联，所以图 7-8(b)的图形简化为图 7-8(c)的图形。单位元素($y_{11}-y_{12}$)和($y_{22}-y_{12}$)在一端被短路，因此它

* 对图形为附带的地平面，被省却了。

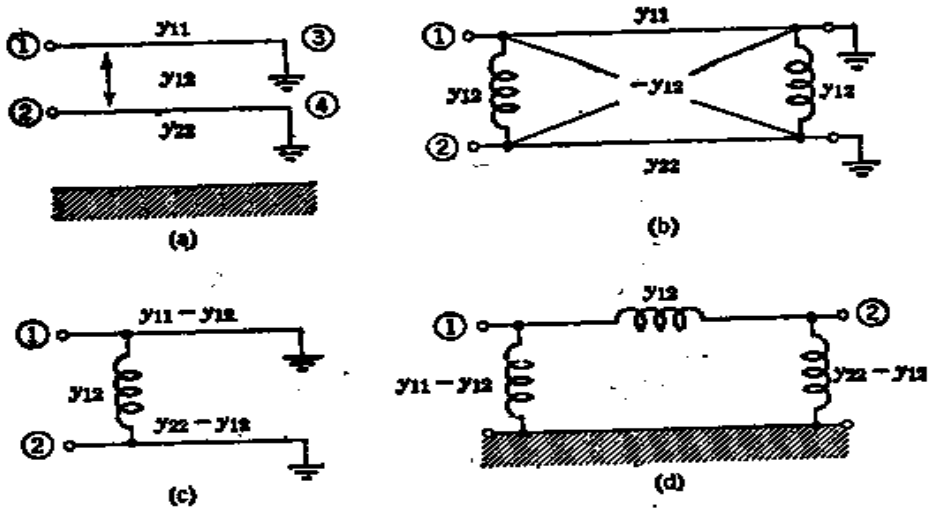


图 7-8 (a) 在端对 3 和 4 接地的耦合线网络，(b) 图形等效电路，(c) 图 7-8 (b)的简化图形、和(d) 最终的等效电路。

们相当于电感器。从而得到图 7-8(d) 的最终等效电路。 在一般情况下，或所加边界条件不是短路时，萨托(Sato)[12]和潘格(Pang)[13]的变换， 在获得有用的等效电路中， 往往是有帮助的。

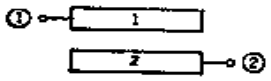
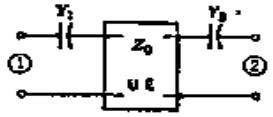
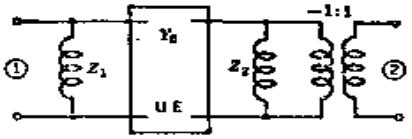
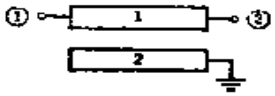
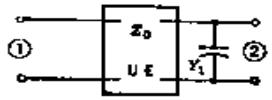
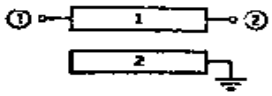
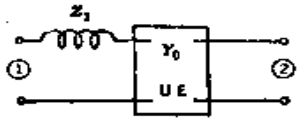
表 7-4 列举出微波器件设计中， 经常用到的一些 2 线和 3 线耦合线网络的等效电路。

7.4 滤波器设计步骤

最佳切比雪夫和巴特沃思滤波器

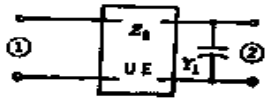
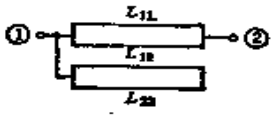
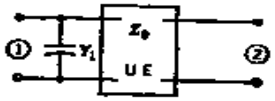
霍顿(Horton)和温策尔(Wenzel) [14] 已为无损耗全极点传输线滤波器，导出了广义切比雪夫(Chebyshev) 和巴特沃思

表 7-4　　耦合传输线

传输线网络	等效电路
	
	
	
	

等效电路

分析方程	综合方程	对可实现性的限制
$Y_1=\frac{1}{(L_{11}-L_{12})}$ $Y_2=\frac{1}{(L_{22}-L_{12})}$ $Z_0=vL_{12}$	$vL_{11}=Z_1+Z_0$ $vL_{22}=Z_2+Z_0$ $vL_{12}=Z_0$	没有
$Z_1=\frac{1}{v(C_{11}-C_{12})}$ $Z_2=\frac{1}{v(C_{22}-C_{12})}$ $Y_0=vC_{12}$	$vC_{11}=Y_1+Y_0$ $vC_{22}=Y_2+Y_0$ $vC_{12}=Y_0$	没有
$Z_0=vL_{11}$ $Y_1=vC_{11}-\frac{1}{vL_{11}}$ $Y_1=\frac{vC_{12}^2}{C_{22}}$	$vC_{11}=Y_1+Y_0$ $Y_1\leqslant vC_{12}\leqslant Y_1+Y_0$ $vC_{22}=\frac{(vC_{12})^2}{Y_1}$	没有
	对称情况 $C_{11}=C_{22}$ $vC_{11}=Y_1+Y_0$ $vC_{12}=\sqrt{Y_1(Y_1+Y_0)}$	没有
$Y_0=vC_{11}$ $Z_1=vL_{11}-\frac{1}{vC_{11}}$ $Z_1=\frac{(vL_{12})^2}{vL_{22}}$	$vL_{11}=Z_1+Z_0$ $Z_1\leqslant vL_{12}\leqslant Z_1+Z_0$ $vL_{22}=\frac{(vL_{12})^2}{Z_1}$	没有
	对称情况 $L_{11}=L_{22}$ $vL_{11}=Z_1+Z_0$ $vL_{12}=\sqrt{Z_1(Z_1+Z_0)}$	没有

传 输 线 网 络	等 效 电 路
	
	

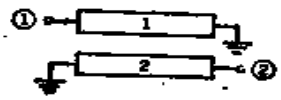
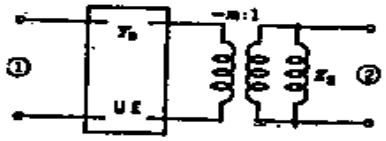
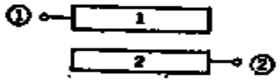
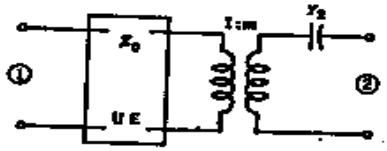
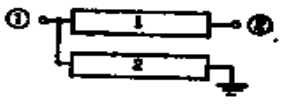
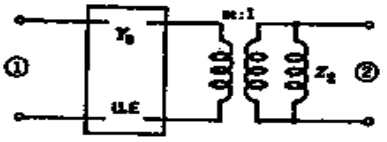
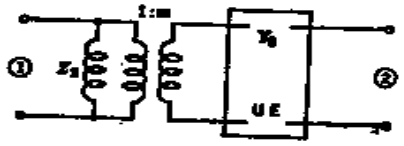
续表

分　析　方　程	综　合　方　程	对可实现性的限制
$Z_0=vL_{11}$ $Y_1=\frac{(vC_{12})^2}{vC_{22}}\left\{\frac{1}{1+vC_{22}/Y_4}\right\}$	定义 $Y_1'=Y_1\left[1+\frac{vC_{22}}{Y_4}\right]$ 选择：1) $Y_4>Y_1$ 2) $vC_{22}>\frac{Y_1}{1-Y_1/Y_4}$ 于是 $vC_{11}=Y_1'+Y_0$ $vC_{12}=\sqrt{Y_1'vC_{22}}$	$Y_4>Y_1$
	对称情况 选择：1) $Y_4>Y_1$ 于是 $vC_{11}=Y_4\left\{\frac{Y_0+Y_1}{Y_4-Y_1}\right\}$ $vC_{12}=\frac{\sqrt{Y_1Y_4(Y_0+Y_1)(Y_0+Y_4)}}{Y_4-Y_1}$	$Y_4>Y_1$
$Z_0=vL_{11}$ $Y_1=\frac{(vC_{22}-vC_{12})^2}{vC_{22}}$	定义：$k^2=\frac{C_{12}^2}{C_{11}C_{22}}$ 选择：$k^2\leqslant\left[\frac{Y_0-Y_1}{Y_0+Y_1}\right]^2$ $vC_{11}=\frac{Y_0}{1-k^2}$ $vC_{22}=(k\sqrt{vC_{11}}+\sqrt{Y_1})^2$ $vC_{12}=k\sqrt{(vC_{11})(vC_{22})}$	$Y_0\geqslant Y_1$
	对称情况 $C_{11}=C_{22}$ $vC_{11}=\frac{Z_1}{4}(Y_1+Y_0)^2$ $vC_{12}=\frac{Z_1}{4}(Y_0^2-Y_1^2)$ $k^2=\left[\frac{Y_0-Y_1}{Y_0+Y_1}\right]^2$	$Y_0\geqslant Y_1$

传输线网络	等效电路
① 1 Y_c ② 2 $Y_0=\frac{v^2(L_{11}-L_{12})(L_{22}-L_{12})}{vL_{12}\lvert vL\rvert}$ $\lvert vL\rvert=\begin{vmatrix} vL_{11} & vL_{12} \\ vL_{12} & vL_{22} \end{vmatrix}$	Z_1 Z_2 Y_3
① 1 ② 2	Y_1 Y_2 ① Y_3 ②
	Y_3 ① Y_1 Y_2 ②
① 1 ② 2	Z_T ① Z_1 Z_2 ②
	Z_1 Z_2 ① Z_3 ②
① 1 2 ② 3	Y_1 Z_2 Y_3 ① ② n:1 1:m

续表

分　析　方　程	综　合　方　程	对可实现性的限制
$Z_1=v(L_{11}-L_{12})$ $Z_2=v(L_{22}-L_{12})$ $Z_3=vL_{12}$	$vL_{11}=Z_1+Z_3$ $vL_{22}=Z_2+Z_3$ $vL_{12}=Z_3$ $Y_c=\frac{v^2(L_{11}-L_{12})(L_{22}-L_{12})}{vL_{12}\lvert vL\rvert}$	没有
$Z_1=v(L_{11}-L_{12})$ $Z_2=vL_{12}$ $Z_3=v(L_{22}-L_{12})$	$vL_{11}=Z_1+Z_2$ $vL_{12}=Z_2$ $vL_{22}=Z_2+Z_3$	没有
$Y'_1=v(C_{11}-C_{12})$ $Y'_2=vC_{12}$ $Y'_3=v(C_{22}-C_{12})$	$vC_{11}=Y'_1+Y'_2$ $vC_{12}=Y'_2$ $vC_{22}=Y'_3+Y'_2$	
$Y_1=v(C_{11}-C_{12})$ $Y_2=vC_{12}$ $Y_3=v(C_{22}-C_{12})$	$vC_{11}=Y_1+Y_2$ $vC_{12}=Y_2$ $vC_{22}=Y_3+Y_2$	没有
$Z'_1=v(L_{11}-L_{12})$ $Z'_2=vL_{12}$ $Z'_3=v(L_{22}-L_{12})$	$vL_{11}=Z'_1+Z'_2$ $vL_{12}=Z'_2$ $vL_{22}=Z'_3+Z'_2$	
$Y_1=vC_{11}$ $Y_3=vC_{33}$ $Y_2=v\left[C_{23}-\frac{C_{12}^2}{C_{11}}-\frac{C_{23}^2}{C_{33}}\right]$ $n=\frac{C_{12}}{C_{11}}$ $m=\frac{C_{23}}{C_{33}}$	$vC_{11}=Y_1$ $vC_{33}=Y_3$ $vC_{12}=nY_1$ $vC_{23}=mY_3$ $vC_{22}=Y_2+n^2Y_1+m^2Y_3$	1．$0\leqslant n\leqslant 1$ 2．$0\leqslant m\leqslant 1$ 3．$\frac{Y_2}{Y_1}>n(1-n)+m(1-m)\frac{Y_3}{Y_1}$

传 输 线 网 络	等 效 网 络
	变量器网络
	
	
	
	

续表

分　析　方　程	综　合　方　程	对可实现性的限制
NETWORKS		
$m=\frac{C_{12}}{C_{11}}=\frac{L_{12}}{L_{22}}$ $Y_0=vC_{11}$ $Z_2=vL_{22}$	$vL_{11}=Y_0$ $vC_{12}=mY_0$ $vC_{22}=m^2Y_0+Y_2$	1. $0\leqslant m\leqslant 1$ 2. $\frac{Y_2}{Y_0}\geqslant m(1-m)$
$m=\frac{L_{12}}{L_{11}}=\frac{C_{12}}{C_{22}}$ $Z_0=vL_{11}$ $Y_2=vC_{22}$	$vL_{11}=Z_0$ $vL_{12}=mZ_0$ $vL_{22}=m^2Z_0+Z_2$	1. $0\leqslant m\leqslant 1$ 2. $\frac{Z_2}{Z_0}\geqslant m(1-m)$
$m=\left[1+\frac{C_{22}-C_{12}}{C_{11}-C_{12}}\right]^{-2}$ $Y_0=v[(C_{11}-C_{12})+(C_{22}-C_{12})]$ $Z_2=v[(L_{11}-L_{12})+(L_{22}-L_{12})]$	$vC_{11}=Y_2+Y_0m^2$ $vC_{12}=Y_2-m(1-m)Y_0$ $vC_{22}=Y_2+Y_0(1-m)^2$	1. $0\leqslant m\leqslant 1$ 2. $\frac{Y_2}{Y_0}\geqslant m(1-m)$
$m=1-\frac{C_{12}}{C_{11}}$ $Y_0=vC_{11}$ $Z_2=vL_{22}$	$vC_{11}=Y_0$ $vC_{12}=Y_0(1-m)$ $vC_{22}=Y_2+Y_0(1-m)^2$	1. $0\leqslant m\leqslant 1$ 2. $\frac{Y_2}{Y_0}\geqslant m(1-m)$

(Butterworth)转移函数*。这类滤波器只包含C和L的并联或串联，理想变量器和非多余单位元素+。

设S_{11}、S_{22}和S_{21}为二端对滤波器的复散射参数。那么广义切比雪夫转移函数为

$$\left|\frac{1}{S_{21}}\right|^2=1+\epsilon_p[T_m(x)\cdot T_n(y)-U_m(x)\cdot U_n(y)]^2. \tag{7.16}$$

广义巴特沃思转移函数为

$$\left|\frac{1}{S_{21}}\right|^2=1+(x)^{2m}(y)^{2n}。 \tag{7.17}$$

把(7.16)和(7.17)中的符号定义为：

$$T_m(z)=\begin{cases}\cos(m\cos^{-1}z), & \text{对 } z\leqslant 1\\ \cosh(m\cosh^{-1}z), & \text{对 } z>1\\ \text{第一类切比雪夫函数}\end{cases}$$

$$U_n(z)=\begin{cases}\sin(n\cos^{-1}z) & \text{对 } z\leqslant 1\\ \sin h(n\cos h^{-1}z) & \text{对 } z>1\\ \text{第二类非归一化切比雪夫函数}\end{cases}$$

$$m=\begin{cases}\text{在}\pm\infty\text{的传输零点数目}\\ \text{非多余 }L\text{和}C\text{的数目}\end{cases}$$

$$n=\begin{cases}\text{在}\pm 1\text{ 的传输零点数目}\\ \text{非多余单位元素的数目}\end{cases}$$

$\epsilon_p=$通带波纹容限‡

---

* 这里所使用的术语全极点，在S＝±1时允许有半阶传输零点。

\+ 多余单位元素把因子$[(1-S)(1+S)]^{1/2}$提供给整个转移函数。因为这是全通函数，故多余单位元素并不对振幅响应特性产生影响。

‡ 通带波纹常常用dB单位来表示。那么$\epsilon_p=10^{A_p/10}-1$，其中A_p就是通带波纹(单位用dB)。

$$\theta_c=\begin{cases}\text{切比雪夫滤波器的等波纹频带边缘}\\ \text{巴特沃思滤波器的 3 dB 频带边缘}\end{cases}$$

$\theta_c=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{w_p}{2}\right\}$或$\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{w_s}{2}\right\}$，其中 w_p、w_s 分别为分数通带带宽和阻带带宽。

对于带阻滤波器

$$x=\frac{S}{S_c}=\frac{\tan(\theta)}{\tan(\theta_c)}=\frac{\Omega}{\Omega_c},$$

$$y=\left[\frac{S}{\sqrt{1-S^2}}\right]\Big/\left[\frac{S_c}{\sqrt{1-S_c^2}}\right]=\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta_c)}. \qquad (7.18)$$

而对于带通滤波器则

$$x=\frac{W}{W_c}=\frac{\cot(\theta)}{\cot(\theta_c)}=\frac{\Omega}{\Omega_c},$$

$$y=\left[\frac{W}{\sqrt{1-W^2}}\right]\Big/\left[\frac{W_c}{\sqrt{1-W_c^2}}\right]=\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta_c)}. \qquad (7.19)$$

对应于这些函数的典型滤波器响应，描绘于图 7-9 中*。注意在(7.16)和(7.17)中，对给定的 k 阶滤波器来说，m 和 n 满足 $m+n=k$ 的任何组合，都可获致基本上有同样通带特性的响应。选择性、入端阻抗和转移相位则随 m、n 的具体选择而异。为了更清楚地表明选择性，对于 m 和 n 的依赖关系，试考虑切比雪夫带通滤波器，允许其 m 和 n 变化、但它们的总和保持常数值 k 不变。阻带中的衰减为

$$\left|\frac{1}{S_{21}}\right|^2=1+\epsilon_p\cosh^2[m\cosh^{-1}x+n\cosh^{-1}y],$$

---

* 因为可通约的传输线滤波器具有周期为 π 的周期，故任何滤波器都可以被认为是带通或者带阻。不过，通常把滤波器按照其低频性能来分类。也可根据用途和带宽，可把带阻滤波器看作低通，而把带通滤波器看作高通。

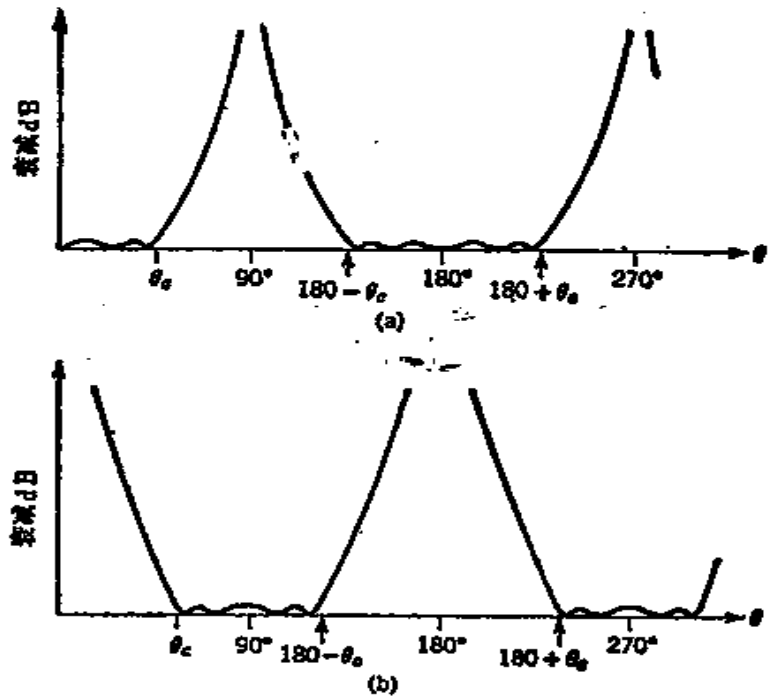


图 7-9　典型可通约传输线滤波器的响应：(a) 带阻，(b) 带通

式中 x 和 y 由(7.19)给定。这可以再写成更熟悉的切比雪夫形式：

$$\left|\frac{1}{S_{21}}\right|^2 = 1+\epsilon_r \cosh^2[m'\cosh^{-1}x], \qquad (7.20)$$

这里

$$m' = m + n\alpha, \qquad (7.21)$$

和

$$\alpha = \frac{\cosh^{-1}y}{\cosh^{-1}x}. \qquad (7.22)$$

因为 $m+n=k$，(7.21)相当于

$$m' = k-(1-\alpha)n.$$

(7.22)的检查揭示：α是单调地随着υ增加而减少，而且总是$\leqslant 1$。因而m'总是小于或等于k，而大于或等于m，表示对阶次给定的滤波器来说，可通过把LC型元件的数目m最大化、而得到最大选择性。这不是一个特别意外的结果，因为LC型元件在实频率轴上产生传输零点，而单位元素则在$S=\pm 1$产生传输零点。然而，对函数α的周密检查表明：它在截止区域内，对于很小的分数带宽来说，几乎为1。这在图7-10中是可以明显地看出的，其中已就α对归一化频率υ/υ_c绘成曲线，而以分数带宽为参数。注意当分数带宽(w_p)小于0.2时，对υ/υ_c直到3的情况，α都大于0.95。因而，对于窄带宽带通滤波器，单位元素和LC型元件一样，在大部分频带内大概都有助于选择性。

对于带阻滤波器，除了横坐标现在应该被看作为Ω/Ω_c而不是υ/υ_c，并且应该用分数阻带带宽w_s、而不是w_p以外，可以利用同图曲线。因而，对带阻滤波器来说，除了它是宽带带阻滤波器、因而其单位元素和LC型元件、大约都同等有助于选择性以外，可以得到相似的结论。图7-10的曲线图也可以和卡瓦卡米(Kawakami)[15]的计算图表一起，用来确定任何频率的衰减，或者反过来确定为给定选择性所需要的滤波器阶次。这样一来，(7.20)的参数m'就可代替卡瓦卡米图表中的参数n。还要注意：参数m'是频率的函数，因此，为了精确的结果，必须对每个频率，计算新的m'值。

实际上，对给定k阶滤波器选用LC型元件和单位元素的数目，要受到实际具体可实现性考虑的强烈影响。这些是：

1．在完全屏蔽的结构中，实现约大于200欧和约小于5欧的特性阻抗是非常困难的。

2．在使用耦合传输线的滤波器中，要获得大于6至8的

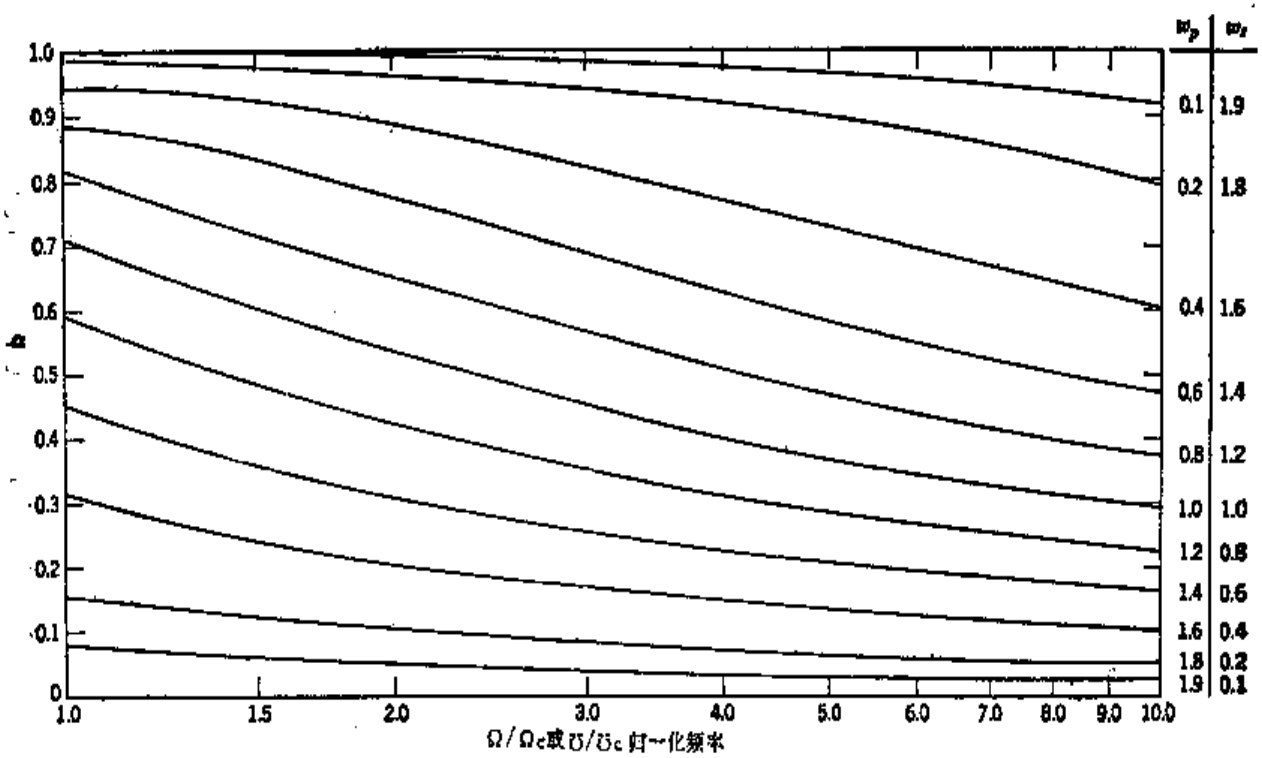


图 7-10　以分数带宽为参数时 a 对 Ω/Ω_c 或Υ/Υ_c的关系曲线。

归一化互耦合值 C_{12}/ϵ（这里 ϵ 为介质的介电常数）很困难，而且它们对间距的微小变化（例如，制造容差）很灵敏。

3．在利用直接耦合短截线的微波滤波器中，在单接点上实现一个以上的 L 和 C 是困难的。因而，需要用单位元素把 LC 型谐振器实际上分开。

4．在许多情况下，m 的最大值受具体实现型式所限制。例如，在以后要讨论的一种普通微波滤波器型式中，不论 k 值为何，m 的最大值总是 1。

准确综合例子 在集总网络中通常就是这样，为了要使综合过程期间有效数字的损失减至最少，传输线滤波器的综合应该用合适的变换变量来完成。不过，下面的例子为了要简化表达方式，而使用理查兹变量 S。打算综合得到 $w_p=1.0$ 和 0.1 dB 通带波纹的七节切比雪夫带通滤波器*。滤波器包含 2 个单位元素和 5 个 LC 型元件。因而 $m=5$ 和 $n=2$。参数 S_c 为

$$S_c=j\tan\theta_c=j\tan\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{w_p}{2}\right)\right]=j\tan(45^\circ)=j$$

而参数 ϵ_p 表示为

$$\epsilon_p=10^{0.1/10}-1=0.0233.$$

因此传输函数为

$$|S_{21}|^2=\frac{1}{1+0.0233\left[T_5\left(\frac{S_c}{S}\right)\cdot T_2\left(\frac{S\sqrt{1-S_c^2}}{S_c\sqrt{1-S^2}}\right)-U_5\left(\frac{S_c}{S}\right)\cdot U_2\left(\frac{S\sqrt{1-S_c^2}}{S_c\sqrt{1-S^2}}\right)\right]^2}.$$

以 j 代替 S_c，利用对无损耗网络适用的恒等式 $|S_{11}|^2+|S_{21}|^2=1$，并简化多项式，得出

---

* 例子来自经许可的霍顿和温策尔的论文[14]。

$$S_{11}|^2=[0.98\,S^6+8.15\,S^4+17.64\,S^2+10.78]^2/$$
$$-S^{14}+2.96\,S^{12}+14.96\,S^{10}+100.96\,S^8$$
$$+308.69\,S^6+487.06\,S^4+380.46\,S^2+116.23$$

下一步应该由其平方幅值来确定函数 $S_{11}(S)$。为此，要用计算机从数字上分解分母的因子。因为 $S_{11}(S)$ 的分母必须为赫维茨多项式，故左边根分配给 $S_{11}(S)$。从另一方面来说，分子不必为赫维茨。原则上可以把其零点任意分布，只要这种分配可使我们得出关于实轴对称的函数。在现在的例子中，分子是通过观察分解因子的，而且选择的是左半平面零点*。结果给出 $S_{11}(S)$为

$$S_{11}(S)=-(0.98\,S^6+8.15\,S^4+17.64\,S^2+10.78)/$$
$$(S^7+6.16\,S^6+17.47\,S^5+32.36\,S^4+39.13\,S^3$$
$$+37.57\,S^2+20.73\,S+10.78).$$

由 $S_{11}(S)$，通过

$$Z_{in}=\frac{1+S_{11}}{1-S_{11}}$$

可得出入端阻抗

$$Z_{in}=(S^7+5.18\,S^6+17.47\,S^5+24.21\,S^4+39.13\,S^3$$
$$+19.93\,S^2+20.73\,S)/(S^7+7.13\,S^6+17.47\,S^5$$
$$+40.51\,S^4+39.13\,S^3+55.21\,S^2+20.73\,S+21.56)。$$

因为 Z_{in} 的分子和分母的奇部完全相同，由此可知代表 Z_{in} 的网络可以是对称的。因而，只需要综合半个网络。虽然在综合周期的任何时候都可以把单位元素移去，但是现在的例子中，是首先就移去了一个单位元素。因而，经由理查兹定理，

---

* 右半平面零点的选择，将得出对偶电路。

$$Z_{UE}=Z_{in}(1)=0.63$$

减去这个单位元素以后，剩余的阻抗为

$$Z'_{in}(S)=(1.84\,S^6+10.20\,S^5+18.84\,S^4+33.65\,S^3+20.08\,S^2+20.98\,S)/(4.64\,S^6+21.09\,S^5+64.83S^4+82.37\,S^3+128.05\,S^2+60.52\,S+62.96).$$

可以看到 Z'_{in} 在原点有零点，因此 Y'_{in} 在原点有极点。这个极点、相当于并联电感器，其值为

$$L_1=[\lim_{S\to 0}SY'_{in}(S)]^{-1}=0.33.$$

移去电感器 L_1 以后，剩余导纳为

$$Y'_{in}(S)=(13.98\,S^5+46.87\,S^4+102.8\,S^3+77.15\,S^2+80.25S)/(5.54\,S^5+30.73\,S^4+56.77\,S^3+101.4\,S^2+60.52\,S+62.96).$$

Y'_{in} 在原点有零点，因此 $Z'_{in}(S)$在原点有极点。这个极点、相当于串联电容器，其值可以表示为

$$C_2=[\lim_{S\to 0}SZ'_{in}(S)]^{-1}=1.27.$$

然后可以类似方式，得到另一并联电感值 $L_3=0.26$。这时，综合可以结束，因为已知滤波器是对称的。最后网络表示于图 7.11。

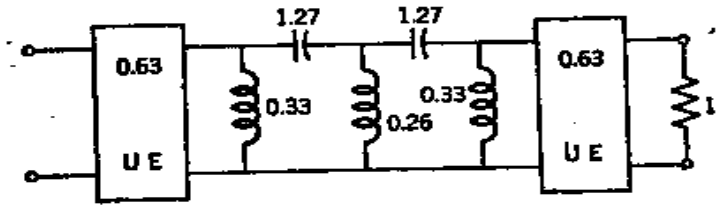


图 7-11 适用于 5 个 LC 元件和 2 个单位元素而有最佳响应的切比雪夫滤波器

直接映射方法

根据双端终接集总低通梯形滤波器的几种设计方法，概略地表示于图 7-12 中*。

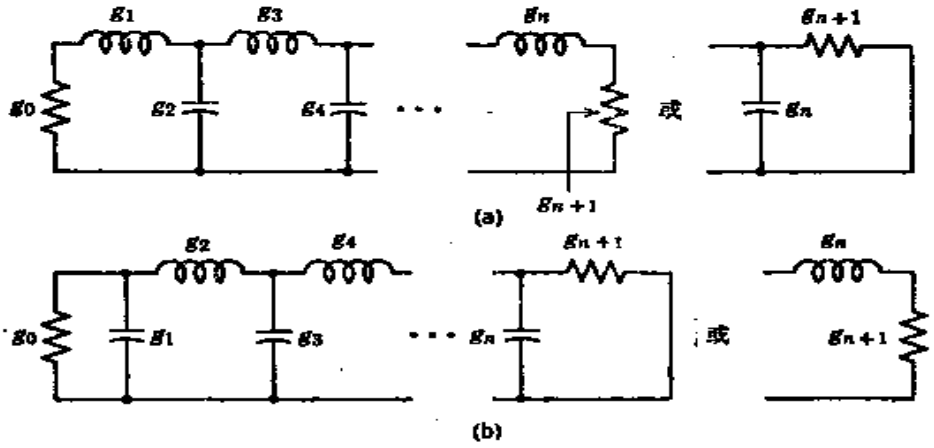


图 7-12　低通原型梯形滤波器的对偶形式

g_i 参数对于并联元件为电容（或电导）而对于串联元件则为电感（或电阻）。能给出规定的切比雪夫、巴特沃思和其他滤波器特性[16]的元件值表是现成的。这些元件值通常以归一化形式给出，以使切比雪夫滤波器的等波纹截止频率发生在 $\omega'=1$；而在巴特沃思滤波器中，则是 3 dB 的截止频率发生在 $\omega'=1$。通常是这样来安排阻抗水平以使 g_0 等于 1。

通常可以把理查兹变换的换算型式直接应用到集总元件的这类原型滤波器，来设计恰当的传输线滤波器。例如，把集总元件低通梯形滤波器转变成带阻传输线滤波器的变换为

* 有时也使用电源导抗为零的单端终接滤波器，正如集总元件的椭圆函数滤波器一样。

$$\omega' = \left\{\omega'_s \cot\left(\frac{\pi}{2}\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)\right\} \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\right) = A_s \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\right)。 \quad (7.23)$$

同样地，带通变换为

$$\omega' = -\left\{\omega'_s \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)\right\} \cot\left(\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -A_p \cot\left(\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad (7.24)$$

其中 A_s 和 A_p 的定义，由（7.23）和（7.24）是显而易见的，而

ω' 为集总元件低通原型滤波器的频率变量，

ω 为传输线滤波器的频率变量，

ω_0 是传输线滤波器的中心频率，

ω_s 为传输线滤波器的某任意频率，

ω'_s 为集总元件滤波器的对应频率。

传输线滤波器的频率 ω 映射为其原型的对应频率 ω'，如图 7-1 对带阻变换的情况所示。一旦选定了参数 ω'_s、ω_s 和 ω_0，则传输线滤波器的频率特性就对所有 ω 都被唯一地确定。相反地，原型滤波器在频率 ω' 的响应，和带阻滤波器在

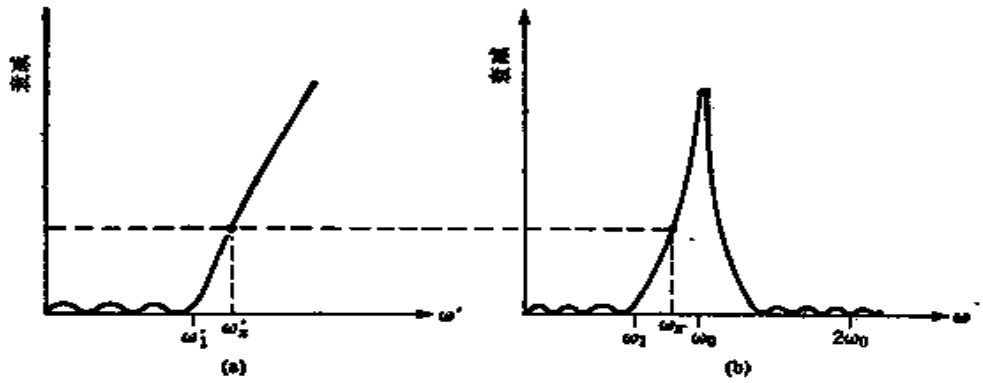


图 7-13　适用于切比雪夫低通滤波器的正切变换：(a) 原型响应，(b) 映射响应。

$$\omega=\frac{2}{\pi}\,\omega_0\tan^{-1}\left[\frac{\omega'}{A_s}\right]$$

以及带通滤波器在

$$\omega=-\frac{2}{\pi}\omega_0\cot^{-1}\left[\frac{\omega'}{A_p}\right]$$

的响应是相同的。

在(7.23)和(7.24)的映射变换下，图 7-12 所示的原型滤波器分别变换成图 7-14 (a)和(b)所示的传输线滤波器。如果

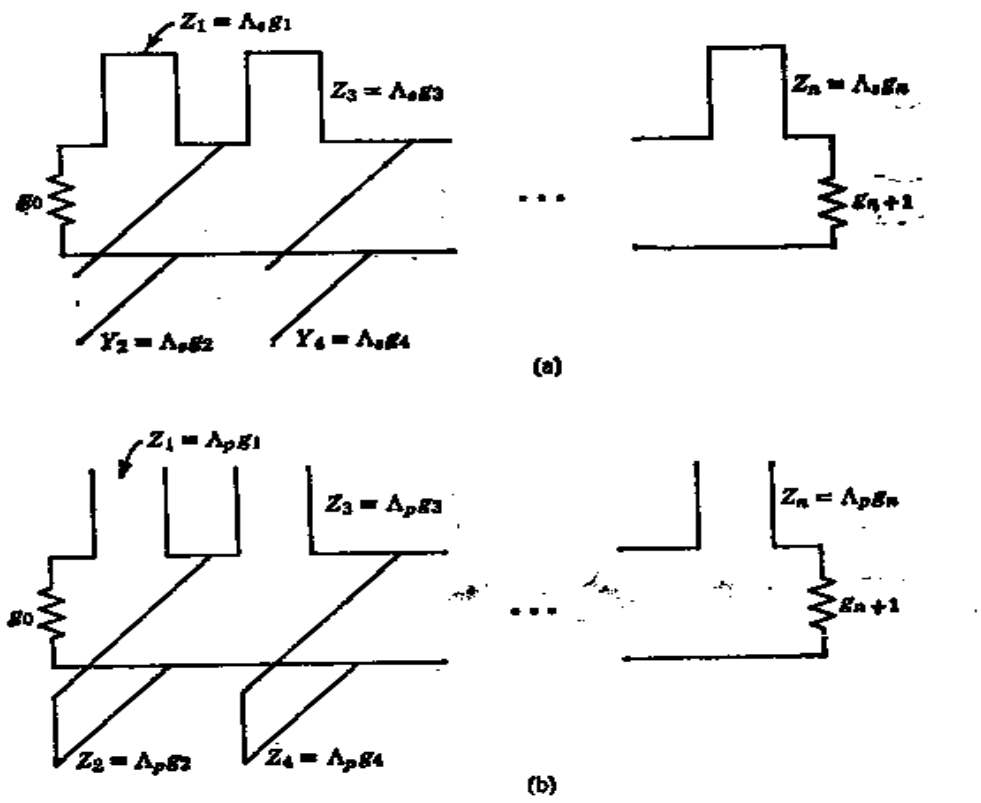


图 7-14　用正切和余切变换的已变换原型网络：(a) 正切变换，(b) 余切变换。

滤波器的阶次为 3 或更低，则在单-参考平面连接传输线短截线来实现滤波器，有时是可能的。可是，这种实现形式的成功与否，取决于短截线的阻抗值，它本身又与滤波器的带宽和阻抗水平有关。实际上人们发现，宽带宽通常是直接实现所必要的。

在 n 为 3 或更高的时候，另一实现方法是把滤波器分划成一些 T 形节。对带阻滤波器是分成 (LCL)、(LCL)……的 T 形节，而对带通滤波器则是用 (CLC)、(CLC)……的 T 形节。那么，对于带阻滤波器，我们可以利用表 7-4 的第 7 号耦合线恒等式，来实现图 7-15 (a)所示型式的滤波器。这种方法已由萨托(Sato)[17] 作了报导。对于带通滤波器，我们可以利用表 7-4 的第 10 号耦合线恒等式，来给出图 7.15(b)所示的实际实现。这种方法也已由利维 (Levy)[18]作了报导。在后面情况下，必须把理想变量器插进网络中，这在理论上总是可能的。不过，实际上已经发现：由于实际可实现性的限制，这类实现只在有限制的带宽范围内才是可能的。

为了设计而使用正切和余切变换的其它微波滤波器，就是数字-椭圆带通和带阻滤波器[19]，以及阶跃-数字椭圆滤波器[20]。

奥扎基(Ozaki)和伊希(Ishii)的准确设计法

先前的直接映射设计法，实际上在它们的应用范围方面受有限制。大带宽通常是需要的，而实际实现在 (大约) 4 GHz 以上则可能很难达到。奥扎基和伊希叙述了对带阻滤波器特别有用的另一种直接映射法[3]。他们的方法，包括把额外的单位元素引入传输线滤波器，以便用一个或一个以上单位元素把诸 L 和 C 隔开。这个方法对广阔的带宽范围证明是有实用价值

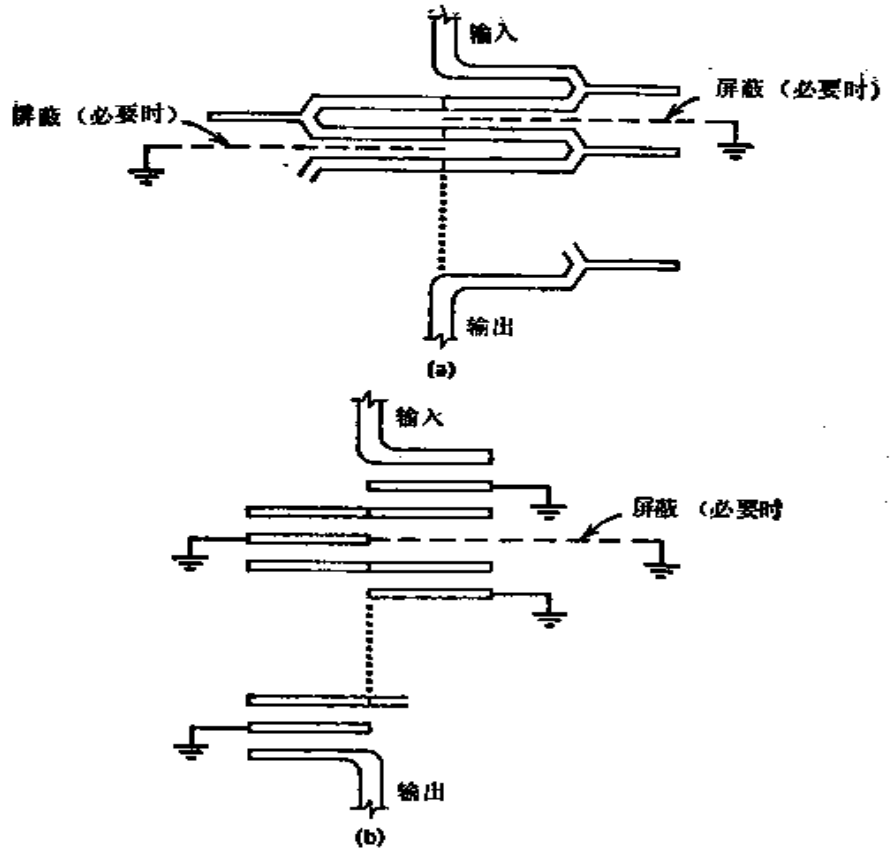


图 7-15　带阻和带通滤波器的耦合线实现：(a) 带阻滤波器，(b) 带通滤波器。

的，同时可使实际实现更加容易。让我们举例说明具有 4 谐振器带阻滤波器的设计方法。第一步应该根据适当的低通原型实行(7.23)的变换。其次，在电源电阻和已变换滤波器的最前一个谐振器之间，以及在负载电阻和最末谐振器之间插入一些单位元素。这些步骤说明于图 7-16 (a) 和(b)。选择单位元素的特性阻抗等于它们各自的终端负载，以便不改变滤波器的衰减。特别是，如果低通集总元件原型的转移函数为

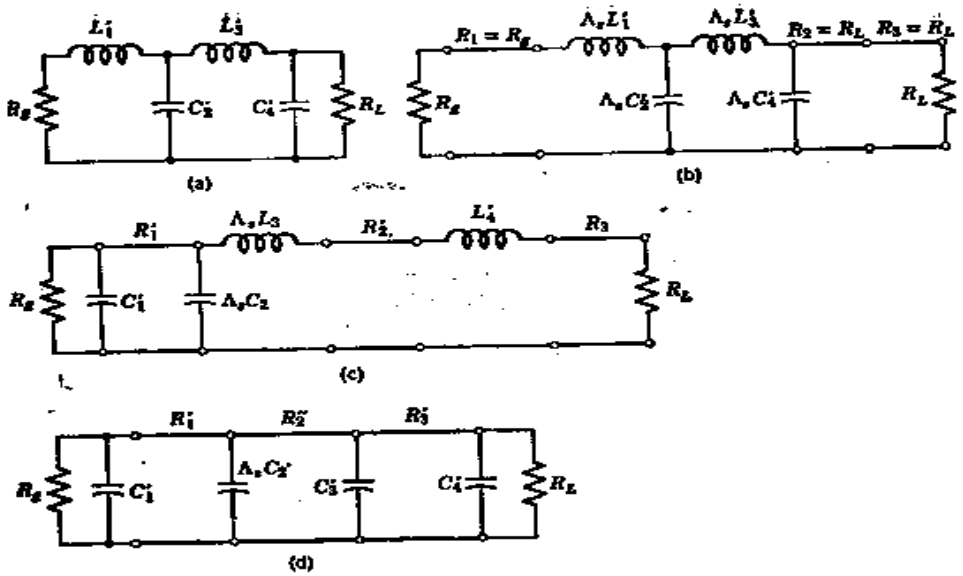


图 7-16　奥扎基（Ozaki）和伊希（Ishii）设计法的例子：(a) 原型，(b) 加有 3 个单位元素的已变换原型，(c) 一度应用在滤波器各端的库罗达（Kuroda）等效，和(d) 应用于 A_2L_3 和 R_2，L_4' 和 R_3 的库罗达等效。

$$S_{21}(\omega')$$

时，剩传输线滤波器在插入单位元素之前的响应为

$$S_{21}(A_2\tan\theta),$$

而插入 k 个单位元素之后的响应为

$$\left(\frac{1-j\tan\theta}{1+j\tan\theta}\right)^{k/2}S_{21}(A_2\tan\theta)。$$

设计程序中的最后一步是利用表 7-3 中第 1 和第 2 号的库罗达（Kuroda）等效，将单位元素和短截线换位，使单位元素移入滤波器内。换位的作用是使短截线由至少 1 个单位元素来隔开。过程说明于图 7-16 (c) 和 (d)。因为串联短截线比屏蔽结构中的并联短截线通常更难以实现，故把所有短截线都并联连接的设计往往是较为可取的，虽然就一切情况而论并不都是

如此。

单位元素在电源和负载端之间的最初分配，和插入滤波器的单位元素的总数目都是任意的。(当然，应该把总数目尽量减少，以使滤波器的长度和耗散损失减至最小。)因此，要实现同样的衰减响应，可以有很多种设计方案。通常是用 $n-1$ 个单位元素来隔开 n 阶滤波器的短截线。有时对于用 3 个单位元素来隔开的短截线则用 $3(n-1)$个单位元素，以消除短截线之间讨厌的耦合。在设计中将单位元素总数的一半分别从滤波器的两端接进去的结构，通常是满意的，而且它可保持原型滤波器的对称。单位元素在电源和负载之间的其他分配方案有时可以给出较好的阻抗值，因而应按一个个情况来加以考虑。在多路调制器应用中，为了保持原型的入端阻抗，往往是把所有单位元素都从负载端接进去。

基于上述方法，希夫曼(Schiffman)和马特伊 (Matthaei) 对谐振器间用一单位元素间隔的多达五个谐振器的带阻滤波器，以及对谐振器间用三单位元素间隔的多至三个谐振器的带阻滤波器导出了一套公式[21]。他们的这些公式，是以滤波器电源与负载端之间的单位元素按相同或接近相同的分配为基础的。

基于上述设计方法的数值计算步骤，已系统地列写成一种算法[22]。这种算法可以结合台式计算机使用或在计算机上编成程序。可以容易地适应单位元素在滤波器的电源和负载端之间的任意分配。

对于有宽阻带的带阻滤波器，通常是把并联短截线直接接至单位元素来完成实际实现。对于窄阻带的滤波器，需要的短截线阻抗对于实际实现则太大了。不过，图 7-17 (a) 和(b) 所示的实际实现分别对于空间连线和印刷电路是实用的。从直接

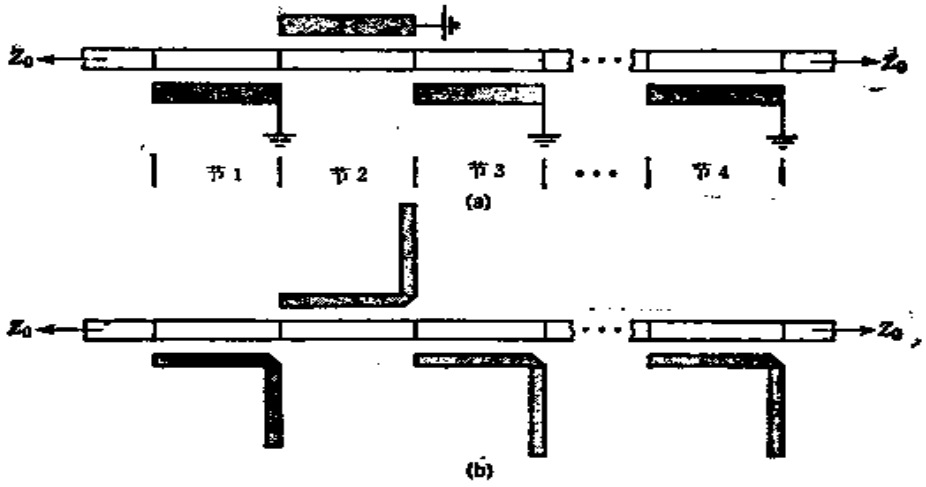


图 7-17　用于窄阻带至中等阻带宽的带阻滤波器的耦合线实现

耦合短截线结构变换到耦合线结构，可用表 7-4 中第 3 和 5 号等效来完成。

科恩(Cohn)的近似设计法

科恩的设计法利用了低通集总元件原型滤波器连同对理想导抗变换器的电路近似[23、24]。这种方法能满意地工作于分数带宽直到大约 15%。

理想阻抗变换器是一个有下列 $A\ B\ C\ D$ 矩阵的二端对网络

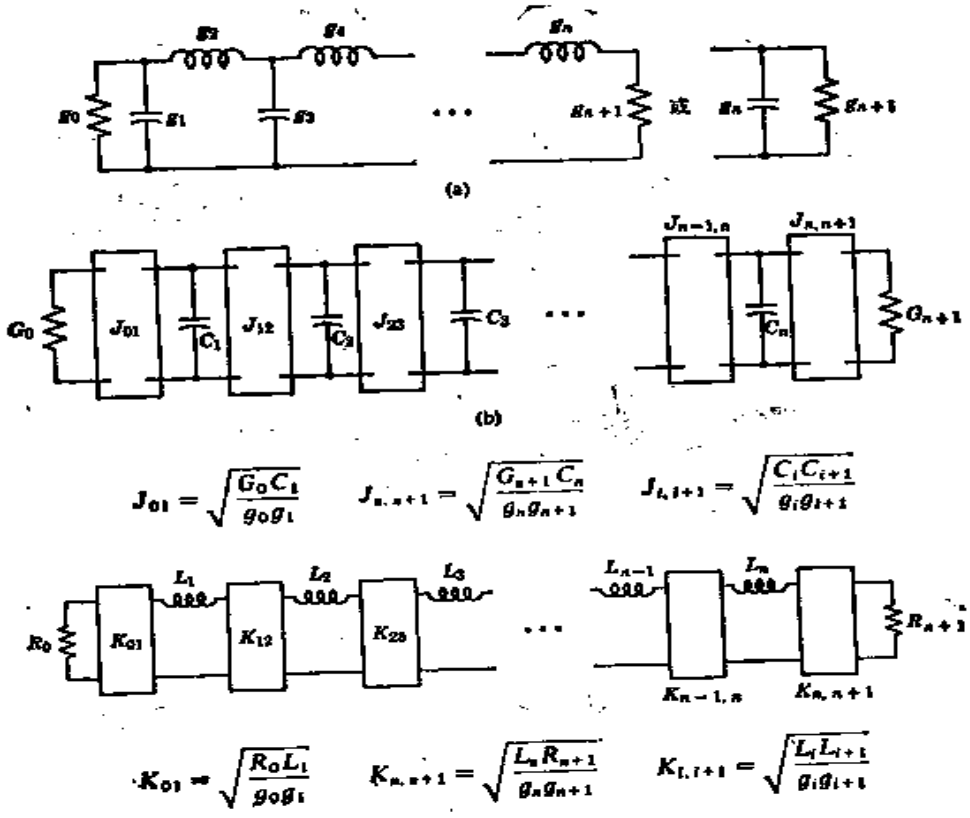
$$\begin{bmatrix} 0 & jK \\ j/K & 0 \end{bmatrix}$$

它具有在一端对看到阻抗为另一端对阻抗的倒数再用变换器常数的平方来换算的特性：

$$Z_{in} = K^2/Z_{out}。$$

同样的结果，在对偶基础上适用于理想导纳变换器。

可以把串联和并联谐振器的梯形网络由全部串联或者全部并联的为理想变换器所隔开的谐振器组成的等效网络（在导抗和插入衰减基础上等效）来代替。这种等效性表示于图 7-18 。在图 7-18(b)和(c)的等效网络中，对 C_i、L_i 和终端导抗的选择是完全任意的。此图中所给出的关系，可以由原型网络和等效网络的入端导抗展开成连分式，并使对应项相等而导得。同



$$J_{01}=\sqrt{\frac{G_0C_1}{g_0g_1}} \qquad J_{n,n+1}=\sqrt{\frac{G_{n+1}C_n}{g_ng_{n+1}}} \qquad J_{i,i+1}=\sqrt{\frac{C_iC_{i+1}}{g_ig_{i+1}}}$$

$$K_{01}=\sqrt{\frac{R_0L_1}{g_0g_1}} \qquad K_{n,n+1}=\sqrt{\frac{L_nR_{n+1}}{g_ng_{n+1}}} \qquad K_{i,i+1}=\sqrt{\frac{L_iL_{i+1}}{g_ig_{i+1}}}$$

图 7-18　使用变换器的等效低通网络：(a) 原型，(b) 使用导纳变换器的等效网络，和 (c) 使用阻抗变换器的等效网络。

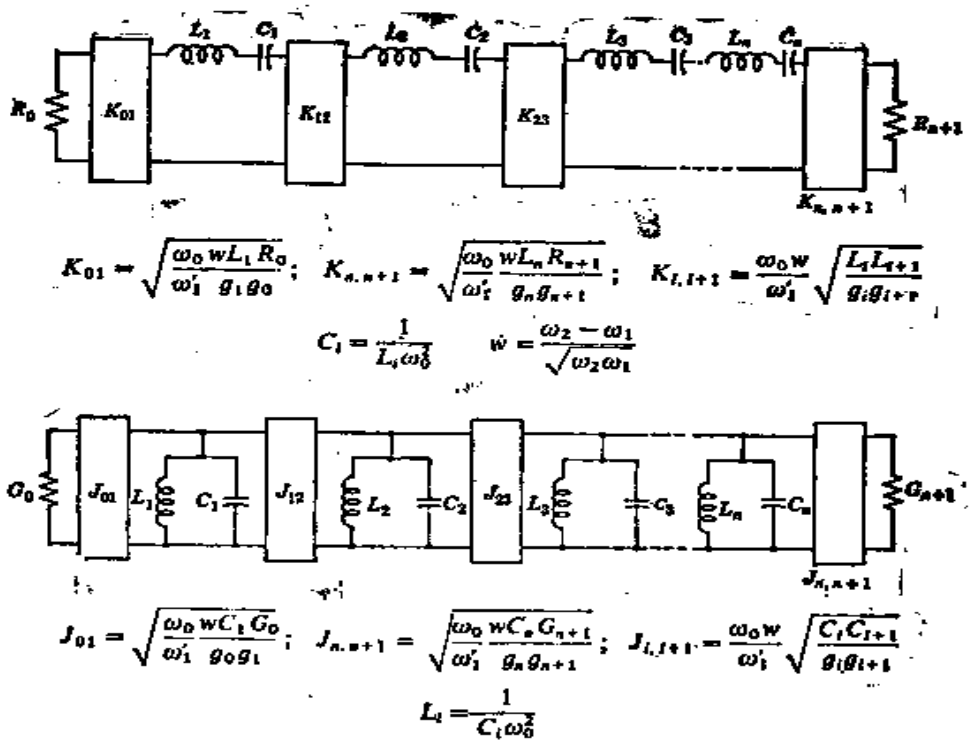
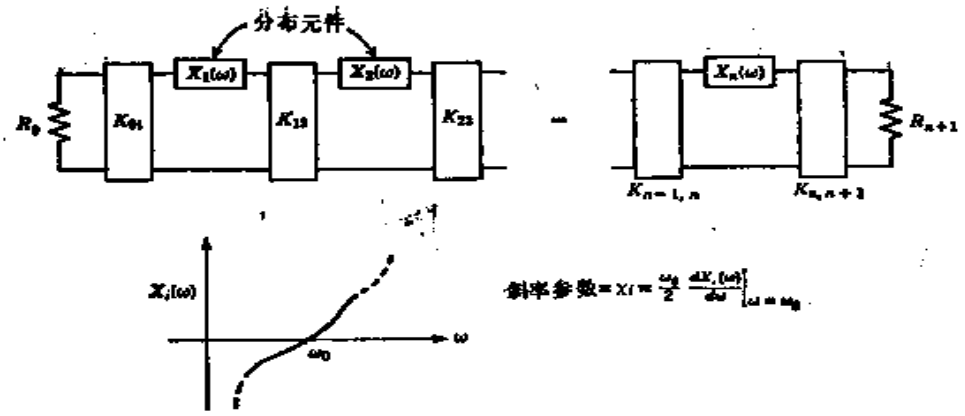


图 7-19 使用阻抗和导纳变换器的带通滤波器

样的方法可应用到带通滤波器，如图 7-19 所示。

图 7-20 和 7-21 中所示的两种重要推广，是以分布电路代替集总 LC 谐振器而得到的[25]。这些可以是微波空腔谐振器、四分之一波长线或任何其他适当的谐振装置。理论上，分布电路的电抗在所有频率都该等于集总谐振器的电抗。在实践中，它们只有在谐振附近才近似等于集总谐振器的电抗。不过，这对于窄频带滤波器已足够了。为了方便起见，使分布谐振器电抗和电抗斜率在频带中心等于其对应 的集总 谐振器 之值。 为此，引入了一个叫作斜率参数的量。谐振器在频带中心有零电抗的斜率参数，由 x 来表示而且定义为

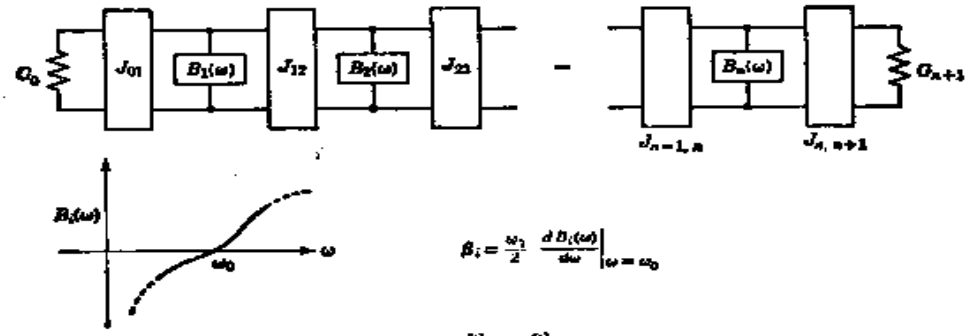


$$w = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sqrt{\omega_2 \omega_1}}$$

$$K_{01} = \sqrt{\frac{R_0 X_1 w}{\omega_1' g_0 g_1}} \qquad K_{n,n+1} = \sqrt{\frac{R_{n+1} X_n w}{\omega_1' g_n g_{n+1}}}$$

$$K_{i,i+1} = w\sqrt{\frac{X_i X_{i+1}}{g_i g_{i+1}}}$$

图 7-20　使用阻抗变换器的广义带通滤波器



$$w = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sqrt{\omega_2 \omega_1}}$$

$$J_{01} = \sqrt{\frac{G_0 \beta_1 w}{\omega_1' g_0 g_1}} \qquad J_{n,n+1} = \sqrt{\frac{G_{n+1} \beta_n w}{\omega_1' g_n g_{n+1}}}$$

$$J_{i,i+1} = w\sqrt{\frac{\beta_i \beta_{i+1}}{g_i g_{i+1}}}$$

图 7-21　使用导纳变换器的广义带通滤波器

$$\chi=\frac{\omega_0}{2}\frac{dX(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0},$$

其中 $X(\omega)$为分布谐振器的电抗。这个以及对偶电路关系，表示于图 7-20 和 7-21 。

理想的导抗变换器只用无源元件是不能实现的。不过，在窄带宽范围内则可以由某些电路来近似它们，其中几种示于图 7-22 中。虽然这些电路需要负元件或负线路长度，但实际上这些负量可以为邻近元件所吸收。注意变换器电路对频率变化是灵敏的，它就是一个为什么把利用这些电路的滤波器限制在窄带宽的原因。另一有用的变换器是 $\theta=90°$ 左右的单位元素。

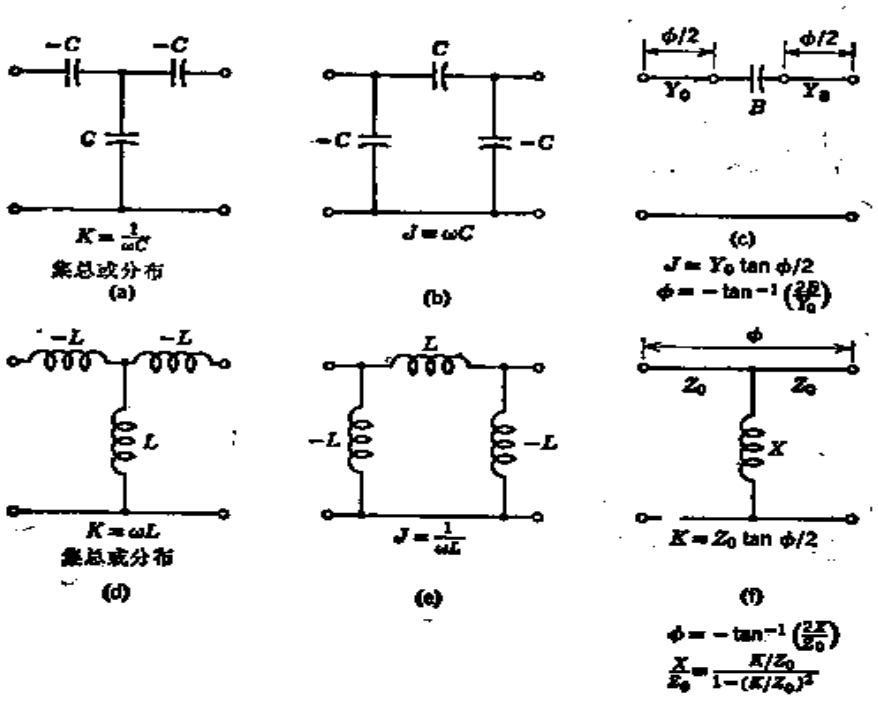


图 7-22　变换器电路

实例推导

一组关于末端耦合半波谐振带通滤波器的设计方程的推导，将用来说明后一种综合方法。考虑中的滤波器大致如图7-23(a)所示，其等效电路给出于图 7-23(b)中。设计任务是要求确定关于 $i=1$ 直到 n 的电长度 θ_i 和关于 $i=0$ 直到 n 的集总电容值 $C_{i,i+1}$，以达到规定的滤波器性能。推导设计方程的一种方法是首先把图 7-23(b)的电路转化为图 7-21 中所给出的一

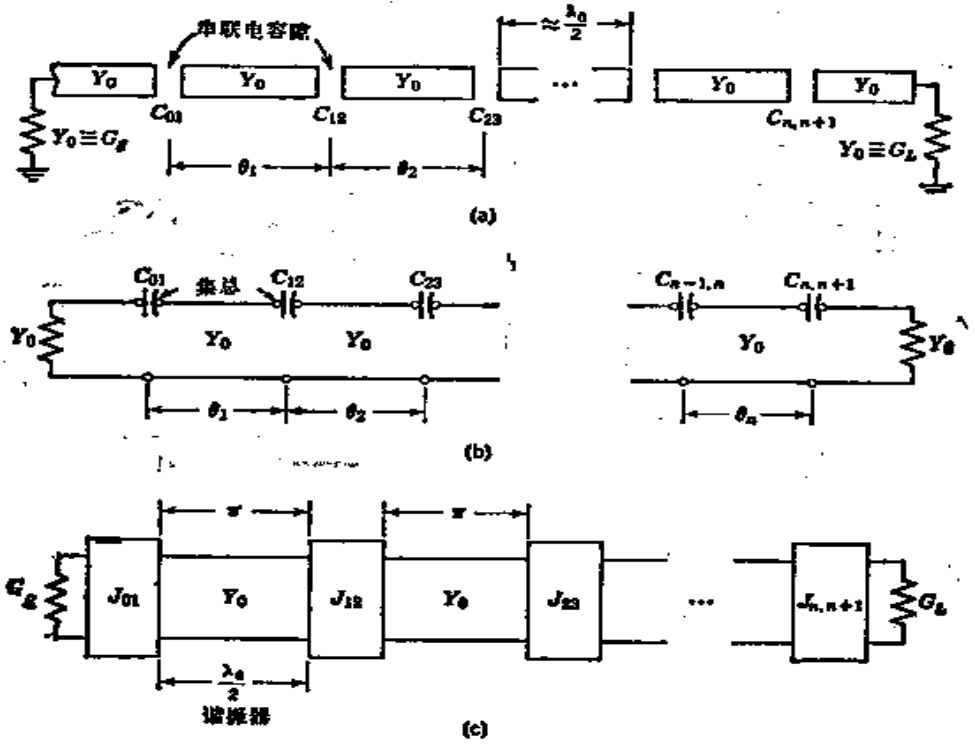


图 7-23 电容耦合的半波谐振滤波器：(a) 末端耦合半波滤波器的示意图(地平面被省却)，(b) 等效电路，(c) 具有变换器的等效电路

般形式。于是就可以写出实际电路和具有变换器的理想化电路的诸对应量之间的关系。由这些关系就能得到设计方程。

开始设计前的预备步骤是要注意在 $\theta=\pi$ 左右的单位元素具有近似于并联电纳一样的作用。按照表 7-2，一个单位元素当 $\theta\approx\pi$ 时的阻抗矩阵为

$$[Z]\approx\begin{bmatrix}\dfrac{Z_0}{j\tan\theta} & \dfrac{Z_0}{j\tan\theta}\\ \dfrac{Z_0}{j\tan\theta} & \dfrac{Z_0}{j\tan\theta}\end{bmatrix},$$

它相当于并联电纳 $B(\omega)$，其值为

$$B(\omega)=Y_0\cot\theta\approx Y_0(\theta-\pi).$$

$B(\omega)$的斜率参数为

$$\beta=\frac{\pi}{2}Y_0. \tag{7.25}$$

把足以达到图 7-22(c) 的变换器电路的负线路长度插入图 7-23(b)中的各耦合电容器 $C_{i,i+1}$ 的两边。需要的线路长度[如图 7-22(c)中所给出的]为

$$\phi_{i,i+1}=-\tan^{-1}\left[\frac{2B_{i,i+1}}{Y_0}\right],\quad i=0,1,\cdots,n \tag{7.26}$$

式中 $B_{i,i+1}/Y_0=\omega_0C_{i,i+1}/Y_0$ 为归一化耦合电纳，而 ω_0 为滤波器的中心频率。其次，调节线路长度 θ_i 以使变换器之间的净电长度为 π。因而，θ_i 必须满足

$$\theta_i=\pi+\frac{1}{2}[\phi_{i-1,i}+\phi_{i,i+1}],\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7.27}$$

把(7.26)代入(7.27)，给出

$$\theta_i=\pi-\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{2B_{i-1,i}}{Y_0}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2B_{i,i+1}}{Y_0}\right)\right],$$

$$i=1、2、\cdots、n. \qquad (7.28)$$

利用对线路电气长度的(7.28)式，图 7-23(b)的电路现在取为图 7-23(c)中所示的形式，由先前的讨论，它相当于图 7-11。现在所有剩下的问题就是应使图 7-23(c) 的变换器值与原型滤波器和标称结构分数带宽有关，由此就容易求解耦合电容 $C_{i,i+1}$。

图 7-21 中给出了需要达到规定原型滤波器响应的变换器值。以(7.25)式代入那些方程，给出：

$$J_{01}=\sqrt{\frac{G_g(\pi/2)Y_0w}{\omega_1' g_n g_{n+1}}}$$

$$J_{n,n+1}=\sqrt{\frac{G_L(\pi/2)Y_0w}{\omega_1' g_n g_{n+1}}}$$

$$J_{i,i+1}=\frac{Y_0(\pi/2)w}{\omega_1'}\sqrt{\frac{1}{g_i g_{i+1}}}. \qquad (7.29)$$

将这些代入图 7-22(c)中的方程，并求解耦合电纳，得出

$$B_{i,i+1}/Y_0=\frac{J_{i,i+1}/Y_0}{1-(J_{i,i+1}/Y_0)^2}, \quad 当\ i=0、1、\cdots、n. \qquad (7.30)$$

方程(7.29)、(7.30)和(7.28)就是所需要的设计方程。

归纳起来说，设计步骤为：

(1) 根据给定的一组滤波器指标要求，选择适当的低通原型和分数带宽。

(2) 分别由 (7.29) 和 (7.30) 来确定 $J_{i,i+1}/Y_0$ 和 $B_{i,i+1}/Y_0$，当 $i=0、1、\cdots、n$。

(3) 由(7.28)来确定 θ_i，当 $i=1、2、\cdots、n$。

利用电感耦合半波谐振器的对偶情况，在同轴线和波导中是有用的。这种几何图形象征性地表示于图 7-24 中。对应的设计方程和(7.29)、(7.30)与(7.28)是一样的，但要用阻抗

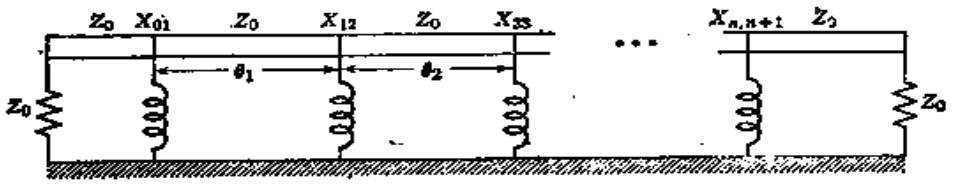


图 7-24 图 7-23 (a) 的对偶电路

变换器 $K_{i,i+1}/Z_0$ 代换导纳变换器 $J_{i,i+1}/Y_0$，并用电抗变换器 $X_{i,i+1}/Z_0$ 代换电纳变换器 $B_{i,i+1}/Y_0$。

马特伊(Matthaei)的近似设计法

马特伊提出的带通滤波器的近似设计法，是利用低通集总元件原型滤波器、变换器和影象参数法的结果[25、26]。对由很窄到大约 3:1 的带宽，这个方法给出满意的结果。注意图 7-18 中：在等效电路所有串联电路中的参数 L_i 和所有并联电路中的参数 C_i 都是任意的。如果把它们全都选择得相等，就容易把等效滤波器分划成对称节，如图 7-25 对并联 C 的情况所示。除末端节外，所有影象导纳均可由大家熟知的下列公式来计算

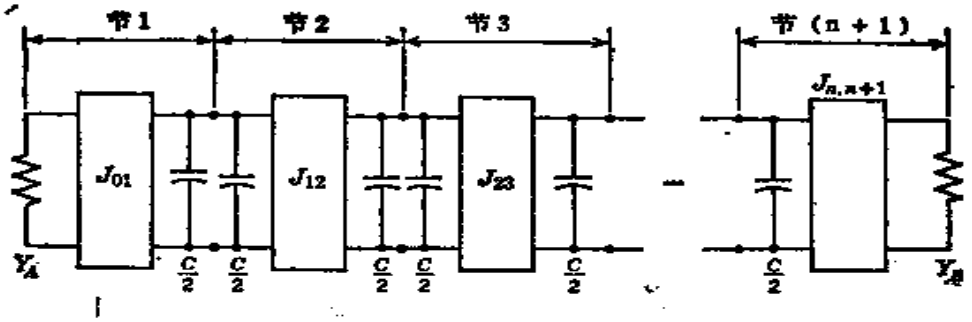
$$Y_I = \sqrt{y_{11}^2 - y_{12}^2},$$

给出

$$Y_I = \sqrt{J_{i-1,i}^2 - \left(\frac{\omega' C}{2}\right)^2} \qquad (7.31)$$

式中导纳变换器 $J_{i-1,i}$ 与原型滤波器的关系是图 7-18(b) 中的方程。

一种同样可以被分成链接的对称节的微波滤波器结构，是图 7-26 所示的半波平行耦合谐振回路。可以看出，它包括表



$$J_{01}=\sqrt{\frac{Y_A C}{g_0 g_1}} \qquad J_{n,n+1}=\sqrt{\frac{Y_B C}{g_n g_{n+1}}} \qquad J_{i,i+1}=\frac{C}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

图 7-25　图 7-18 (b)的对称分划的例子。

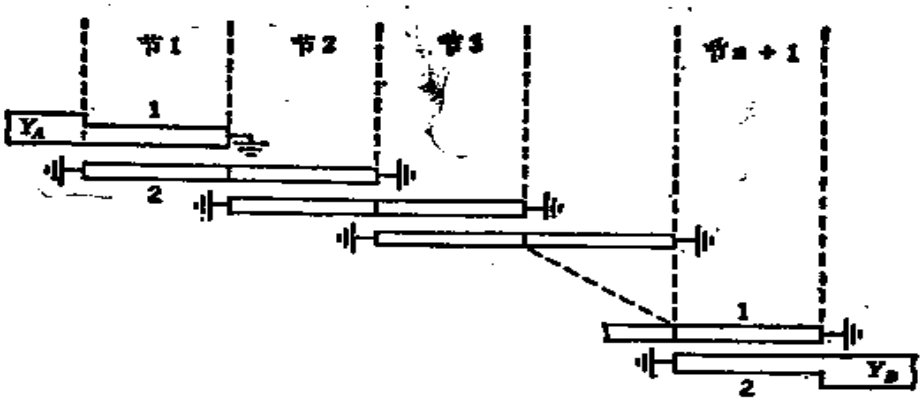


图 7-26　平行耦合谐振滤波器

7-4 中第二号 所给 型式 的 $n+1$ 个短路 耦 合线的链接对。 在马特伊设计法中，把 内部耦 合线 节做成对称的， 而末端耦合线节则做成非对称的，以便明显地把变量器纳入等效电路。对于末端节，表 7-4 中第 11 号的等效电路是恰当的。 因此， 平行耦合谐振滤波器的等效电路，就是图 7-27 中所示的*。在此

* 图 7-27 中已把各耦合节的 $-1:1$ 变量器消去，因为它们并不影响衰减响应。

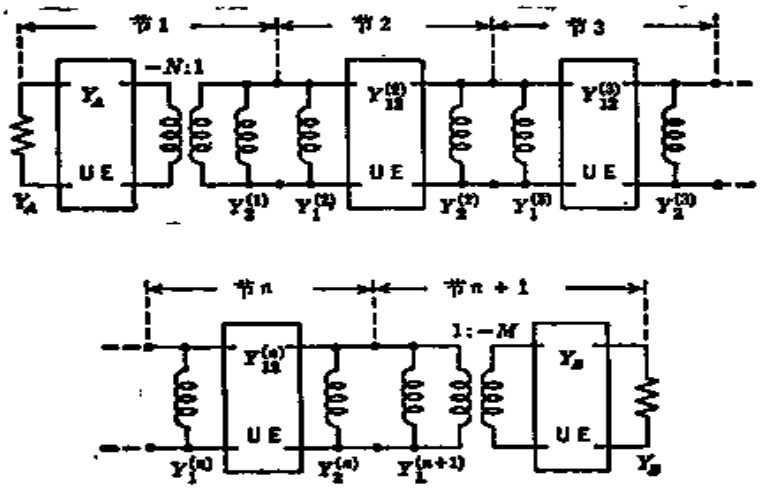


图 7-27　图 7-26 所示平行耦合谐振滤波器的等效电路

表示法中应注意每个末端节的单位元素已被安排得等于它们各自的终端导纳。

图 7-27 中第 i 个内部并联耦合节的影象阻抗为

$$Y_i=Y_{12}^{(i)}\sqrt{1-\left|2\frac{Y_1^{(i)}}{Y_{12}^{(i)}}+\left(\frac{Y_1^{(i)}}{Y_{12}^{(i)}}\right)^2\right|\cot^2\theta}\ . \qquad (7.32)$$

在这个设计法中，原型各内部节的影象导纳要等于对应的微波滤波器节的影象导纳。这对所有频率当然是不可能的，但因为有两个自由度，故可以使(7.31)和(7.32)在两点相等而且得到满足。为了要在整个通带范围内得到好性能，通常所选择的匹配点为：对应于 $\theta=90^\circ$ 的频带中心 $\omega'=0$，和对应于 $\theta=\theta_1$ 的频带边缘 $\omega'=-\omega_1'$*。使(7.31)和(7.32)在 $\omega'=0$ 和 $\theta=90^\circ$ 时相等，对于第 i 节，给出

---

* 关于另外一种方法，参看文献[27]。

$$Y_{12}^{(i)}=J_{i-1,i}. \tag{7.33}$$

使它们在 $\omega'=-\omega_1'$ 和 $\theta=\theta_1$ 时相等，给出

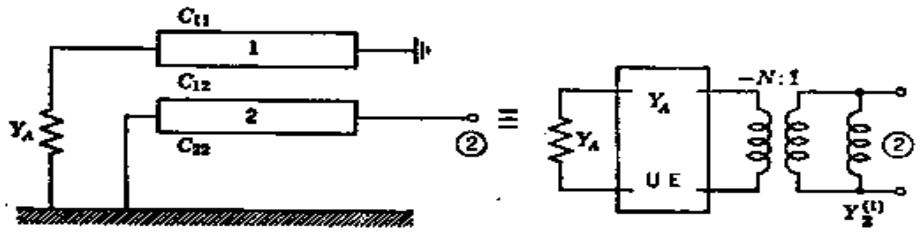
$$(Y_{12}^{(i)})^2\{1-[2x+x^2]\cot^2\theta_1\}=J_{i-1,i}^2-\left(\frac{\omega' C}{2}\right)^2, \tag{7.34}$$

式中 $x=Y_1^{(i)}/Y_{12}^{(i)}$。将(7.33)代入(7.34)，求解 $Y_1^{(i)}$，并化简，给出

$$Y_1^{(i)}=\omega_1' C\left\{\sqrt{\left(\frac{J_{i-1,i}}{\omega_1' C}\right)^2+\left(\frac{\tan\theta_1}{2}\right)^2}-\frac{J_{i-1,i}}{\omega_1' C}\right\}. \tag{7.35}$$

末端节方程的推导，不同于内部节方程的推导。我们仅仅考虑第 1 节，因为结果可直接应用到第 $n+1$ 节。构成第 1 节的耦合线电路的等效电路如图 7-28 所示。由端对 2 看的入端导纳为

$$Y=-jY_2^{(1)}\cot(\theta)+N^2Y_A. \tag{7.36}$$



$$Y_A=vC_{11}$$
$$Y_2^{(1)}=[vL_{22}]^{-1}$$
$$N=C_{12}/C_{11}$$

图 7-28　平行耦合谐振滤波器的末端节及其等效电路

在图 7.25 的电路中，由对应参考平面所看到的导纳为

$$Y'=j\frac{\omega' C}{2}+\frac{J_{01}^2}{Y_A}. \tag{7.37}$$

使(7.36)和(7.37)的实部相等，给出

$$N=\frac{J_{01}}{Y_A}. \tag{7.38}$$

(7.37)和(7.38)的虚部在$\omega'=0$、$\theta=90°$时是自动相等的。还可以要求它们在频带边缘相等。这给出

$$Y_2^{(1)}\cot\theta_1=\frac{\omega_1' C}{2},$$

或

$$Y_2^{(1)}=\omega_1' C\frac{\tan\theta_1}{2}. \tag{7.39}$$

把这些结果推广到第$n+1$节，给出

$$M=\frac{J_{n,n+1}}{Y_B}, \tag{7.40}$$

$$Y_1^{(n+1)}=\omega_1' C\frac{\tan\theta_1}{2}. \tag{7.41}$$

为了得到内部节的耦合线参数$vC_{11}^{(i)}$和$vC_{12}^{(i)}$，将(7.34)和(7.35)代入表7-4第2号中给出的综合方程。同样地，可以将(7.38)和(7.39)代入表7-4第11号中的综合方程，而得到第一节的耦合线参数$vC_{11}^{(1)}$、$vC_{12}^{(1)}$和$vC_{22}^{(1)}$。第$n+1$节的参数同样可以利用(7.40)和(7.41)来得到。结果概括于表7-5中。

表7-5中的无量纲比例因数h，应该选择得能获致滤波器内满意的阻抗水平，并使无负载谐振器的所有Q值最大化。不过，对h满意的选择、往往是使末端节之一对称。为了达到这点，(对电源侧)需要

$$vC_{11}^{(1)}=vC_{22}^{(1)}.$$

把上面的约束施加至表7-5中第1节的方程上，给出结果

$$h=\frac{1}{J_1^2+\tau}. \tag{7.42}$$

表 7-5　图 7-26 所示的半波平行耦合滤波器的设计方程*

定义：

$$w=\text{分数带宽}=\frac{2(f_2-f_1)}{f_2+f_1}$$

$$\theta_1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{w}{2}\right)$$

$h=\frac{\omega_1' C}{Y}$，无量纲的比例因数，用来得到滤波器内方便的导纳水平

$$\tau=\frac{\tan\theta_1}{2}$$

第 1 节	第 $n+1$ 节
$J_1=(\omega_1' g_0 g_1)^{-1/2}$	$J_{n+1}=(\omega_1' g_n g_{n+1})^{-1/2}$
$\frac{vC_{11}^{(1)}}{Y_A}=1$	$\frac{vC_{11}^{(n+1)}}{Y_B}=1$
$\frac{vC_{12}^{(1)}}{Y_A}=\sqrt{h}J_1$	$\frac{vC_{12}^{(n+1)}}{Y_B}=\sqrt{h}J_{n+1}$
$\frac{vC_{22}^{(1)}}{Y_A}=h(J_1^2+\tau)$	$\frac{vC_{22}^{(n+1)}}{Y_B}=h(J_{n+1}^2+\tau)$

第 i 节，$i=2,3,\cdots,n$

$$J_i=\frac{1}{\omega_1'\sqrt{g_{i-1}g_i}}$$

$\frac{vC_{11}^{(i)}}{Y_A}=h\sqrt{J_i^2+\tau^2}$	$\frac{vC_{12}^{(i)}}{Y_A}=hJ_i$

* n 个谐振器原型得出 $n+1$ 个耦合节。

在大部分滤波器应用方面，终端 Y_A 和 Y_B 是相等的，通常等于 0.02 姆。而且，对于切比雪夫和最平原型，$J_1=J_{n+1}$，因此(7.42)中所给定的 h 值同样使 $n+1$ 节对称。

有开路末端的对偶滤波器，表示于图 7-29。这种滤波器形式，十分适合于谐振器接地困难的印刷电路结构。设计方程和表 7-5 中的相同，只须以 L 代替 C，并分别以 Z_A 和 Z_B 代

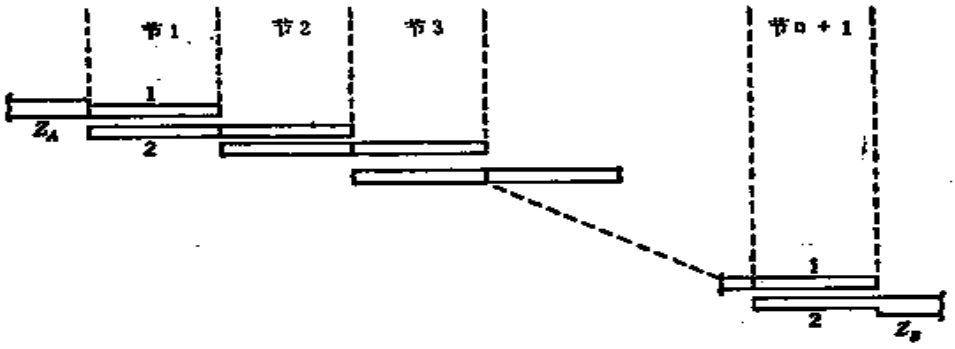


图 7-29　半波平行耦合谐振滤波器

替 Y_A 和 Y_B 即可。

前例中对滤波器的等效电路揭示：两个单位元素并无助于衰减响应，而 $n-1$ 个单位元素和实际上一个短截线，则确有助于衰减响应。因此，对应于第 k 阶原型的传输线转移函数的一般形式为

$$S_{21}(S)\triangleq\frac{S[\sqrt{1-S^2}\,]^{k-1}}{H_k(S)}\left[\frac{1-S}{1+S}\right],$$

式中 $H_k(S)$ 为 k 次的赫维茨多项式。因而，如果滤波器设计建立在切比雪夫或巴特沃思低通原型的基础上，并使(7.16)或(7.17) 中的 $m=1$ 和 $n=k-1$，就能得到衰减响应的很好的估计。此外，我们也可以由 (7.21) 和图 7-10 计算 m'，然后用卡瓦卡米 (Kawakami) 的计算图表来得到衰减。

前述设计法的一种变化形式可得出一类滤波器具有下列形式的传输特性：

$$S_{21}(S)=\frac{S^3[\sqrt{1-S^2}\,]^{n-3}}{H_n(S)},$$

可以看出，它在原点有 3 阶零点，并有 $n-3$ 个起作用的单位

元素。对易于实际实现和选择性两方面来说，这些滤波器更适用于宽带宽。详细情况在参考文献[25]和[26]中有所介绍。

7.5 摘　　要

理论上可以把 TEM 微波滤波器看作是由传输线的耦合和互连组成的，而沿着它传播的就是横电磁波。TEM 假设的结果是：个别的或多耦合的传输线可以由它们的静电容和电感矩阵来表征，而且线路的特性阻抗和传播速度都与频率无关。

如果组成给定网络的传输线的长度是可通约的，则理查兹变换的运用让许多集总元件滤波器理论的分析方法都得到了应用。把理查兹变换应用于一段长度的传输线，得出一种典型的网络元件叫做单位元素，它在集总元件理论中没有对应的伙伴。单位元素在 $S=\pm 1$ 有半阶传输零点。

单位元素自然地出现在许多耦合传输线网络的等效电路中，而且可以有助于滤波器的选择性。另外，也许还可有利地用来实际的隔开短截线，或与各种各样的变换一道来得到具有不同实际实现的等效滤波器。这里介绍了几种设计方法，有准确的，也有近似的，在获得实用的微波带通和带阻滤波器中利用了这些概念。

习　　题

7.1 试展开阻抗函数

$$Z=\frac{4S^4+6S^2+1}{4S^3+4S}$$

为电抗网络的第一类考乌尔形式。

7.2 对习题 1 的阻抗函数，首先提取出一个单位元素然后将余数展开为

第一类考乌尔形式。

7.3 对习题 1 的阻抗函数，用理查兹法将函数展开成一个全为单位元素的网络。

7.4 利用表 7-3 中第 1 和 2 号的库罗达 (Kuroda) 的等式，将习题 1 中的考乌尔网络变成习题 3 中所得到的全单位元素网络。

7.5 利用达林顿法，把阻抗网数

$$Z(S)=\frac{1+2S+2S^4}{1+2S+2S^2+2S^3}$$

综合成网络。

7.6 将习题 5 的阻抗函数展开成用单位元素隔开的三个并联电容器的形式。

7.7 对习题 6 的网络试利用

(1) 表 7-4 第 3 号

(2) 表 7-4 第 5 号

(3) 表 7-4 第 6 号

来确定耦合线实现。

7.8 用 C 矩阵的描述，来导出表 7-4 中第 2 号的等式。并用图形变换法，再导出同一电路。

7.9 用科恩 (Cohn) 法，对图 7-26 的滤波器导出设计方程。

参 考 文 献

[1] P. I. Richards, "Resistor-transmission-line circuits." *Proc. IRE*, **36**, 217-220 (Feb., 1948).

[2] P. I. Richards, "A special class of functions with positive real parts in half plane," *Duke Math. J.*, **14**, 777-788 (Sept., 1947).

[3] H. Ozaki and J. Ishii, "Synthesis of a class of strip-line filters," *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-5**, 104-109 (June, 1958).

[4] O. Brune, "Synthesis of a finite two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency," *J. Math. Phys.*, **10**, 191-236 (Oct., 1931).

[5] H. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, D. Van

Nostrand, Princeton, New Jersey, 1945.
[6] S. Darlington, "Synthesis of reactance four-poles which produce prescribed insertion loss characteristics," *J. Math. Phys.*, **13**, 257-353 (Sept., 1939).
[7] E. A. Guillemin, *Synthesis of Passive Networks*, John Wiley, New York 1957.
[8] D. C. Youla, "A new theory of cascade synthesis," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-9**, 244-260 (Sept., 1961).
[9] R. Levy, "A general equivalent circuit transformation for distributed networks," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-12**, 457-458 (Sept., 1965).
[10] H. Uchida, *Fundamentals of Coupled Lines and Multiwire Antennas*, Sasaki, Sendai, Japan, 1967.
[11] R. Sato and E. G. Cristal, "Simplified analysis of coupled transmission-line networks," *IEEE Trans. Microwave Theory and Technique*, MTT-18, 122-131 (March, 1970).
[12] R. Sato, "Two universal transformations for distributed commensurate transmission line networks," *Electronic Letters*, **6**, 173-174 (March, 1970).
[13] K. K. Pang, "A new transformation for microwave network synthesis," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-13**, 235-238 (June, 1966).
[14] M. C. Horton and R. J. Wenzel, "General theory and design of optimum quarter-wave TEM-Filters," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MTT-13, 316-327 (May, 1965).
[15] M. Kawakami, "Nomographs for Butterworth and Chebyshev filters," *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-10**, 288-291 (June, 1963).
[16] L. Weinberg, *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1962.
[17] R. Sato, *Transmission-Line Circuits*, Korona, Tokyo, Japan, 1963, Chap. 9.
[18] R. Levy, "Three-wire-line interdigital filters of Chebyshev and elliptic-function characteristic for broad bandwidths," *Electronic Letters*, **2**, 455-453 (Dec. 1966).
[19] M. C. Horton and R. J. Wenzel, "The digital elliptic filter—a compact sharpcutoff design for wide bandstop or bandpass requirements," *IEEE Trans. Microwave Theory Techniques*, **MTT-15**, 307-314 (May, 1967).
[20] J. D. Rhodes, "The stepped digital elliptic filter," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, **MTT-17**, 178-184 (April, 1969).
[21] B. M. Schiffman and G. L. Matthaei, "Exact design of microwave

band-stop filters," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MTT-12, 6-15 (Jan., 1964).

[22] E. G. Cristal, "Addendum to 'An exact method for synthesis of microwave bandstop filters,'" *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MTT-12, 369-382 (May, 1964),

[23] S. B. Cohn. "Direct-coupled-resonator filters," *Proc IRE*, 45,187-196 (Feb., 1957).

[24] S. B. Cohn, "Parallel-coupled transinission-line-resonator filters," *IRE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MTT-6, 223-231 (April, 1958).

[25] G. L. Matthaei, L. Young, and E. M. T. Jones, *Microwave Filters, Impedance Matching Networks, and Coupling Structures*, Mc Graw-Hill. New York. 1964.

[26] G. L. Matthaei, "Design of wide-band (and narrow-band) band-pass microwave filters on the insertion loss basis," *IEEE Trans. Microware Theory and Techniques*, MTT-8, 580-593 (Nov. 1960).

[27] E. G. Gristal. "New design equations for a class of microwave filters." *IEEE Trans Microwave Theory and Techniques*, MTT-19, 486-490 (May. 1971).

8 具有集总 RC 网络的有源滤波器

S. K. 米特纳(S. K. Mitra)
加利福尼亚大学
戴维斯，加利福尼亚州

在本书中，迄今已考虑的滤波器类型为无源滤波器。虽然这些滤波器确对许多应用提供良好的性能，但有时由于它们的成本、体积和其他原因，并不对系统设计者有吸引力。这时，有源网络就对滤波问题提供另一种解决办法。

有源滤波器基本上有四种类型：(1) 集总 R-C 元件的有源滤波器，(2) 分布 R-C 元件的有源滤波器，(3) 有源 N 通路滤波器和(4)数字滤波器。有源滤波器的第一种类型，即通常所谓**有源 RC 滤波器**，就是本章的讨论课题。剩下的三种类型，则在本书的后面几章讨论。

市面供应价格便宜的硅单片运算放大器近年来已大大影响到有源 RC 滤波器的设计和发展。采用这些放大器和薄膜或厚膜 R-C 元件的优质有源滤波器现在正进行着生产，从而具有混合集成电路制造的熟知的好处。有源滤波器的使用频率范围，主要决定于所选用的有源器件，就集成电路放大器设计技术的目前情形来说，范围大致为从直流到 1 MHz。在这个频率范围内，有源滤波器在通信系统、控制系统和仪表设备中的应

用，正在日益增多。本章的基本目的，打算概述利用高增益运算放大器作为有源器件的这种滤波器的几种设计方法。

8.1 预备知识

有源滤波器可以按直接形式或者按级联形式来设计 [1]。在直接形式中，把预定的转移函数直接实现为一个滤波器；而在级联形式中，则把它实现为较低阶节的级联。许多直接实现法已经有报导 [1]。在本章内将简短地叙述两种这样的设计方法，即，模拟电感法和频变负阻法。级联实现法，一般是利用有源二阶滤波器节和无源一阶滤波器节。有源双二阶节通常是以放大器为基础的实现。本章的大部分将致力于这第二种设计方法的探讨。

下面我们复习某些基本的定义和概念。

运算放大器

理想运算放大器是一个双端输入、单端输出的电压控制电压源，其输出电压是与输入电压之差成比例的。参照图 8-1 所示的模型，我们可把理想化器件定义为：

$$V_3=\mu(V_2-V_1)$$

$$\mu\to\infty$$

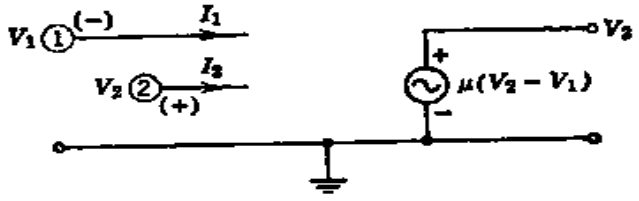


图 8-1 运算放大器的可控信号源模型

$$I_1 = I_2 = 0. \tag{8.1}$$

理想上开环增益 μ 与频率无关，也是与温度和输入端电压电平无关的。应该注意：输出电压总是与 1 端（反相输入端）的电压极性相反，而与 2 端（同相输入端）的电压极性相同。由定义可知，入端阻抗和共模阻抗为无限大，而出端阻抗则为零。理想化模型中隐含的附加条件，就是所谓"零偏移"条件：

$$V_3 \to 0 \quad \text{如果} (V_2 - V_1) \to 0. \tag{8.2}$$

理想运算放大器用符号表示如图 8-2 所示。

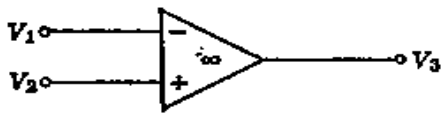


图 8-2 运算放大器的图形表示法

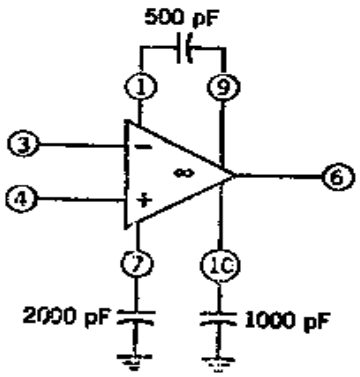


图 8-3 闭环增益为 1 的 μA 715 的补偿安排

实际的运算放大器无论如何是一个非理想器件，其开环增益随着频率的增大而从直流时的最高值单调地下降。它的入端阻抗和出端阻抗是有限的。作线性运行时，需要把输入和输出信号电平维持在一定的限度以内。此外，共模抑制误差和两个输入端的有限不相等共模阻抗，以及输入失调电压和电流，也是非理想性能的来源。实际上，把这些高增益放大器加以负反馈，可以提供满意的性能。

许多实际的运算放大器，具有每倍频程滚降 12 dB 以上的增益特性，因而加上反馈时会发生振荡[2]。因此，应该用外部补偿来保证稳定运行。图 8-3 举例说明仙童(Fairchild)公司

μA 715 的补偿安排。

运算放大器常常可以用来实现各种线性有源元件[2]。例如，图 8-4 表示同相式电压放大器（具有正增益的电压控制电压源）和反相式电压放大器(具有负增益的电压控制电压源)的实现。

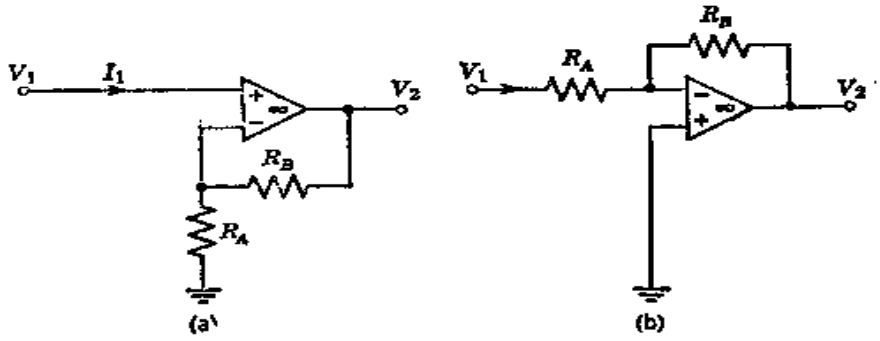


图 8-4 有限增益电压放大器的实现(a) 同相式和(b) 反相式

双二阶滤波器节

如前所述，设计高阶有源滤波器，通常用的是二阶和一阶滤波器节的级联，在级间有适当的隔离。一阶滤波器节可用无源 RC 网络来实现。因此，大部分的设计方法集中在实现形式为：

$$T(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\alpha_2 s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s^2+\beta_1 s+\beta_0} \qquad (8.3)$$

的二阶转移函数上，当然，这里系数 α_i 和 β_i 为实数，而且对于复极点，$\beta_1^2<4\beta_0$。把二阶滤波器节设计成具有极高的入端阻抗和非常低的出端阻抗，使进行级联时可无需附加隔离放大器。级联实现允许每一滤波器节单独地进行设计和调整，而且差不多总能获得比按直接形式设计对参数变化灵敏度较小的滤波器结构。

极点对 Q 和极点频率

为便于描述我们感兴趣的频率下的滤波器性能，可借助于以下两个系统参数：

$$Q=\frac{\sqrt{\beta_0}}{\beta_1} \tag{8.4}$$

$$\omega_n=\sqrt{\beta_0}\,. \tag{8.5}$$

由于极点对 Q 与极点频率 ω_n 和分母多项式的系数有直接关系，所以可以比较容易地用网络参数来表示它们。必须注意：对呈现谐振的滤波器节，上面所定义的 Q 和 ω_n，分别近似等于谐振特性的品质因数和谐振频率。

通常在比较各种各样有源滤波器节时所常用的标准是：可实现的 Q 值范围，以及 Q 和 ω_n 相对于描述滤波器节的有源和无源参数的灵敏度。本章中也将使用这些标准。

现在把我们的注意力转向到很有用的网络变换法。

RC:CR 变换

有源 RC 网络*的 RC:CR 变换[3]，就是将原来网络中的各电阻器 R_i 和各电容器 C_j，分别用值为 $\frac{1}{R_i}$ 法拉的电容器和值为 $\frac{1}{C_j}$ 欧姆的电阻器代换，而产生另一有源 RC 网络的过程。原来网络和导出网络的网络函数是有联系的。例如，如果原来网络由阻抗函数 $Z_A(s)$ 来表征，则导出网络的对应阻抗函数 $Z_B(s)$ 可给出为：

* 这里不言而喻地假定了：所考虑的有源 RC 网络仅由电压放大器和 R-C 元件组成。

$$Z_B(s)=\frac{1}{s}Z_A\left(\frac{1}{s}\right). \tag{8.6}$$

另一方面，如果原来网络用转移电压（电流）比 $t_A(s)$ 来描述，那么导出网络的对应网络函数就表示为：

$$t_B(s)=t_A\left(\frac{1}{s}\right). \tag{8.7}$$

图 8-5(a)和(b)的有源滤波器，由 RC:CR 变换联系着。对每个网络的分析分别导致：

$$t_A(s)=\frac{V_{2A}}{V_{1A}}=\frac{6}{s^2+2s+3} \tag{8.8}$$

$$t_B(s)=\frac{V_{2B}}{V_{1B}}=\frac{2s^2}{s^2+\frac{2}{3}s+\frac{1}{3}}. \tag{8.9}$$

可见上面的转移电压比确实满足关系(8.7)。

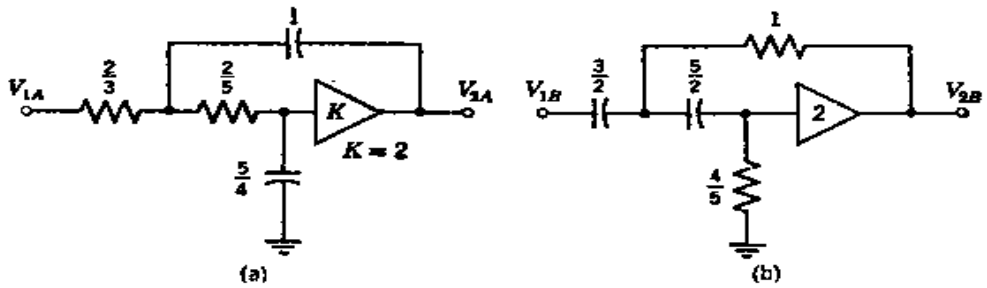


图 8-5 RC:CR 变换的说明：(a) 低通滤波器和(b) 高通滤波器。元件值单位用欧姆和法拉

必须在此指出：变换过程只涉及 R-C 元件，而不涉及放大器。此外，变换过程与通常所用的低通向高通的变换是相同的，而且可用以从低通有源滤波器构成高通有源滤波器，反过来也一样。

8.2 灵敏度

有源和无源网络参数，例如，放大器的电压增益、电阻值等等，都随着温度、老化以及许多其他外部和内部原因的改变而变化。这些参数变化，可以使有源滤波器呈现的特性与所要求的理想化性能有显著差别。

参数变化对网络特性影响的估计，用灵敏值给出。有各种各样的灵敏度类型，它们取决于所述网络的具体应用。因为本书在很大程度上涉及到选频滤波器的设计，所以这里先复习一下与我们的课题最相宜的那些定义。

Q 灵敏度和极点频率灵敏度

极点对 Q 对网络参数 x 的灵敏度定义为：

$$S_x^Q=\frac{d(\ln Q)}{d(\ln x)}=\frac{x}{Q}\frac{dQ}{dx}. \qquad (8.10\,a)$$

于是，S_x^Q 给出由于 x 的增量变化所引起的，Q 的增量变化。例如，如果 S_x^Q 等于 0.5，那么它意味着：x 变化 2% 将引起 Q 变化 1%。

极点频率 ω_n 的灵敏度，同样定义为：

$$S_x^{\omega_n}=\frac{x}{\omega_n}\frac{d\omega_n}{dx}. \qquad (8.10\,b)$$

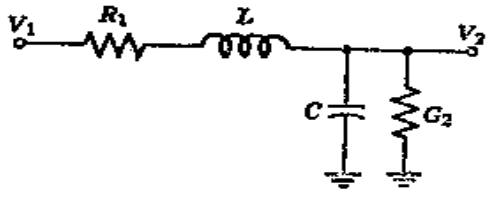


图 8-6 无源 RLC 低通滤波器

例 8-1 分析图 8-6 的低通无源滤波器[4]。

解：经过基本的计算可得

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\left(\frac{G_2}{C}+\frac{R_1}{L}\right)s+\left(\frac{R_1G_2+1}{LC}\right)} \qquad (8.11)$$

滤波器的极点对 Q 为

$$Q=\frac{\sqrt{LC(R_1G_2+1)}}{LG_2+R_1C}.$$

各种各样的 Q 灵敏度容易算出为：

$$S_L^Q=-S_C^Q=\frac{R_1C-LG_2}{2(LG_2+R_1C)}<\frac{1}{2}$$

$$|S_{R_1}^Q|=\frac{1}{2}\left|\frac{R_1G_2}{R_1G_2+1}-\frac{2R_1C}{LG_2+R_1C}\right|<1$$

$$|S_{G_2}^Q|=\frac{1}{2}\left|\frac{R_1G_2}{R_1G_2+1}-\frac{2LG_2}{LG_2+R_1C}\right|<1. \qquad (8.12)$$

极点频率 ω_n 为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{R_1G_2+1}{LC}}.$$

对应的灵敏度为

$$S_L^{\omega_n}=S_C^{\omega_n}=-\frac{1}{2}$$

$$S_{R1}^{\omega_n}=S_{G2}^{\omega_n}=\frac{R_1G_2}{2(R_1G_2+1)}<\frac{1}{2}. \qquad (8.13)$$

从(8.12)和(8.13)可以看出：不管实际元件值如何，Q 和 ω_n 的灵敏度两者都总是很小的。

根灵敏度

如果 $s=p_i$ 是多项式 $D(s)$ 的根，那么 $D(s)$ 对参数 x 的根灵敏度定义为：

$$\mathscr{S}_x^{p_i}=\frac{dp_i}{dx/x}. \tag{8.14}$$

根灵敏度一般为复数，而Q灵敏度则是实数。由定义容易得出

$$\mathscr{S}_x^{p_i*}=(\mathscr{S}_x^{p_i})^*. \tag{8.15}$$

如果把p_i写作$p_i=\sigma_i+j\omega_i$，那么我们可以表示为

$$\mathscr{S}_x^{p_i}=\mathscr{S}_x^{\sigma_i}+j\mathscr{S}_x^{\omega_i} \tag{8.16}$$

假定参数x是实数的。在(8.16)中，$\mathscr{S}_x^{\sigma_i}=d\sigma_i/d(\ln x)$而$\mathscr{S}_x^{\omega_n}=d\omega_i/d(\ln x)$。

用以计算根灵敏度的式子，是以极点多项式$D(s)$可写为：

$$D(s)=D_1(s)+xD_2(s) \tag{8.17}$$

为基础[5]的，式中$D_1(s)$和$D_2(s)$是与x无关的多项式。如果$s=p_i$是$D(s)$的单零点，那么可以证明[6]

$$\mathscr{S}_x^{p_i}=\left.\frac{(s-p_i)D_1(s)}{D(s)}\right|_{s=p_i} \tag{8.18 a}$$

$$=\left.\frac{-x(s-p_i)D_2(s)}{D(s)}\right|_{s=p_i}. \tag{8.18 b}$$

例 8.2 考虑图8-5(a)的网络。我们希望计算极点对放大器增益K(其标称值为2)的灵敏度。

解： 滤波器的转移电压比为

$$t_A(s)=\frac{3K}{s^2+\left(5-\frac{3}{2}K\right)s+3}.$$

对于参数标称值的极点多项式为

$$D(s)=(s^2+5s+3)-K\left(\frac{3}{2}s\right)=s^2+2s+3,$$

因此 $D_1(s)=(s^2+5s+3)$而 $D_2(s)=-\frac{3}{2}s$。极点是在 $p_1=-1+j\sqrt{2}$和 $p_1^*=-1-j\sqrt{2}$。利用(8.18 b)得到

$$\mathscr{S}_K^{p_1}=\frac{2(s+1-j\sqrt{2})\left(\frac{3}{2}s\right)}{s^2+2s+3}\Bigg|_{s=-1+j\sqrt{2}}=1.5+j\frac{1.5}{1.414}.$$

可以证明，$D(s,k)$在 $s=p_i$时的根轨迹切线角等于$\mathscr{S}_K^{p_i}$的幅度[6]。因此，为了获得较好的稳定系数，设计者的目的不仅在于把$|\varphi_K^{p_i}|$减到最小，而且应促使 $\arg\mathscr{S}_K^{p_i}$ 接近于±90°。

系数灵敏度

如果我们把多项式$D(s)$写为

$$D(s)=\sum_{i=0}^{n}\beta_i s^i, \tag{8.19}$$

那么系数 β_i 对网络参数 x 的灵敏度定义为

$$\hat{S}_x^{\beta_i}\triangleq\frac{d(\ln\beta_i)}{d(\ln x)}=\frac{x}{\beta_i}\frac{d\beta_i}{dx}. \tag{8.20}$$

不同于Q灵敏度和根灵敏度，系数灵敏度并不是实际上可测的(或有意义的)量。然而，如下面举例说明的，它常常可以用来计算别的灵敏度。

灵敏度之间的关系

由(8.3)，二阶滤波器的分母多项式为

$$D(s)=s^2+\beta_1 s+\beta_0, \tag{8.21}$$

这可以另改写为

$$D(s)=(s+\sigma_0+j\omega_0)(s+\sigma_0-j\omega_0)=s^2+2\sigma_0 s+(\sigma_0^2+\omega_0^2). \tag{8.22}$$

由(8.21)和(8.22)，容易得到[7]

$$\mathscr{S}_x^{\sigma_0}=\frac{\beta_1}{2}\hat{S}_x^{\beta_1} \tag{8.23}$$

$$\mathscr{S}_x^{\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{4\beta_0-\beta_1^2}}\left[\beta_0\hat{S}_x^{\beta_0}-\frac{\beta_1^2}{2}\hat{S}_x^{\beta_1}\right], \tag{8.24}$$

当然，这里 $p_0=\sigma_0+j\omega_0$。

同样地，可以由(8.4)和(8.3)导出以下关系：

$$S_x^Q=\frac{1}{2}\hat{S}_x^{\beta_0}-\hat{S}_x^{\beta_1} \tag{8.25}$$

$$S_x^{\omega_n}=\frac{1}{2}\hat{S}_x^{\beta_0}. \tag{8.26}$$

极点灵敏度和 S_x^Q 与 $S_x^{\omega_n}$ 之间的关系也是值得注意的。这些是

$$\mathscr{S}_x^{\sigma_0}=\frac{\omega_n}{2Q}(S_x^{\omega_n}-S_x^Q) \tag{8.27}$$

$$\mathscr{S}_x^{\omega_n}=\frac{\omega_n}{2Q}\left[\sqrt{4Q^2-1}\,S_x^{\omega_n}+\frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2-1}}\right]. \tag{8.28}$$

许多二阶有源 RC 滤波器，实质上是经零极点对消而简化的三阶系统。因此，我们希望为三阶滤波器导出一些能把 Q 灵敏度、极点灵敏度与易于计算的系数灵敏度联系起来的解析表达式。显然，这种滤波器的分母多项式可表示为如下形式之一：

$$D(s)=(s+\gamma)\left(s^2+\frac{\omega_n}{Q}s+\omega_n^2\right)=s^3+\beta_2s^2+\beta_1s+\beta_0$$

$$=(s+\gamma)(s^2+2\sigma_0s+\sigma_0^2+\omega_0^2) \tag{8.29}$$

式中 $s=-\sigma_0\pm j\omega_0$ 为复极点对。可以容易地证明，所要求的关系为：

$$S_x^{\omega_n}=\frac{(Q\gamma-\omega_n)\beta_0\hat{S}_x^{\beta_0}+Q\omega_n^2\beta_1\hat{S}_x^{\beta_1}-Q\omega_n^2\gamma\beta_2\hat{S}_x^{\beta_2}}{2\omega_n^2[Q(\omega_n^2+\gamma^2)-\omega_n\gamma]}$$

$$S_x^Q=[\beta_0(2\omega_nQ^2+\gamma Q-\omega_n)\hat{S}_x^{\beta_0}+\beta_1(\omega_n^2Q-2\omega_n\gamma Q^2)\hat{S}_x^{\beta_1}$$
$$+\beta_2\omega_n^2(Q\gamma-2\omega_nQ^2)\hat{S}_x^{\beta_2}]/2\omega_n^2[(\omega_n^2+\gamma^2)Q-\omega_n\gamma]$$

$$S_x^\gamma=\frac{Q\left[\frac{\beta_0}{\gamma}\hat{S}_x^{\beta_0}-\beta_1\hat{S}_x^{\beta_1}+\beta_2\gamma\hat{S}_x^{\beta_2}\right]}{(\omega_n^2+\gamma^2)Q-\omega_n\gamma}. \tag{8.30}$$

频率响应灵敏度

对带通滤波器来说，幅值特性的灵敏度与Q及ω_n灵敏度有直接联系。如前所述，对高Q值来说，极点对Q和极点频率ω_n，差不多等于谐振特性的品质因数Q_0和谐振频率ω_0。考虑二阶带通转移函数

$$T(s)=\frac{s}{s^2+\frac{\omega_n}{Q}s+\omega_n^2}. \tag{8.31}$$

于是幅值函数为

$$|T(j\omega)|^2=\frac{\omega^2}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega_n}{Q}\cdot\omega\right)^2}. \tag{8.32}$$

幅值的灵敏度定义为：

$$S_x^{|T(j\omega)|}=\frac{x}{|T(j\omega)|}\cdot\frac{d|T(j\omega)|}{dx}, \tag{8.33}$$

这显然是频率的函数。可以证明：在$\omega=\omega_n$时

$$S_x^{|T(j\omega)|}=S_x^Q-S_x^{\omega_n}, \tag{8.34}$$

而在3 dB截止频率时

$$\hat{S}_x^{|T(j\omega)|} \cong -Q \cdot S_x^{\omega_n} + \frac{1}{2}(S_x^Q - S_x^{\omega_n}). \qquad (8.35)$$

(8.34)和(8.35)式表示： S_x^Q 和 $S_x^{\omega_n}$ 两者在决定谐振附近频率响应的变化方面都是重要的。正如以后将要指出的那样，设计出这类灵敏度非常低的有源滤波器是可能的。但是如(8.35)所指出的， 幅值特性在 3 dB 点附近的偏离， 对于很高 Q 滤波器也许是相当显著的。

借助这些预备知识，下面我们考虑几个典型的有源 RC 滤波器的综合方法。以下两节叙述一些使用有限增益电压放大器作为有源元件的双二阶滤波器节。 8.5 和 8.6 节则概述较高阶转移函数的两种直接实现方法。

8.3 单环反馈法

单环反馈电路基本上是使用正反馈或者负反馈来实现复极点的单放大器结构。放大器输出端也被选定为滤波器的输出，因而提供低阻抗输出。用适当的阻抗定标可以使滤波器入端阻抗提高。因而不附加隔离放大器就可把这些滤波器节组成级联。为了方便起见，用这些滤波器节来实现二阶转移函数。(注意：一阶转移函数只用无源 RC 元件就可实现。)

这些滤波器结构用的是有限增益或者无限增益电压放大器，其中任何一个实际上都可用单片运算放大器来实现。同相式(正增益)电压放大器的实现示于图 8-4 (a) 中。分析这个电路可得

$$V_2 = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) V_1$$

$$I_1 = 0. \qquad (8.36)$$

只要放大器的开环增益适当大（10^4或许更大一些），运算放大器的有限入端和出端阻抗的影响就非常小。图 8-4 (b) 所示电路实现的反相式(负增益)电压放大器可由以下的输入输出关系来表征。

$$V_2=-\frac{R_B}{R_A}V_1$$

$$I_1=\frac{1}{R_A}V_1. \tag{8.37}$$

由以上可见，这个反相式电压放大器的入端阻抗主要是 R_A，因此使用这个负增益放大器的任何滤波器电路结构，都必须在放大器的输入端有一个电阻来容纳这个入端电阻。

现在我们为单环反馈式有源滤波器提出几种设计方法。为了方便起见，将把滤波器设计成具有归一化为 1 的极点频率 ω_n。任何别的值都可易于由适当的频率定标来得到。

低通和高通滤波器节

低通二阶滤波器节由下列形式的转移函数来表征：

$$t_v=\frac{H}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}. \tag{8.38}$$

这种滤波器型式的例子就是如图 8.7 所示的一种 [8]，它具有

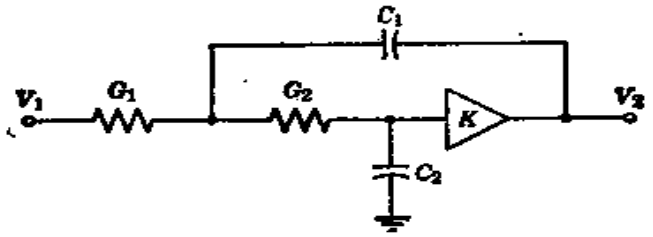


图 8-7　正反馈低通滤波器节

由下式给出的电压转移比：

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\dfrac{KG_1G_2}{C_1C_2}}{s^2+\left[\dfrac{(G_1+G_2)}{C_1}+\dfrac{(1-K)G_2}{C_2}\right]s+\dfrac{G_1G_2}{C_1C_2}}. \tag{8.39}$$

由(8.4)得出：这个滤波器的极点对 Q 为：

$$Q=\frac{\sqrt{C_1C_2\cdot G_1G_2}}{C_2(G_1+G_2)+(1-K)G_1G_2}. \tag{8.40}$$

对 $\omega_n=1$ 的设计方程，可从比较(8.39)与(8.38)而得到。因而

$$\frac{G_1+G_2}{C_1}+\frac{(1-K)G_2}{C_2}=\frac{1}{Q}$$

$$\frac{G_1G_2}{C_1C_2}=1. \tag{8.41}$$

注意未知量的数目为五，而方程的数目为二。因而没有唯一的解。求解(8.41)的一种方法是要预选某些元件值，然后求解剩余部分。这样的一种解是

$$G_1=G_2=C_1=C_2=1$$

$$K=3-\frac{1}{Q}. \tag{8.42}$$

为了计算灵敏度，我们来看

$$\beta_1=\frac{G_1+G_2}{C_1}+\frac{(1-K)G_2}{C_2}$$

$$\beta_0=\frac{G_1G_2}{C_1C_2} \tag{8.43}$$

首先考虑放大器增益 K 的影响。于是在标称值下 $\beta_1=3-K$ 和 $\beta_0=1$。因此

$$\hat{S}_K^{p^1}=\frac{-K}{3-K}=1-3Q$$

$$\hat{S}_K^{p^0}=0. \tag{8.44}$$

把上面的代入(8.23)、(8.24)和(8.25)，我们得到

$$\mathscr{S}_K^{\sigma^1}=-\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{Q}\right)$$

$$\mathscr{S}_K^{\omega^1}=\frac{3-\frac{1}{Q}}{2\sqrt{4Q^2-1}}$$

$$S_K^Q=3Q-1. \tag{8.45}$$

把 Q 值考虑为 10。那么 $\mathscr{S}_K^{\sigma^1}=-1.45$ 而 $\mathscr{S}_K^{\omega^1}=0.0725$。这表示：极点位置的移动主要是与实轴平行的。此外，$\mathscr{S}_K^{\sigma^0}$ 为负，表示：增益的增加将使极点更接近 $j\omega$ 轴，因而更接近于振荡。这种高灵敏度特征清楚地由电路的高 Q 灵敏度给以说明。其他的 Q 灵敏度同样可以导出如下：

$$S_{G_1}^Q=-S_{G_2}^Q=-Q+\frac{1}{2}$$

$$S_{C_1}^Q=-S_{C_2}^Q=2Q-\frac{1}{2}. \tag{8.46}$$

注意这些也是很高的。事实上，高 Q 灵敏度始终是所有单环正反馈有源滤波器的特征[4]。不过，这种滤波器要求非常低的增益值，因此它可以在很宽频带范围内应用。

单位增益放大器(电压跟随器)有很高的增益稳定性，使它们在滤波器设计方面具有吸引力。以元件值的分散作为代价，可以把单位增益放大器用在图 8.7 的低通滤波器中。如果在(8.39)中以 $K=1$，然后求解元件值，我们得到一种可能的解：

$$G_1=G_2=1$$

$$C_1=2Q, \qquad C_2=\frac{1}{2Q}. \tag{8.47}$$

这时的Q灵敏度是[9]：

$$S^Q_{G_1}=S^Q_{G_2}=0$$

$$S^Q_{C_1}=-S^Q_{C_2}=\frac{1}{2}$$

$$S^Q_\mu\cong\frac{2Q^2}{\mu},$$

式中μ为实现单位增益放大器的运算放大器的开环增益。无源参数灵敏度很低。只要$Q^2\ll\mu$，有源参数灵敏度也是低的。这就把这种结构的应用局限于低Q的滤波器实现。

现在考虑使用负反馈的低通滤波器。电路示于图8.8中[8、10]。分析导致：

$$\frac{V_2}{V_1}=\left\{\frac{-KG_1G_2}{C_1C_2}\right\}\Big/\left\{s^2+\left[\frac{G_1+G_2+G_3}{C_1}+\frac{G_2+G_4}{C_2}\right]s+\frac{G_2(G_1+G_3+KG_3)+G_4(G_1+G_2+G_3)}{C_1C_2}\right\}. \tag{8.48}$$

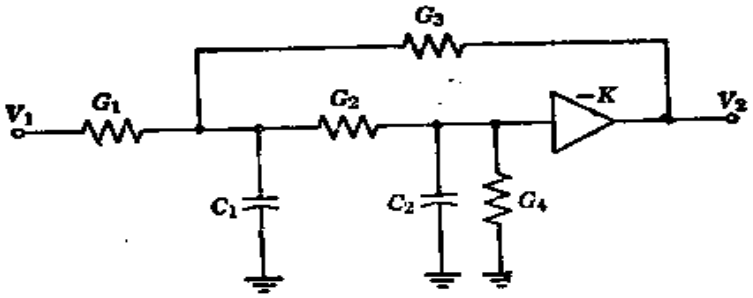


图 8-8　负反馈低通滤波器节

把上式与(8.38)相比较，我们就可得到所需要的一些设计方程。这些方程的一种解是：

$$G_1=G_2=G_3=G_4=1$$

$$C_1=C_2=5\,Q$$
$$K=25\,Q^2-5. \tag{8.49}$$

这个滤波器的极点对 Q 为

$$Q=\frac{\sqrt{C_1C_2[G_2(G_1+G_3+KG_3)+G_4(G_1+G_2+G_3)]}}{C_2(G_1+G_2+G_3)+C_1(G_2+G_4)}. \tag{8.50}$$

对应的 Q 灵敏值为：

$$S_K^Q=\frac{K}{2(5+K)}<\frac{1}{2}$$

$$S_{C_1}^Q=-S_{C_2}^Q=\frac{1}{10}$$

$$S_{G_1}^Q=\frac{-2K}{10(5+K)}\cong-\frac{1}{5}\qquad S_{G_2}^Q=\frac{K-5}{10(5+K)}\cong\frac{1}{10}$$

$$S_{G_3}^Q=\frac{3K}{10(5+K)}\cong\frac{3}{10}\quad S_{G_4}^Q=\frac{5-2K}{10(5+K)}\cong-\frac{1}{5}. \tag{8.51}$$

对这些结果的检查表明，滤波器有很低的 Q 灵敏度。然而，所需要的增益，甚至在中等 Q 值时也是很高的。因此，如果将图 8.4(b) 的电路用来实现反相式电压放大器，为了维持闭环增益，则运算放大器的开环增益应该比 $25\,Q^2-5$ 高得多。这意味着：这个滤波器将比先前哪个具有窄得多的带宽。应用这种电路结构去实现低于 100 Hz 的甚低频率下的 Q 值为 50 是可能的。应用负增益放大器的所有单环反馈有源滤波器都具有这些低灵敏度和高放大增益特征的[4]。

对低通滤波器节作 RC:CR 变换，就可实现高通滤波器。以下的例子说明这个方法。

例 8.3 我们来实现一个在通带中具有最平幅值特性的四阶高通滤波器。转移函数给定为：

$$t(s)=\frac{Hs^4}{(s^2+0.7653s+1)(s^2+1.8477s+1)}.$$

解：首先把对应的低通型式，

$$t'_s(s)=t\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{H}{(s^2+0.7653s+1)(s^2+1.8477s+1)}$$

实现为形如图 8.7 所示的两个二阶低通结构的级联。图 8-9(a)实现 $t_1(s)=H_1/(s^2+0.7653s+1)$，图 8-9(b)则实现 $t_2(s)=H_2/(s^2+1.8477s+1)$。注意在两个转移函数的实现中，已经

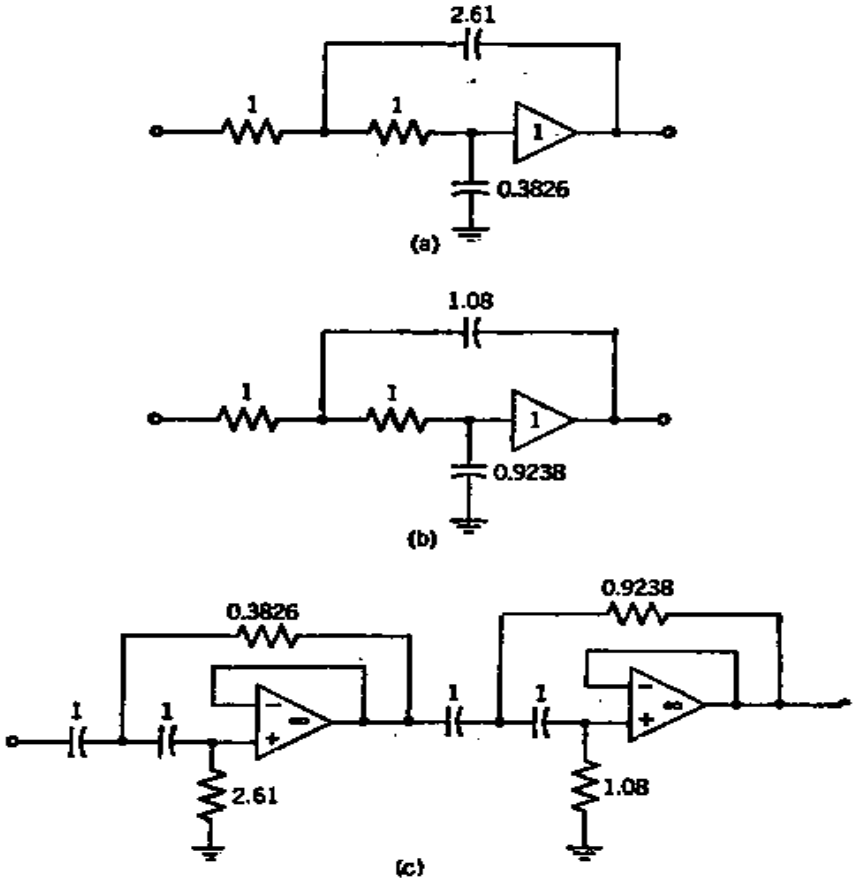


图 8-9　四阶高通巴特沃思滤波器的实现步骤。元件值单位用欧姆和法拉

利用了(8.47)所给出的设计方程。把这两个网络级联起来，并利用前述RC:CR 变换，就可实现图 8-9(c)所示的高通滤波器，图中的单位增益放大器是采用运算放大器来实现。

带通滤波器节

二阶带通滤波器用下列形式的转移函数来描述：

$$t(s)=\frac{H_s}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}. \tag{8.52}$$

这种类型的转移函数，也是既可由负反馈又可由正反馈结构来实现。前者的例子，就是图 8-10 所示的结构。其转移电压比为：

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{-KG_1s}{(1+K)C_1}}{s^2+\frac{(C_2G_1+C_1G_2+C_2G_2)}{(1+K)C_1C_2}s+\frac{G_1G_2}{(1+K)C_1C_2}} \tag{8.53}$$

如前所述，设计方程并不是唯一的。一组解[11]如下：

$$G_1=G_2=1$$

$$C_1=C_2=\frac{1}{3Q}$$

$$K=9Q^2-1. \tag{8.54}$$

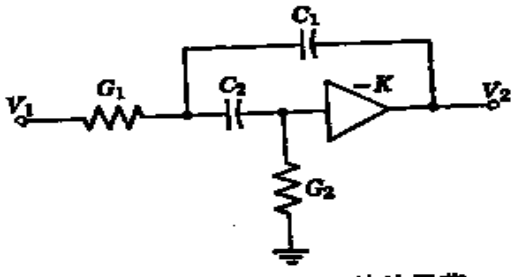


图 8-10　负反馈带通滤波器节

对应的Q灵敏度为

$$S_K^Q=\frac{K}{2(1+K)}<\frac{1}{2}$$

$$S_{G_1}^Q=S_{G_1}^Q=\frac{1}{6}$$

$$S_{C_1}^{Q}=-S_{G_2}^{Q}=\frac{1}{6}. \tag{8.55}$$

若允许扩展某些元件值的分散度，则可以稍微减小高增益值。这样的一种解[12]为

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{G_1}{G_2}=100$$

$$K\cong 4Q^2-1 \tag{8.56}$$

而结果的Q灵敏度为：

$$S_{C_1}^{Q}=-S_{C_2}^{Q}=S_{G_1}^{Q}=-S_{G_2}^{Q}\cong 0.0025. \tag{8.57}$$

灵敏度减小几乎是 1000 比 15！

使用正增益放大器的带通滤波器节[13]示于图 8-11 中。

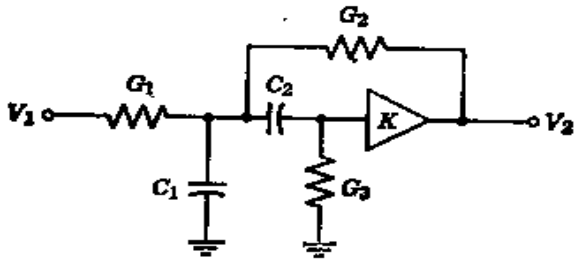


图 8-11　正反馈带通滤波器节

经分析可得

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{K\dfrac{G_1}{C_1}s}{s^2+\left[\dfrac{G_1+G_2+G_3-KG_2}{C_1}+\dfrac{G_3}{C_2}\right]s+\dfrac{G_3(G_1+G_2)}{C_1C_2}} \tag{8.58}$$

对$\omega_n=1$的一组解将是：

$$G_1=G_2=1,\quad G_3=\frac{1}{2}$$

$$C_1=C_2=1$$

$$K=3-\frac{1}{Q}. \tag{8.59}$$

相应的Q灵敏度为：

$$S_K^Q=3Q-1$$

$$S_{G_1}^Q=-S_{G_2}^Q=-\frac{Q}{2}+\frac{1}{2}$$

$$S_{G_1}^Q=-Q+\frac{1}{4},\quad S_{G_2}^Q=2Q-\frac{3}{4},\quad S_{G_3}^Q=-Q+\frac{1}{2}. \tag{8.60}$$

再一次看到，应用正反馈的单放大器结构具有很高灵敏度特征。

我们已注意到，迄今所讨论的负反馈式有源滤波器具有很低的灵敏值。但是，所要求的放大器增益却很高，这就把这种滤波器的运行限制在低频率之内。通过适当选择反馈路径的传输零点（所谓幻象零点）、稍许牺牲些灵敏度（增大一点）就有可能减小所要求的放大器增益。这样的一种网络示于图8-12[7]。这种结构是由克尔温(Kerwin)和谢弗(Shaffer)所提出的一种改正型网络[14]，可用来实现带通转移函数。经分析可得

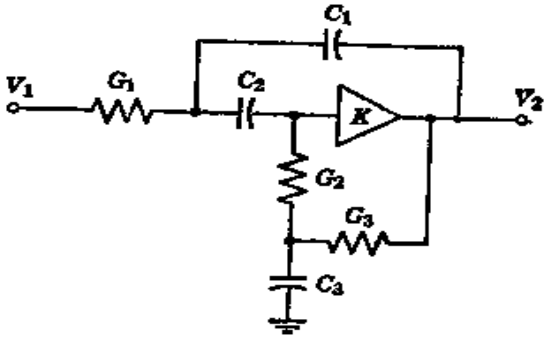


图 8-12　由零极点对消所获得的正反馈带通二阶节

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\dfrac{KG_1}{C_1C_3(1-K)}\cdot(C_3s+G_2+G_3)s}{s^3+\beta_2s^2+\beta_1s+\beta_0}, \tag{8.61}$$

其中 $$\beta_2=\frac{G_2+G_3}{C_3}+\frac{(C_1+C_2)G_2+C_2G_1}{C_1C_2(1-K)}$$

$$\beta_1=\frac{(C_1+C_2)G_2G_3(1-K)-C_2G_1(G_2+G_3)+C_3G_1G_2}{C_1C_2C_3(1-K)}$$

$$\beta_0=\frac{G_1G_2G_3}{C_1C_2C_3}. \tag{8.62}$$

一组设计方程为

$$\begin{aligned}C_1&=C_2=1\\G_2&=G_3=1\\G_1&=C_3=2\\K&=-(4Q-1).\end{aligned} \tag{8.63}$$

以此代入(8.61)和(8.62)，我们得到

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{-\frac{4Q-1}{2Q}s(s+1)}{s^3+\left(1+\frac{1}{Q}\right)s^2+\left(1+\frac{1}{Q}\right)s+1}$$

$$=\frac{-\frac{4Q-1}{2Q}s}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}. \tag{8.64}$$

由此得出 $\omega_n=\gamma=1$。也得出 $\beta_2=\beta_1=1+1/Q$ 和 $\beta_0=1$。这样就把表达灵敏度的(8.30)式简化为：

$$S_x^Q=\frac{(Q+1)(\hat{S}_x^{\beta_2}-\hat{S}_x^{\beta_1}-\hat{S}_x^{\beta_3})}{2}, \tag{8.65}$$

对于 $S_x^{\omega_n}$ 和 S_x^{γ} 也可同样简化。由上式和(8.62)，容易把各种各样的灵敏度算出为：

$$S_K^Q=1-\frac{1}{4Q}$$

$$S_{a_1}^{Q}=\frac{1}{4}(2Q-1),\quad S_{a_2}^{Q}=-\frac{1}{8}(2Q+1),S_{a_3}^{Q}=-\frac{1}{8}(2Q-3),$$

$$S_{a_1}^{Q}=-\frac{1}{8}(2Q-3),\quad S_{a_2}^{Q}=-\frac{1}{8}(2Q+1),S_{a_3}^{Q}=\frac{1}{4}(2Q-1)。$$

(8.66)

由(8.63)注意到：增益值现在是和Q而不是和Q^2成比例。但是，这些Q灵敏度与例如图8-10所示电路的那些值比较相对地高些(参看(8.55))。

具有 $j\omega$ 轴传输零点的滤波器节

另一很有用的二阶转移函数是具有一对 $j\omega$ 轴零点的转移函数：

$$t_v=\frac{H(s^2+a_0)}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}。\tag{8.67}$$

这里三种情况必须分别考查：(1) $a_0<1$，(2) $a_0>1$ 和(3) $a_0=1$。对情况 $a_0<1$ 提出的一种电路示于图8-13中[15]，它具有的电压转移比为：

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{K(s^2+a^2)}{s^2+2a(G+2-K)s+(1+2G)a^2}。\tag{8.68}$$

比较(8.68)和(8.67)，我们看出

$$\begin{aligned}a^2&=a_0\\2a(G+2-K)&=\frac{1}{Q}\\(1+2G)a^2&=1,\end{aligned}\tag{8.69}$$

由此我们得到一种设计方程为：

$$a=\sqrt{a_0}$$

$$G=\frac{1}{2\alpha_0}-\frac{1}{2}$$

$$K=2-\left[\frac{1}{2\alpha Q}-G\right]. \tag{8.70}$$

注意到极点对Q为

$$Q=\frac{\sqrt{1+2G}}{2(G+2-K)} \tag{8.71}$$

因而Q对K的灵敏度是

$$S_K^Q=\left(\frac{3\alpha_0+1}{2\alpha_0}\right)Q-1. \tag{8.72}$$

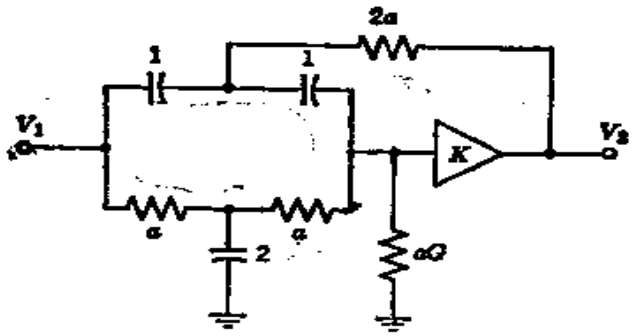


图 8-13　有 jω 轴传输零点的滤波器节元件值单位用欧姆和法拉

第二种情况，$\alpha_0>1$，通过 RC:CR 变换可与上述情况联系起来，因而将留下作为一个练习。现在我们来考虑最后一种情况，$\alpha_0=1$。将图 8-13 的电路稍加修改，就可获得适合于这种情况的滤波器结构，如图 8-14 所示[16]。这里只要$C_3=C_1+C_2$和$G_3=G_1+G_2$，我们就有

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{K(C_1C_2s^2+G_1G_2)}{C_1C_2s^2+[C_2(G_1+G_2)(1-K)+(C_1+C_2)G_2]s+G_1G_2} \tag{8.73}$$

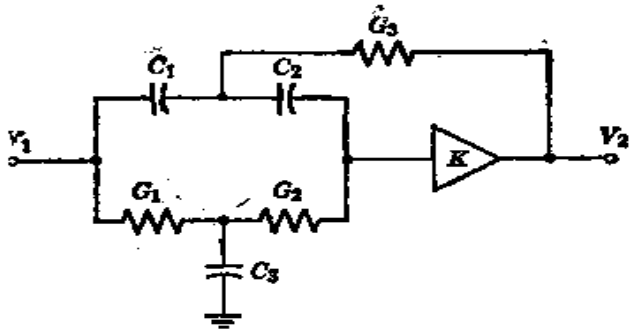


图 8-14　滤波器节具有 $j\omega$ 轴传输零点的另一实现

比较(8.73)与(8.67)，得到一组设计方程为

$$K=1$$

$$C_1=C_2=1,\quad C_3=2$$

$$G_1=2Q,\quad G_2=\frac{1}{2Q}$$

$$G_3=2Q+\frac{1}{2Q}. \tag{8.74}$$

Q 对 K 的灵敏度，可以由(8.73)容易地算出为：

$$S_K^Q=2Q^2+\frac{1}{2}. \tag{8.75}$$

虽然其灵敏度的数值很高，但因单位增益放大器具有很好的增益稳定性，因而很实用。

Q-不变滤波器节

设计一种其 Q 值对放大器增益的灵敏度为零[17]的具有负反馈或正反馈电路的、单放大器滤波器节是可能的。两种这样的滤波器结构示于图 8-15 中。

图 8-15(a)的电路使用负反馈，并实现带通转移函数。通过分析可以得出下式的电压转移比：

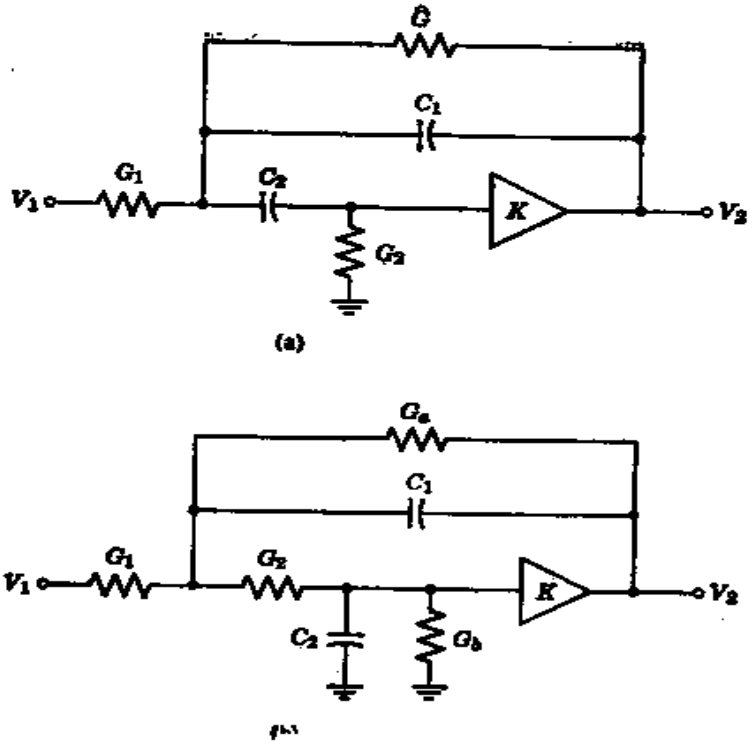


图 8-15　具有增益灵敏度乘积为零的滤波器节

$$\frac{V_2}{V_1}=KG_1C_2s/\{C_1C_2(1-K)s^2+[C_2(G_1+G+G_2-KG)+C_1G_2]s+(G_1+G)G_2\} \qquad (8.76)^*$$

比较(8.76)与(8.52)，并使同幂项的系数相等，就可以得到无源元件和放大器增益的数值。这些设计方程有许多组可能的解。我们感兴趣的是对 $\omega_n=1$ 的如下一组：

$$C_1=C_2=\frac{1}{6Q}$$

* (8-76)式原文分子中遗漏了K，分母中第二项遗漏了 S，现均已予补正——译者

$$G_1=\frac{36\,Q^2-4}{36\,Q^2-1},\quad G_2=1,\quad G=\frac{3}{36\,Q^2-1}$$

$$K=-(36\,Q^2-1).$$

对应的灵敏度为：

$$S_K^Q=0,\quad S_K^{\omega_n}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{36\,Q^2}\right)$$

$$S_{G_1}^Q=-S_{G_2}^Q=S_{G_3}^Q=\frac{1}{3}$$

$$S_G^Q=-\frac{1}{2},\quad S_{G_b}^Q=\frac{1}{6}$$

$$S_{G_1}^{\omega_n}=S_{G_2}^{\omega_n}=-S_{C_1}^{\omega_n}=-S_{C_2}^{\omega_n}=\frac{1}{2},\quad S_G^{\omega_n}=0.$$

Q 对放大器增益的灵敏度显现为零的正反馈低通滤波器节如图 8-15(b)所示。对以下一组元件值：

$$G_1=G_2=1\qquad C_1=C_2=\frac{1}{\sqrt{4\,Q^2-1}}$$

$$G_a=G_b=\frac{2\,Q}{\sqrt{4\,Q^2-1}}\qquad K=3+\frac{\sqrt{4\,Q^2-1}}{Q},\qquad (8.77)$$

滤波器的 Q 对 K 的灵敏度为零。在(8.77)中，假定了 ω_n 值为 1 。相应的灵敏度为

$$S_K^Q=0\quad S_K^{\omega_n}=-2\,\beta(3\,Q+\beta)$$

$$S_{G_1}^Q=S_{G_2}^Q=-S_{G_3}^Q=-S_{G_b}^Q=\frac{\beta^2}{2}$$

$$S_{C_1}^Q=-S_{C_2}^Q=\frac{\beta}{2}(4\,Q+\beta)$$

$$S_{G_1}^{\omega_n}=-\frac{\beta}{2}(2\,Q+\beta)-1$$

$$S_{G_2}^{\omega_n} = -S_{G_4}^{\omega_n} = -S_{G_5}^{\omega_n} = -\frac{\beta}{2}(2Q+\beta),$$

式中 $\beta = \sqrt{4Q^2-1}$。

在两种电路中，放大器增益都是有限的。因此这些电路也显示出增益灵敏度乘积为零。必须注意：图 8-15(a) 所示电路是一种负反馈实现，它是以高的放大器增益为代价、而使 Q 以及 ω_n 对所有参数的灵敏度都很低的。另一方面，图 8-15(b) 的电路只需要低增益放大器，但对其他参数的灵敏度都很高（与 Q^2 成比例），这是正反馈实现的一个特性。

具有增益灵敏度乘积为零的滤波器实现的一般方法，在参考文献[17]中概述。

8.4 多环反馈法

在多环有源滤波器中，一般使用两个或两个以上的放大器。象在单环反馈式有源滤波器情况下一样，这里也可由单片运算放大器来实现有限增益电压放大器。我们打算在本节中概述几种设计方法。

状态变量实现

最普通的多环反馈电路就是所谓的状态变量实现电路[18]，它实质上是一种对二阶转移函数的模拟计算机实现[19]。这样的一种实现示于图 8-16 中。由分析可得

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{G_3(G_1+G_4)}{G_1(G_2+G_3)}\left[\frac{\dfrac{G_5G_6}{C_1C_2}}{s^2+\dfrac{G_2G_5(G_1+G_4)}{G_1(G_2+G_3)C_1}s+\dfrac{G_4G_5G_6}{G_1C_1C_2}}\right]. \tag{8.78}$$

可以容易地导出设计方程。因为ω_n的归一化值等于1，我们可以建立

$$G_1=G_4=G_5=G_6=1$$

$$\frac{G_3}{G_2}=2Q-1$$

$$C_1=C_2=1. \tag{8.79}$$

对这组值来说，(8.78)可简化为：

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{2Q-1}{Q}\left[\frac{1}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}\right]. \tag{8.80}$$

因为$V_4=-(C_2/G_6)sV_2=-sV_2$和$V_3=-(C_1/G_5)sV_4=s^2V_2$，由此得出

$$\frac{V_3}{V_1}=\frac{2Q-1}{Q}\left[\frac{s^2}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}\right] \tag{8.81}$$

$$\frac{V_4}{V_1}=\frac{2Q-1}{Q}\left[\frac{-s}{s^2+\frac{1}{Q}s+1}\right]. \tag{8.82}$$

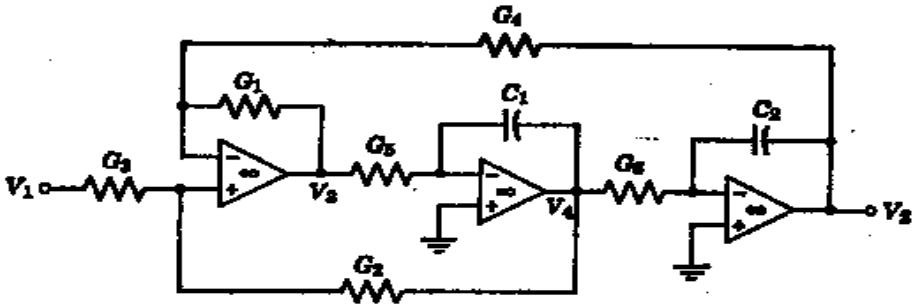


图 8-16 状态变量实现

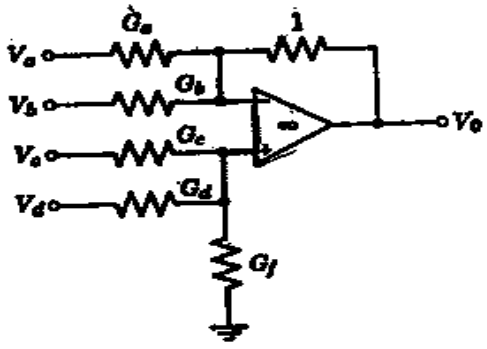


图 8-17 求和放大器

从而，图 8-16 的滤波器结构可同时实现带通、高通和低通转移函数，视输出端点的选择而定。具有任意传输零点的转移函数，用图 8-17 中所示的附加求和放大器，可以把三个电压 V_1、V_3 和 V_4 适当地汇总来实现。由(8.83)所给定的输入-输出关系，可以用来得到适当的分子：

$$V_0=\frac{G_a+G_b+1}{G_c+G_d+G_f}(G_cV_c+G_dV_d)-G_aV_a-G_bV_b. \tag{8.83}$$

极点频率 ω_n和极点对 Q 为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{G_4G_5G_6}{G_1C_1C_2}} \tag{8.84}$$

$$Q=\sqrt{\frac{G_1G_4G_5C_1}{G_5C_2}}\cdot\frac{G_2+G_3}{G_2(G_1+G_4)}. \tag{8.85}$$

上式提出了 ω_n和 Q 的设计后调节的一种方法。首先，ω_n (ω_n对高 Q 值大致就是谐振频率)由微调 G_1来调节。然后 Q 可由微调 G_2或者 G_3来调节。

这个结构的 Q 灵敏度为：

$$S_{G_1}^{Q}=-S_{G_3}^{Q}=\frac{1}{2}$$

$$S_{G_1}^{Q}=-S_{G_4}^{Q}=\frac{G_1-G_4}{2(G_1+G_4)}=0$$

$$S_{G_3}^{Q}=-S_{G_2}^{Q}=\frac{G_3}{G_2+G_3}=1-\frac{1}{2Q}$$

$$S_{G_4}^{Q}=-S_{G_5}^{Q}=\frac{1}{2}. \tag{8.86}$$

如果增益值大于极点对的Q，那么，Q对运算放大器增益的灵敏度也是低的。状态变量实现有许多不同形式[20、21]。非理想运算放大器在这类滤波器性能上的影响，已由托马斯(Thomas)考查过[22]。

Q-不变滤波器节

借助于两个电压放大器，就可以设计Q对无源参数的灵敏度为零的双二阶滤波器节。这样的一种电路示于图8-18中

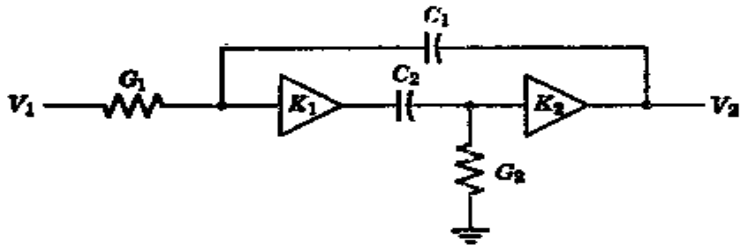


图 8-18 具有无源Q灵敏度为零的带通滤波器节

[23、24]。相应的电压转移比为：

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{K_1K_2G_1C_2s}{(1-K_1K_2)C_1C_2s^2+(C_2G_1+C_1G_2)s+G_1G_2}. \tag{8.87}$$

把上式与(8.52)相比较，对于$\omega_n=1$我们得到一组如下的设计值：

$$G_1=G_2=1$$

$$C_1=C_2=\frac{1}{2Q}$$

$$K_1K_2=-(4\,Q^2-1). \tag{8.88}$$

对应的灵敏度为：

$$S^{Q}_{K_1}=S^{Q}_{K_2}=\frac{-K_1K_2}{2(1-K_1K_2)}<\frac{1}{2}$$

$$S^{Q}_{G_1}=S^{Q}_{G_2}=S^{Q}_{C_1}=S^{Q}_{C_2}=0$$

$$S^{\omega_n}_{K_1}=S^{\omega_n}_{K_2}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4\,Q^2}\right)$$

$$S^{\omega_n}_{G_1}=S^{\omega_n}_{G_2}=-S^{\omega_n}_{C_1}=-S^{\omega_n}_{C_2}=-\frac{1}{2}.$$

注意无源 Q 灵敏度为零，而且所有其他灵敏度都很低。由(8.88)显然可见，放大器之一必须是同相式，而另一个则必须是反相式。如果用运算放大器来实现有限增益放大器，那么就使 K_1 成为正的，并用图 8-4(a) 的电路来实现。现在 K_2 是负的。如果把 G_2 当作是它的入端电导，那么就可以把组合电路实现为如图 8-4(b)所示的形式。

具有相似灵敏度特性的一般双二阶有源滤波器节，可在参考文献[25]中查到。关于 Q 对无源参数的灵敏度为零的其他滤波器节也已经有过报导[26、27]。

8.5 模拟电感法

在模拟电感法中，首先设计传统的 RLC 滤波器，然后用模拟电感的有源 RC 电路去代换原来设计中的各个电感器。这样的方法，基本上有两个优点。第一，端接以电阻的 LC 滤波器的理论与设计已完善地建立，而且对这种滤波器的设计，现在已有大量表格可资利用。第二，正如我们将要指出的那样，最常用的双端接载的 LC 滤波器结构，本来就有非常低的参数

灵敏度，使得它们很适合于供设计有严格要求的滤波器，例如截止特性很陡的电话分路滤波器之用。

我们早就用简单的例子表明了RLC谐振器的低灵敏度特征。为了要对一般的双端接载的LC滤波器来证明这种特性，试考察如图8-19所示的这样一种滤波器。如果终端接载的滤波器在某频率 $s=j\omega$ 下的入端阻抗是 $Z_{11}(j\omega)=R_{11}+jX_{11}$，那么进入滤波器的功率 P_{in} 为

$$P_{in}=\frac{V_1^2R_{11}}{(R_s+R_{11})^2+X_{11}^2} \tag{8.89}$$

这也和发送到负载电阻 R_L 的功率 P_L 相等，因为滤波器网络是无耗的。现在让我们来计算由于分量 x 的增量变化而引起的 P_L 的增量变化。现在

$$\frac{\partial P_L}{\partial x}=\frac{\partial P_L}{\partial R_{11}}\cdot\frac{\partial R_{11}}{\partial x}+\frac{\partial P_L}{\partial X_{11}}\cdot\frac{\partial X_{11}}{\partial x}.$$

由(8.89)，容易算得

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_{11}}=\frac{R_s^2-R_{11}^2+X_{11}^2}{\{(R_{11}+R_s)^2+X_{11}^2\}^2}\cdot V_1^2$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_{11}}=-\frac{2R_{11}X_{11}}{\{(R_{11}+R_s)^2+X_{11}^2\}^2}\cdot V_1^2.$$

一般把这类滤波器设计成在通带中最小衰减的频率下具有最大的功率传输。这意味着在这些频率下：

$$R_{11}=R_s$$

$$X_{11}=0,$$

从而在通带中：

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_{11}}=0,\quad \frac{\partial P_L}{\partial X_{11}}=0.$$

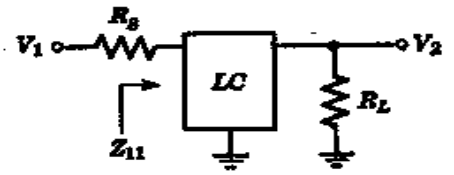


图 8-19 双端接载的LC滤波器

结果使对任何分量的灵敏度 $S_x^{P_L}$ 都为零。同样的推理表明，为了使通带中灵敏度为零，还必须把滤波器的出端阻抗对负载电

阻匹配。

有许多可以获得模拟电感的方法。其中一些将在下面讨论。

端接有电容器的有源回转器

理想的有源回转器，由以下的短路导纳参数来定义，

$$y_{11}=0 \quad y_{12}=g_a$$
$$y_{21}=-g_b \quad y_{22}=0. \tag{8.90}$$

在端对 2 用电容器 C 终接的时候，回转器的入端导纳为

$$Y_{in}=y_{11}-\frac{y_{12}y_{21}}{y_{22}+sC}=\frac{g_ag_b}{sC}, \tag{8.91}$$

这是电感器的导纳。实际回转器无论如何总是非理想的器件。一个非理想性的来源就是，由于非零的 y_{11}和 y_{22}。其影响是使模拟电感器形同有耗电感器一样[29]，具有等效电感值 L_{eq}

$$L_{eq}\cong\frac{Cg_ag_b}{(y_{11}y_{22}+g_ag_b)^2+\omega^2y_{11}^2C^2} \tag{8.92}$$

和品质因数值，

$$Q=\frac{\omega Cg_ag_b}{y_{11}y_{22}^2+g_ag_by_{22}+\omega^2y_{11}C^2}. \tag{8.93}$$

因此，要增加模拟电感器的 Q，就必须把有源回转器设计成具有很小的 y_{11}和 y_{22}。另一非理想性的来源是，由于在有源器件中的电荷储存引起相移。其效果是使 y_{12}和 y_{21}成为复数，而不完全是实数量。如果我们写作 $y_{12}=g_ae^{-j\phi_a}$和 $y_{21}=-g_be^{-j\phi_b}$，然后令 $\phi=\phi_a+\phi_b$，则端接有电容器的非理想回转器的入端阻抗为

$$j\frac{\omega C}{g_ag_b}\cdot e^{j\phi}\cong-\frac{\omega C\phi}{g_ag_b}+j\frac{\omega C}{g_ag_b},$$

式中已利用了 $e^{j\phi}\cong1+j\phi$ 关系。由此可见，负相角在回转

导纳中的效应是产生一与电感器相串联的负电阻[29]。可以适当调节这个负电阻，去对消由非零的 y_{11}和 y_{22}所产生的正值串联电阻，来设计具有很高 Q 值的模拟电感[29、30]。

有源回转器的实现，最好是把两个具有相反跨导的电压控制电流源并联连接起来，并且把一个控制源的输入端对连接到另一个控制源的输出端对上(图 8-20)来完成。要使 y_{11}和 y_{22}很小，每一个电压控制电流源都应具有很高的入端和出端阻抗。以这种方法为基础的硅单片回转器电路已经有过报导[30—32]。

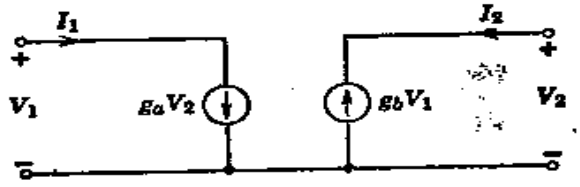


图 8-20　有源回转器的可控源表示法

适合于单片结构的其他各种回转器电路设计已经有过报导，但他们的讨论超出了本章的范围。有关回转器电路的卓越讨论，可在参考文献[29]中查到。

端接有电阻器的广义阻抗变换器

模拟电感器的另一种方法，就是借助于广义阻抗变换器(GIC)，它的特性可用以下的 h 参数来表征：

$$h_{11}=0 \qquad h_{12}=a(s)$$

$$h_{21}=-b(s) \qquad h_{22}=0 \tag{8.94}$$

在端对 2 用电阻 R_L 终接的时候，在端对 1 看进去的入端阻抗为：

$$Z_{11}=h_{11}-\frac{h_{12}h_{21}}{h_{22}+\dfrac{1}{R_L}}=a(s)\cdot b(s)\cdot R_L. \qquad (8.95)$$

因而很明显，如果乘积 $a(s)\cdot b(s)$ 与 s 成比例，那么端接有电阻器的 GIC 就模拟一电感器。这样的一种 GIC 实现示于图 8-21[33]。对于这个器件来说有，$h_{12}=1$ 和 $h_{21}=-sC_3G_1/G_2G_4$。这意味着在端对 2 用电阻 R_L 终接的时候，端对 1 的入端阻抗等于 $sC_3G_1R_L/G_2G_4$，即单端对表现为 $C_3G_1R_L/G_2G_4$ 亨（亨利）的电感！这个基本电路有几种变型。不过，对电感模拟来说，图 8-21 的 GIC 被认为是最好的电路，这就是改进型的里奥登（Riordan）电路[34]。

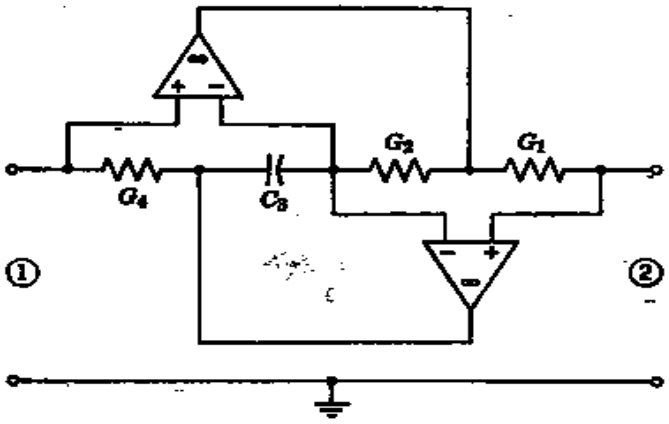


图 8-21　适合于电感模拟的广义阻抗变换器

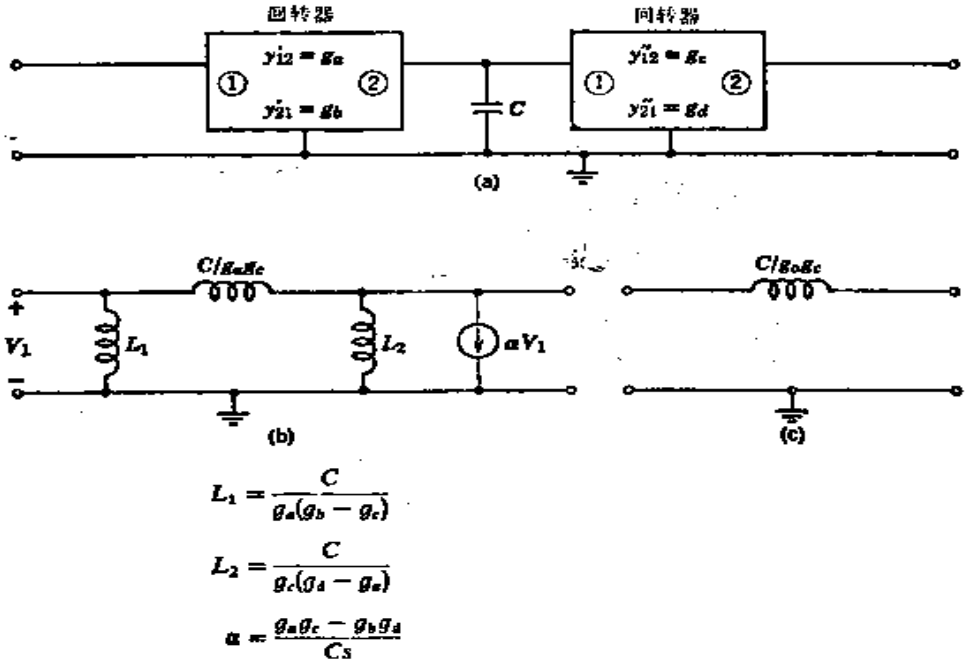
利用这个电路，就可能在低频率下模拟具有最大 Q 值超过 1000 的电感器，只要电容器 C_3 具有很高质量。这个电容器的质量，偶然才是在很低频率下影响模拟电感器 Q 值的重要因素。

不接地的电感器模拟

前面叙述的一些方法，导致具有接地端子的模拟电感器。可是，在滤波器设计中，例如在低通滤波器和某些带通滤波器结构中，往往需要不接地的电感器。解决这个问题的一种简单办法，是把两个回转器级联起来，并在公共端对上跨接一个电容器[35]，如图 8-22（a）所示的那样。这个装置的等效电路示于图 8-22(b)，它可简化为一个不接地的电感器（图 8-22(c)），只要

$$g_a = g_d \quad g_b = g_c . \tag{8.96}$$

于是，为了完满的模拟，两个回转器必须相同。任何失配都会



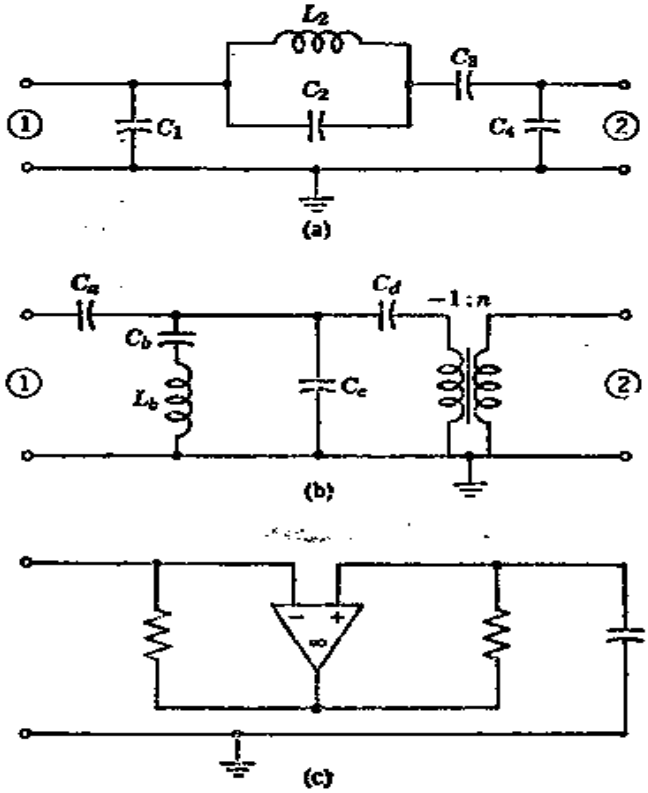
$$L_1 = \frac{C}{g_a(g_b - g_c)}$$

$$L_2 = \frac{C}{g_c(g_d - g_a)}$$

$$\alpha = \frac{g_ag_c - g_bg_d}{Cs}$$

图 8-22　不接地电感器的模拟

导致图 8-22（b）所示的网络，在锐截止滤波器（象电话分路滤波器）的情况下，它具有不希望的影响 [36]。但在简单滤波器情况下，这种失配的影响也许并不严重。



$$C_a = C_1$$

$$C_b = C_1^2/C_2$$

$$C_c = -\left[C_1 + \frac{C_1^2}{C_2} + \frac{C_1^3}{C_2} + \frac{C_1^2}{C_4}\right]$$

$$C_d = C_1^2/C_4$$

$$n = C_1/C_4$$

$$L_b = L_2 C_2^2/C_1^2$$

图 8-23　对不接地电感器实现问题的另一种解决办法

实现不接地电感器的另一种更实际的解决办法是为每个回转器提供专用的不接地电源[36]，或者利用半不接地的回转器[37]。

对不接地电感器问题，新近提出了另外两种解决办法[38]。在某些型式的带通滤波器中，人们会碰到与附加电容元件一道的不接地电感器如图 8-23 (a) 所示。这个二端对的等效电路如图 8-23 (b)，它使用了接地的电感器和接地的负电容器。用图 8-23 (c) 的电路容易实现负电容器。注意图 8-23 (b) 所示等效电路中的理想变量器，在把所有元件都折算到变量器的右方以后可被消去了。

在许多滤波器实现中，不接地电感器也以横跨在两个接地的电感器之间的 π 形电路的形式出现。这种 π 形网络可以把图 8-21 的电路按背对背方式连接起来而有效地实现 [38]。上述这两种方法都已成功地在电话分路滤波器的设计中实现了。

8.6 频变负阻法

频变负阻（简称 FDNR）为单端对网络，其阻抗 $Z(s)$ 为以下形式之一：

$$Z(s)=K/s^2 \tag{8.97}$$

$$Z(s)=Ks^2 \tag{8.98}$$

式中 K 是常数。于是对 $s=j\omega$ 来说，$Z(j\omega)$ 为负电阻，具有随频率而变化的阻值。

为了说明这种装置的有用性[39]，考虑图 8-6 的双端接载的 LC 低通滤波器。注意这个滤波器的实现，需要利用不接地的电感器。让我们通过每个阻抗都除以 s 的办法对这个网络应用随频率变化的阻抗定标。这意味着为了获得已变换的网

络，我们把每个电阻器 R_i 都代换以 $1/R_i$ 法的电容器，把每个电感器 L_i 都代换以其值为 L_i 欧的电阻器，并把每个电容器 C_i 都代换以具有阻抗 $Z_i(s)=1/C_is^2$ 的 FDNR。结果所得网络示于图 8-24 中。注意图 8-24 所示网络的电压转移比和图 8-6 的相同，并由 (8-11) 给出。

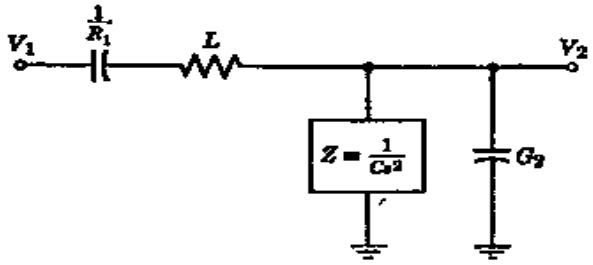


图 8-24　利用频变负阻实现的低通滤波器节

FDNR 的实现，可以用广义阻抗变换器来完成。例如，在图 8-21 的电路中，如果我们用电容器 C_1 替换电阻器 G_1，并用电阻器 R_L 终接到端对 2，那么在端对 1 看进去的入端阻抗就是 $(C_1C_3R_L/G_2G_4)s^2$。另一方面，如果端对 1 用电阻器 R_L 终接，则在端对 2 看进去的入端阻抗就是 $G_2G_4R_L/C_1C_3s^2$。各种广义阻抗变换器的大量分析可在参考文献[40]中查到。

8.7 摘　　要

采用运算放大器作为有源元件的几种典型的有源 RC 滤波器设计法已在本章中作了概述。第 8.3 和 8.4 节讨论了 RC 放大器式滤波器结构的设计。为了方便和灵敏度的原因，把这种有源滤波器设计成二阶滤波器节的级联。这里所讨论的最有用的这样一类二阶节，就是低通、高通、带通节和具有 $j\omega$ 轴零点的那些节。有关这类滤波器的杰出而广泛的讨论，可在参

考文献[41]中查到。

设计无电感滤波器的两种很简单而直接的方法，就是模拟电感法（8.5 节）和频变负阻法（8.6 节）。这些方法都是先将给定的转移函数实现为两端接有负载的 LC 滤波器。然后，在模拟电感法中，是把电路中的各个电感器都代换以模拟电感的有源 RC 单端对，而在第二种方法中，则是用随频率变化的阻抗定标把 RLC 滤波器电路变换成由电阻器、电容器和频变负阻组成的网络。

由于篇幅有限，本章仅以几种典型的设计方法为蓝本。关于更完全的讨论，我们建议读者去参考几本有关本课题的专著[1、2、42—44]。

致谢

感谢 S. C. 达塔·罗伊(S. C. Dutta Roy) 教授和 B. A. 香塔·裴 (B. A. Shanta Pai) 小姐的建设性批评意见。

习　题

8.1　对以下各个带通转移函数，

(a) $\frac{3s}{2s^2+s+6}$

(b) $\frac{s}{s^2+s+10}$

(c) $\frac{s}{s^2+3s+2}$

试决定极点对 Q 和极点频率 ω_o。把这些数字与实际频率响应的 Q 和实际谐振频率相比较。

8.2　试确定作为图 8.7、8.8、8.10、8.11、8.12、8.13 和 8.14 所示网络的 RC:CR 变换的诸有源滤波器电路结构。

8.3 试分析图 8.5 的有源滤波器，并计算各个电路的极点和Q灵敏度。

8.4 多项式 $(s^2+2s+10)$ 的一些可能的分解给出如下：

(a) $(s+1)^2+9K$

(b) $(s+\sqrt{10})^2-4.3246Ks$

(c) $(s^2+s+8)+K(s+2)$，

式中参数K的标称值为 1。试对各种分解计算对K的根灵敏度，并比较它们的值。

8.5 试确定 (8.11) 的分母多项式对 R_1、G_2、L 和C的系数灵敏度。并利用这些结果和 (8.25)，计算Q灵敏度。再以 (8.12) 所给出的那些灵敏度去校核你们的答案。

8.6 试导出 (8.25) 和 (8.26)。

8.7 试导出 (8.27) 和 (8.28)。

8.8 试导出 (8.30) 的灵敏度表达式。

8.9 把放大器的增益调节为二 ($K=2$)，试求解 (8.36) 的元件值。

8.10 试证明由 (8.45) 给出的诸灵敏度表达式。

8.11 试导出 (8.46) 的Q灵敏度。

8.12 试用单放大器结构实现以下的转移函数：

(a) $\dfrac{H}{s^2+\sqrt{2}s+1}$ (b) $\dfrac{H}{s^3+2s^2+2s+1}$

(c) $\dfrac{H}{s^2+3s+3}$ (d) $\dfrac{Hs^2}{s^2+\sqrt{2}s+1}$

(e) $\dfrac{Hs}{s^3+2s^2+2s+1}$ (f) $\dfrac{Hs^2}{s^3+2s^2+2s+1}$.

8.13 试证明 (8.51)、(8.55) 和 (8.57) 的表达式。

8.14 试计算图 8.12 所示滤波器的 ω_n 灵敏度和 γ 灵敏度。

8.15 试按每极点对用一单放大器结构的方式实现以下的转移函数：

(a) $\dfrac{Hs}{s^2+\sqrt{2}s+1}$ (b) $\dfrac{Hs}{s^2+3s+3}$

(c) $\dfrac{Hs}{(s^2+0.7653\,s+1)(s^2+1.8477\,s+1)}$

(d) $\dfrac{Hs^2}{(s^2+0.7653s+1)(s^2+1.8477s+1)}$

(e) $\dfrac{H(s^2+2)}{s^2+s+10}$ (f) $\dfrac{H(s^2+2)}{s^2+s+1}$ (g) $\dfrac{H(s^2+2)}{s^2+s+2}$.

8.16 试用状态变量法实现习题 8.15 的转移函数。

参 考 文 献

[1] S. K. Mitra, Ed., *Active Inductorless Filters*, IEEE Press, New York, 1971.

[2] S. K. Mitra, *Analysis and Synthesis of Linear Active Networks*, John Wiley, New York, PP. 447-469.

[3] S. K. Mitra, "A network transformation for active RC networks," *Proc. IEEE*, 55, 2021-2022 (Nov., 1967).

[4] S. K. Mitra, "Filter design using integrated operational amplifiers," *1969 WESCON Technical Papers Session 4*, San Francisco, Calif. (Aug., 1969).

[5] H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, New York, 1945, P. 10.

[6] S. K. Mitra, *Analysis and Synthesis of Linear Active Networks*, John Wiley, New York, 1969, pp. 175-177.

[7] M. A. Soderstrand and S. K. Mitra, "Sensitivity analysis of third-order filters," *Mexico 1971 International IEEE Conference on Circuits, Systems and Computers* (Jan., 1971).

[8] R. P. Sallen and E. L. Key, "A practical method of designing RC active ffilters," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-2, 74-85 (March, 1955).

[9] L. Scultety, "Active RC network using IC operational amplifiers," *Proc. 4th Colloquium on Microwave Communication, Budapest, Hungary*, II, Paper CT-24 (April, 1970).

[10] P. L. Taylor, "Flexible design method for active RC two-ports," *Proc. IEEE (London)*, 110, 1607-1618 (Sept., 1963).

[11] P. R. Geffe, "RC-amplifier resonators for active filters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-15,415-419 (Dec., 1968).

[12] M. A. Soderstrand, "Sensitivity Studies of Multi-loop Feedback Active Filters," M. S. Thesis, University of California, Davis, Calif, (Sept., 1969).

[13] W. J. Kerwin and L. P., Huelsman, "The design of high perform-

ance active RC band-pass filters," *IEEE Intl. Conv. Record*, **14**, part 10, 74-80 (1960).

[14] W. J. Kerwin and C. V. Shaffer, "An integrable if amplifier of high stability," *Proc. Eleventh Midwest Symp. on Circuit Theory*, Univ. of Notre Dame (May, 1968).

[15] W. J. Kerwin, "An active RC elliptic function filter," *1966 Region VI Conference Record, Tucson, Arizona*, 647-654 (April, 1966).

[16] R. M. Inigo, "Active filter realization using finite gain voltage amplifiers," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-17**, 445-448 (Aug., 1970).

[17] M. A. Soderstrand and S. K. Mitra, "Active RC filters with zero gainsensitivity-product," *Symp. Digest, 1972 IEEE International Symposium on Circuit Theory*, North Hollywood, Calif., (April, 1972).pp. 340-344.

[18] W. J. Kerwin, L. P. Huelsman and R. W. Newcomb, "State variable synthesis for insensitive integrated circuit transfer functions," *IEEE J. Solid State Circuits*, **SC-2**,87-92 (Sept., 1967).

[19] W. H. Schüssler, *On the Representation of Transfer Functions and Networks on Analog Computers*, Westdeutscher Verlag, Cologne, 1961.

[20] H. Sutcliffe, "Tunable filter for low frequencies using operational amplifiers," *Electronic Eng.*, **36**, 399-403 (June, 1964).

[21] J. Tow, "Active RC filters—A state-space realization," *Proc IEEE.*, **56**, 1137-1139(June, 1968).

[22] L. C. Thomas, "The Biquad: Part 1-Some practical design considerations," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-18**, 358-361 (May, 1971).

[23] P. R. Geffe, "A Q-invariant active resonator," *Proc. IEEE (Lett.)*, **57**, 1442 (Aug., 1969).

[24] M. A. Soderstrand and S. K. Mitra, "Extremely low sensitivity active RC filter," *Proc. IEEE (Lett.)*, **57**, 2175 (Dec., 1969).

[25] M. A. Soderstrand and S. K. Mitra, "Design of active filters with zero passive Q-sensitivity," *IEEE Trans Circuit Theory*, **CT-20**, 289-294, (May, 1973).

[26] T. Deliyannis, "A low pass filter with extremely low sensitivity," *Proc. IEEE (Lett.)*, **58**, 1366-1367 (Sept., 1970).

[27] A. E. Sanderson, "A Q-invariant, ω_0—invariant active resonator," *Proc. IEEE (Lett.)*, **60**, 908-909 (July, 1972).

[28] D. F. Sheahan, "Inductorless Filters," *Tech. Rept. No. 6560-15, Systems Theory Lab.*, Stanford University, Stanford, Calif., (Sept.,

1967).
[29] H. J. Orchard, "Gyrator circuits," *Active Filters*, L. P. Huelsman, Ed., Mc Graw-Hill, New York, 1970, pp. 90-127.
[30] H. T. Chua and R. W. Newcomb, "Integrated direct-coupled gyrator," *Electronics Letters*, **3**, 182-184 (May, 1967).
[31] R. G. Hove and C. A. Kleingarter, "Silicon monolithic gyrator using FET's," *1969 WESCON Technical Papers Session 4*, San Francisco, Calif. (Aug., 1969).
[32] S. S. Haykim, S. Kramer, J. Schewchun, and D. H. Treleaven, "Integratedcircuit implementation of direct-coupled gyrator," *IEEE J. Solid-State Circuits*, **SC-4**, 164-66 (June, 1969).
[33] A. Antoniou, "Realization of gyrators using operational amplifiers and their use in RC-active network synthesis," *Proc. IEE(London)*, **116**,1838-1850 (Nov., 1969).
[34] R. H. S. Riordan, "Simulated inductors using differential amplifiers" *Electronics Letters*, **3**,50-51 (Feb., 1967).
[35] A. G. J. Holt and J. Taylor, "Method of replacing ungrounded inductances by grounded gyrators," *Electronics Letters*, **1**, 105 (1965).
[36] D. F. Sheahan, "Gyrator-floatation circuit," *Electronics Letters.*, **3**, 39-40 (1967).
[37] W. H. Holmes, S. Gruetzmann, and W. E. Heinlein, "Direct-coupled gyrators with floating ports," *Electronics Letters*, **3**, 46-47 (1967).
[38] H. J. Orchard and D. F. Sheahan, "Inductorless band-pass filters," *IEEE J. Solid-State Circuits*, **SC-5**, 108-118 (June, 1970).
[39] L. T. Bruton, "Network transfer functions using the concept of frequencydependent negative resistance," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-16**, 406-408 (Aug., 1969).
[40] L. T. Bruton, "Non-ideal performance of a class of two-amplifier positive impedance converters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-16**, 541-549 (Nov., 1969).
[41] W. J. Kerwin, "Active RC network synthesis using voltage amplifier," *Active Filters*, L. P. Huelsman, Ed., McGraw-Hill, New York, 1970, Chapter 2.
[42] K. L. Su, *Active Network Synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1965.
[43] L. P. Huelsman, *Theory and Design of Active RC Circuits*, McGraw-Hill. New York, 1968.
[44] R. W. Newcomb, *Active Integrated Circuit Synthesis*, Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.

9 有源分布 $\overline{RC}$网络

小拉尔夫 W. 魏德鲁姆(Ralph W. Wyndrum, Jr.)
贝尔电话实验室
惠潘里(Whippany),新泽西州

在过去的十年期间，已对分布 RC($\overline{RC}$)网络的特征、分析和综合有相当注意。基本动力就是：用薄膜集成电路很容易实现$\overline{RC}$网络。此外，某些硅集成电路和各种各样比较大面积的半导体器件只是表征为分布 RC 网络时，才可以准确表示其特性。

60 年代的中期，给我们提供了无源分布 RC 网络综合的几种新的方法[1、2、3、4]。各方面的研究人员，借助于这些方法引伸出了综合有源分布 RC(A$\overline{RC}$)网络的方法。“A$\overline{RC}$网络”指的是包含无源$\overline{RC}$结构和分立有源元件的网络拓扑。如果分布的有源结构真的成为现实的话(例如，包括分布受控源)，则基于现在知识来研究出适当的数学综合法，那也将是容易的事情。

跟早在第 8 章中讨论过的分立的有源 RC 网络一样，A$\overline{RC}$网络可以实现具有陡截止特性和控制带外性能的低通、带通和高通函数。通常，A$\overline{RC}$网络本来就比其对应的分立网络更易集成，例如，可以把内部的连接大量减少。

为了需要，本章先复习一下有关无源分布 RC 网络的分析和综合法。给出几种有源$\overline{\text{RC}}$网络的综合途径以实现实际网络特性。强调了利用运算放大器以取代 NIC（负阻抗变换器）的方法。最后以关于 A$\overline{\text{RC}}$ 网络的制造、元件容差和灵敏度问题的考虑作为本章的结束。

9.1 预备知识

无源$\overline{\text{RC}}$网络

对$\overline{\text{RC}}$传输线特性的理解是以电压和电流沿有限长传输线段的微分方程为基础。这样一种网络的一个微分段示于图 9.1 中。所示逼近法适用于很小的 Δx，因此将一般参数给定为：r 欧/米，l 亨/米，g 姆/米和 c 法/米。显然，可只考虑传输基模，而忽略高次模。对于横截面不是迅速变化的大多数的传输线，这样假定是有效的。因此，所得出的传输线方程是[4]

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}=-l\frac{\partial i(t,x)}{\partial t}-ri(t,x) \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial i(t,x)}{\partial x}=-c\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}-gv(t,x). \tag{9.2}$$

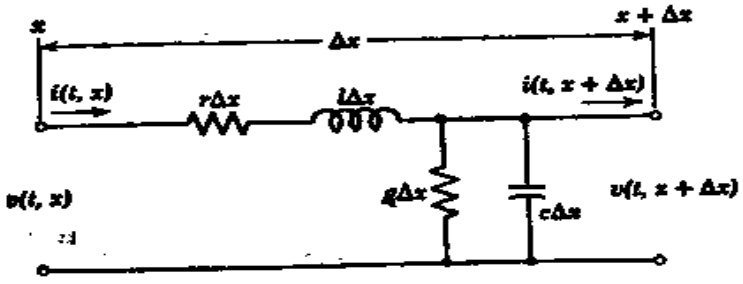


图 9-1 微分传输线段

按通常方式进行(9.1)和(9.2)的分析，而且假定 v 和 i 都具有对时间的拉氏变换，得出一阶齐次线性微分方程(9.3)和(9.4)，其起始条件假定为零：

$$\frac{d}{dx}V(s.x)=(r+sl)I(s,x) \tag{9.3}$$

$$\frac{d}{dx}I(s,x)=-(g+sc)V(s,x). \tag{9.4}$$

这里，我们还没有谈到任何涉及线路网络参数 r、c、l、g 的性质的问题。我们关心的是分布 RC 线、即假定 g 和 l 为零的情况。如果 r 和 c 与 x 无关，则线路被认为是均匀$\overline{\mathrm{RC}}$(U$\overline{\mathrm{RC}}$)线[1]。相应地，如果 r 和 c 为 x 的函数，则线路被认为是不均匀的。因而，“均匀性”一词是指线的截面与距离 x 的函数关系。虽然各种各样的函数 $r(x)$和 $c(x)$ 在数学上都是可能的，但对任何实际的均匀线来说，实质上由几何形状确定着 r 和 c 的相互关系（例如说，c 与线宽成正比，而 r 与线宽成反比）。这样识别就简化了情况的分析。$r(x)$ 和 $c(x)$ 随 x 而单调变化的传输线，定义为“递变截面”(或称锥形递变)线，将在下节中加以考虑。

如果我们首先考虑 U$\overline{\mathrm{RC}}$ 线，我们就可以从(9.3)和(9.4)的解中导出其 $ABCD$ 参数以及开路阻抗和短路导纳参数：

$$\begin{aligned} V(s,x)&=A_1\cosh\Gamma x+A_2\sinh\Gamma x \\ I(s,x)&=B_1\cosh\Gamma x+B_2\sinh\Gamma x \end{aligned} \tag{9.5}$$

式中一般传播函数 Γ(包括非零的 l 和 g)为

$$\Gamma=\sqrt{(r+sl)(g+sc)}\,.$$

对目前情况来说，有 $l=g=0$，则可简化成

$$\Gamma=\sqrt{src}$$

因而，对于长度为 L、全电阻 $R=(rL)$和全电容 $C=(cL)$的传

输线，上面所引出的参数变为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\sqrt{sRC} & \sqrt{\frac{R}{sC}}\sinh\sqrt{sRC} \\ \sqrt{\frac{sC}{R}}\sinh\sqrt{sRC} & \cosh\sqrt{sRC} \end{bmatrix}, \quad (9.6)$$

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{R}{sC}}\begin{bmatrix} \coth\sqrt{sRC} & \operatorname{csch}\sqrt{sRC} \\ \operatorname{csch}\sqrt{sRC} & \coth\sqrt{sRC} \end{bmatrix}, \quad (9.7)$$

和

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{sC}{R}}\begin{bmatrix} \coth\sqrt{sRC} & -\operatorname{csch}\sqrt{sRC} \\ -\operatorname{csch}\sqrt{sRC} & \coth\sqrt{sRC} \end{bmatrix}. \quad (9.8)$$

注意网络函数是超越函数，因而和分立 RC 网络的函数大有不同。显然，要利用这些频率特性，还需进行某些修改或变换。基本上有两种这样的方法，已在文献[3、4]中有所报导。第一种方法是用级数展开式或乘积展开式的头几项去逼近各双曲线函数。从另一观点来看，这等效于把每一小段线看作是具有分立电阻器和电容器的小网络一样，所有这些小网络一起将提供对上述$\overline{\mathrm{RC}}$线的逼近。第二种方法是修改用于微波电路的网络理论*，然后应用理查兹定理（Richard's Theorem）+[1]于$\overline{\mathrm{RC}}$网络。结果将允许我们在变换频率平面上进行，在那里导抗函数不再是超越的、而是独立变量的有理函数。这有一个很大的优点，即自然导致准确的综合法。因为$\overline{\mathrm{URC}}$的转移函数和策动点函数都由双曲线函数来表示，故只有用在另一复变量域中进行综合的技巧才能允许我们只处理有限数目的极点和零

* 参看第 7 章。

\+ 原文为 Richard's Theorem，现已予更正——译者

点的问题。缺点自然是由于引进任意而又颇无意义的变换频率平面而失去直观的启示和领会。对这些方法的详细叙述，读者可参考文献[1、2、4]。它们的突出特点将包括在为理解上述有源$\overline{RC}$综合技术所必需的以下几节中。图9-2示实现$\overline{RC}$策动点阻抗或转移阻抗的综合步骤。

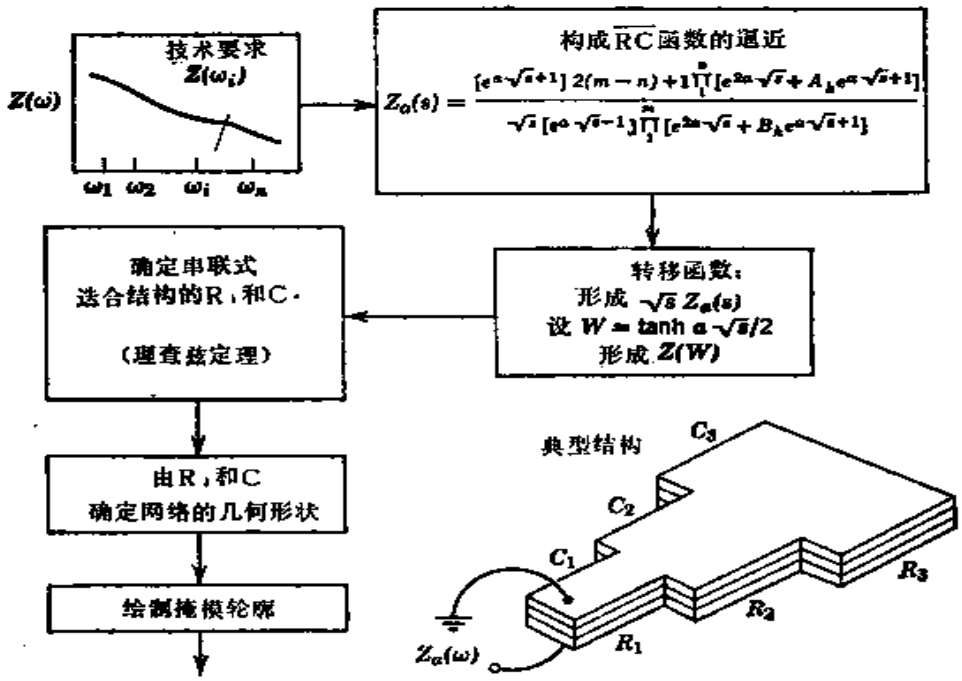


图 9-2 $\overline{RC}$网络的计算机形成

9.2 早期运算放大器$\overline{RC}$滤波器的设计

最初的有源$\overline{RC}$滤波器设计[5－8]是在高增益放大器的反馈回路中使用简单的$\overline{RC}$网络。其目的是打算倒置$\overline{RC}$网络的特性，以便提供高选择性的有源滤波器。$\overline{RC}$网络是一种选择

性的抑制网络，是把象上节中讨论过的简单$\overline{RC}$线段和一个或一个以上集总的外阻抗结合起来以产生实频率传输零点而实现抑制的。实现这种特性的两个网络示于图 9-3 中。图 9-3 (b) 所示网络把分布增扩网络与基本的 RC 节相串联*。对给定网络 Z_B，为了产生实传输零点，通过基本 $\overline{RC}$网络与集总的串联增扩网络的适当串联组合来得到串联网络 Z_A，以使组合网络的 Z_{12} 项在某些频率下等于 0。

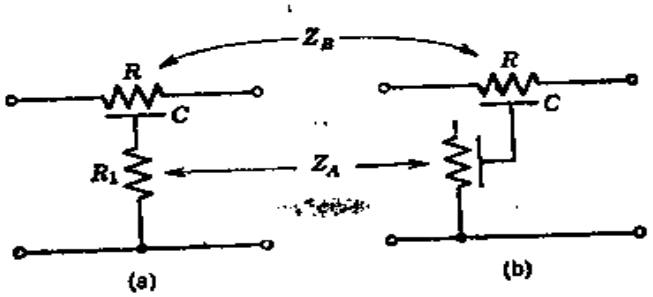


图 9-3 $\overline{RC}$ 陷波抑制滤波器

考夫曼(Kaufman)[5]在 1962 年就指出：图 9-3 (a) 的网络**实现了选频的带阻滤波器。在反馈路径中，一串联电阻器与$\overline{RC}$线段相结合以提供陷波频率特性。该陷波网络的开路电压转移特性为

$$t_v(\omega)=\frac{\alpha+u\sinh u}{\alpha\cosh u+u\sinh u} \tag{9.9}$$

式中

$$u=(1+j)\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^{1/2}$$

$$\alpha=\frac{R}{R_1} \tag{9.10}$$

---

* 指二端对网络的串联。

** 图 9-3 到 9-7，经 IEEE 许可，摘自参考文献[5]。

和
$$\omega_1=\frac{2}{RC}.$$
注意
$$t_v(\infty)=1=t_v(0).$$
在
$$\alpha+u\sinh u=0$$
的时候，得到完全陷波。与这个零点对应的 α，有无限个但可计算出的一组离散值。第一个零点出现在 ω_{01}，这里
$$\frac{\omega_{01}}{\omega_1}=5.5951\cdots \tag{9.11}$$
或
$$\omega_{01}=\frac{(11.1902\cdots)}{RC} \tag{9.12}$$
而对应的 α 为
$$\alpha_1=17.786\cdots. \tag{9.13}$$
第三个和所有高阶零点，都差不多出现在
$$\frac{\omega_{0,n}}{\omega_1}=\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)^2. \tag{9.14}$$
它们中的每一个都需要一不同的 α 值。在实频率分母没有零点。传输零点的出现是因为 $\overline{\text{RC}}$ 网络的 Z_{12} 在 ω_{01} 恰好为 $-R_1$，而 R_1 是与 $\overline{\text{RC}}$ 网络相串联的。

充分研究了 $t_v(\omega)$ 在 α 接近 17.8 时的特性，并用 $t_v(\omega)$ 的极坐标图示于图 9-4 中。对应于极坐标图，把振幅和相位二者都标绘于图 9-5 和 9-6 中。第二个（和更高的）传输零点相应的选频抑制特性要差得多。

$\overline{\text{RC}}$ 陷波网络在有源结构中的最早而且最重要的应用，是与高增益放大器相结合以实现窄频带调谐放大器（图 9-7）。在前向增益足够高的时候，陷波网络的抑制特性实质上被倒置，而且选择性 Q 变为直接和放大器增益成正比。不过，Q 小于 15 或 20 的稳定滤波器是可由这种方式构成的。利用这种结构，

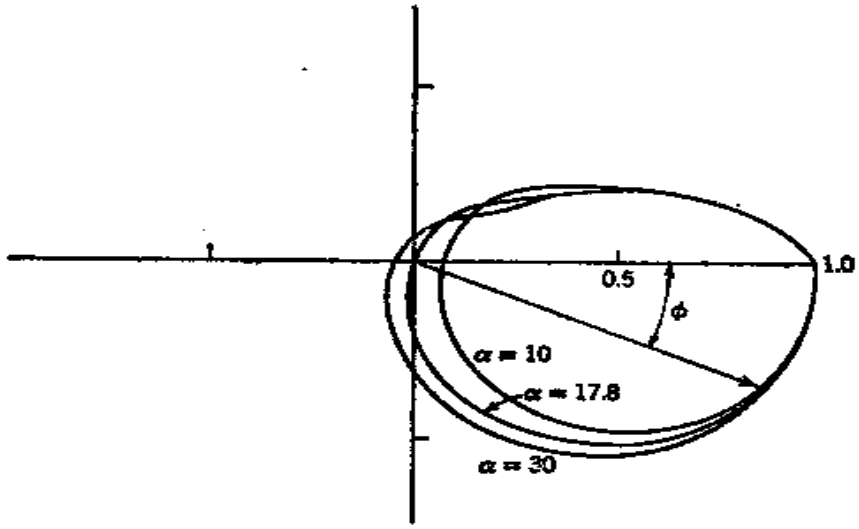


图 9-4　对几个不同 α 的复增益极坐标图

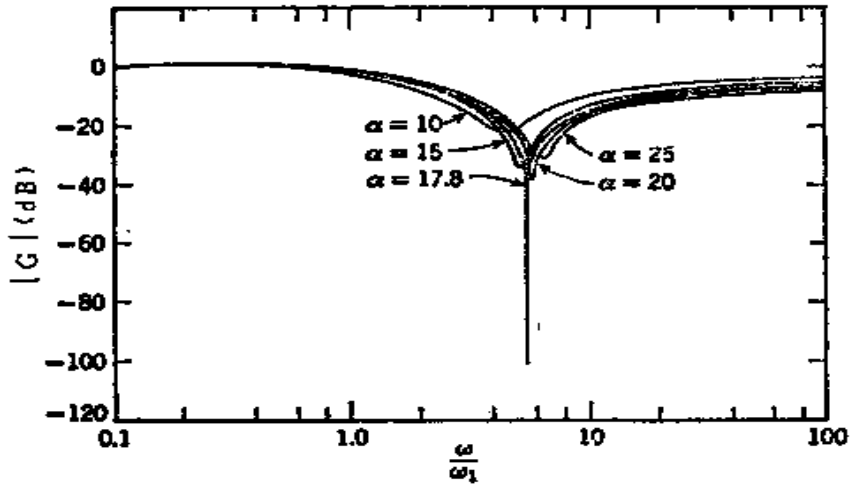


图 9-5　$|G(\omega)|$ 与 ω/ω_1 的关系曲线

还可以容易地设计振荡器，虽然必须提供适当的限制电路。

考夫曼(Kaufman)的$\overline{RC}$陷波网络为许多应用、例如图 9-7 的带通滤波器中的“双T”网络，提供适当的代用品。不过，其

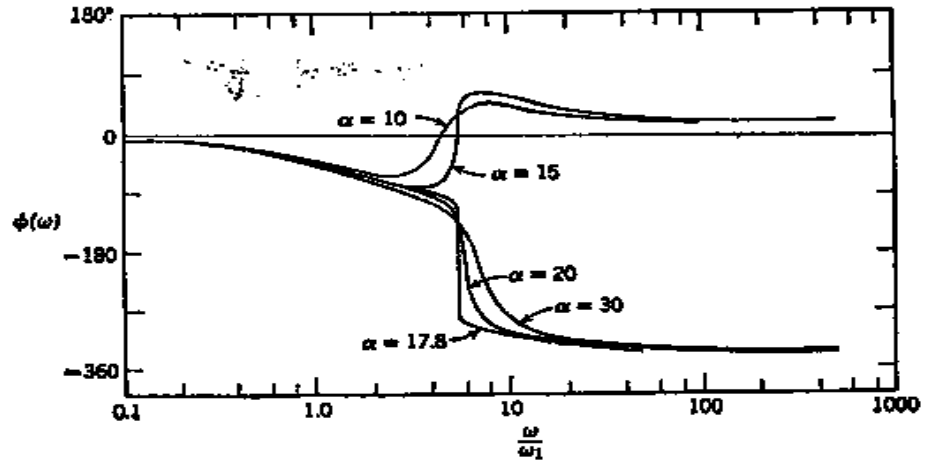


图 9-6　$\phi(\omega)$与ω/ω_1的关系曲线

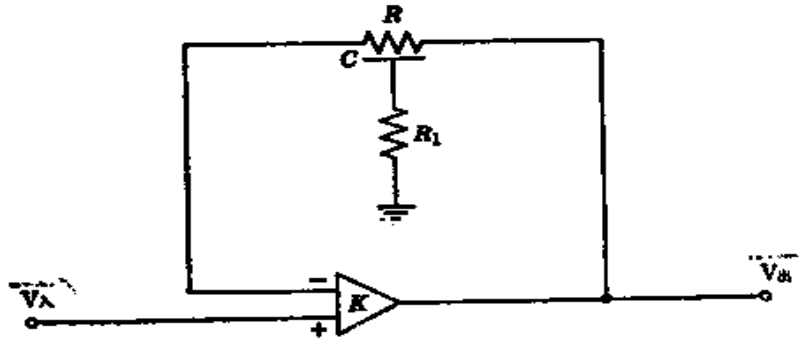


图 9-7　高Q调谐放大器

选择性比双T为差，尤其在陷波以上的频率更甚，如图 9-8和 9-9 所示。$\overline{RC}$ 陷波网络按规定的陷波深度和频率的微调，则已在别处有详述[7]。

在考夫曼（Kaufman）的工作之后，赫尔斯科威茨（Herskowitz）和魏德鲁姆（Wyndrum)[8] 阐述了一种可实现的最平逼近的窄带放大器。这是利用薄膜技术、由几级如图 9-7 所示参差调谐带通滤波器级联而成。各级都由具有前向增益为K

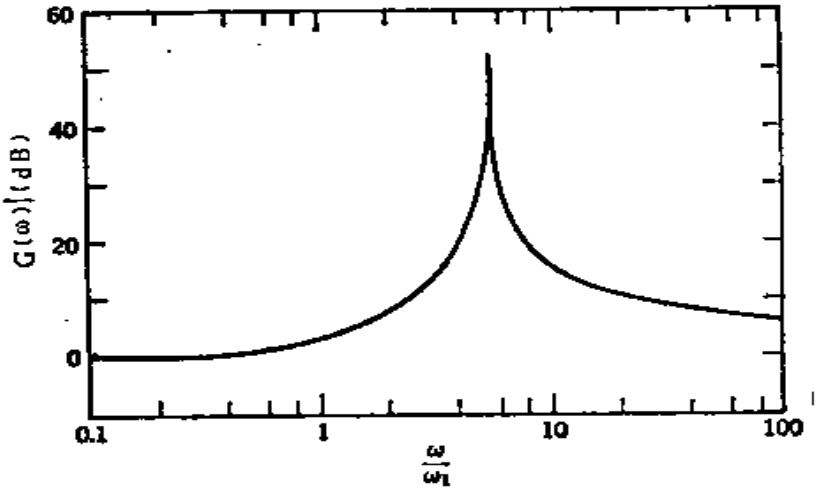


图 9-8　使用选择性$\overline{RC}$反馈的放大器的响应（K＝500，α＝17.8）

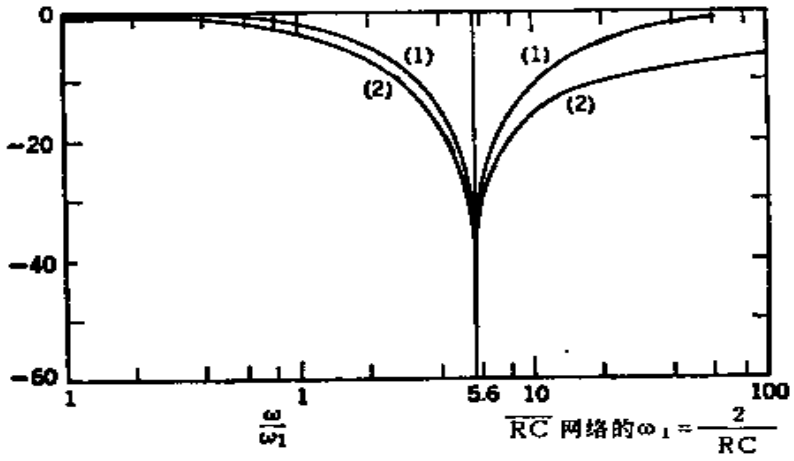


图 9-9　（1）双 T 网络和（2）$\overline{RC}$陷波网的理论曲线

的宽带放大器和反馈环中具有指数递变截面的锥形分布 RC 带阻滤波器所组成。锥形递变（不均匀）$\overline{RC}$ 陷波滤波器（如图 9-10 所示）比其对应的均匀网络提供较好的选择性。

对指数递变截面的锥形分布抑制滤波器的双曲线电压转移函数零点位置的计算机解确定为分布网络参数和几何形状的函数。因为放大器的闭环极点位置，在很高的前向增益情况下趋向开环（反馈网络）零点的位置，所以这些零点基本上就是闭环极点。最平或等波纹幅值响应可由适当的反馈放大器级联以实现正确的极点排列就可得到。

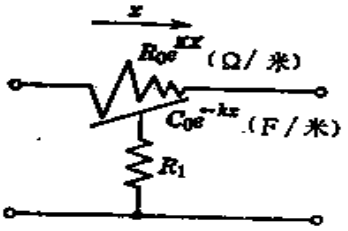


图 9-10 锥形递变 $\overline{RC}$ 陷波网络

例 9-1 试利用图 9-7 结构中的均匀 $\overline{RC}$ 网络来设计带通滤波器，使其中心频率为 100 KHz，t_v(100 KHz)＝60 dB，Q＝21.6 和 C＝0.001 μF。

解：带通特性可由反馈回路中带阻特性对前向电路的高增益（这里是 60 dB）的倒置来获得。由 60 dB，因而 K＝1,000。然后，沿图 9-11 中的 β＝0 曲线（相当于均匀 $\overline{RC}$ 网络)内插，以实现 Q＝21.6,相应于 ω/σ＝43.2。这导致解答，

$$\frac{\omega}{\omega_1}=10.8$$

$$\frac{\sigma}{\omega_1}=0.25$$

因而，再用内插法，

$$\alpha=16.4=\frac{R}{R_1}$$

并因

$$\omega_1=\frac{2}{RC},$$

$$R=\frac{1}{\pi f_1 C}=\frac{1}{(3.14)(10^5)(10^{-9})}$$

$$=3.18\ \mathrm{K}\Omega.$$

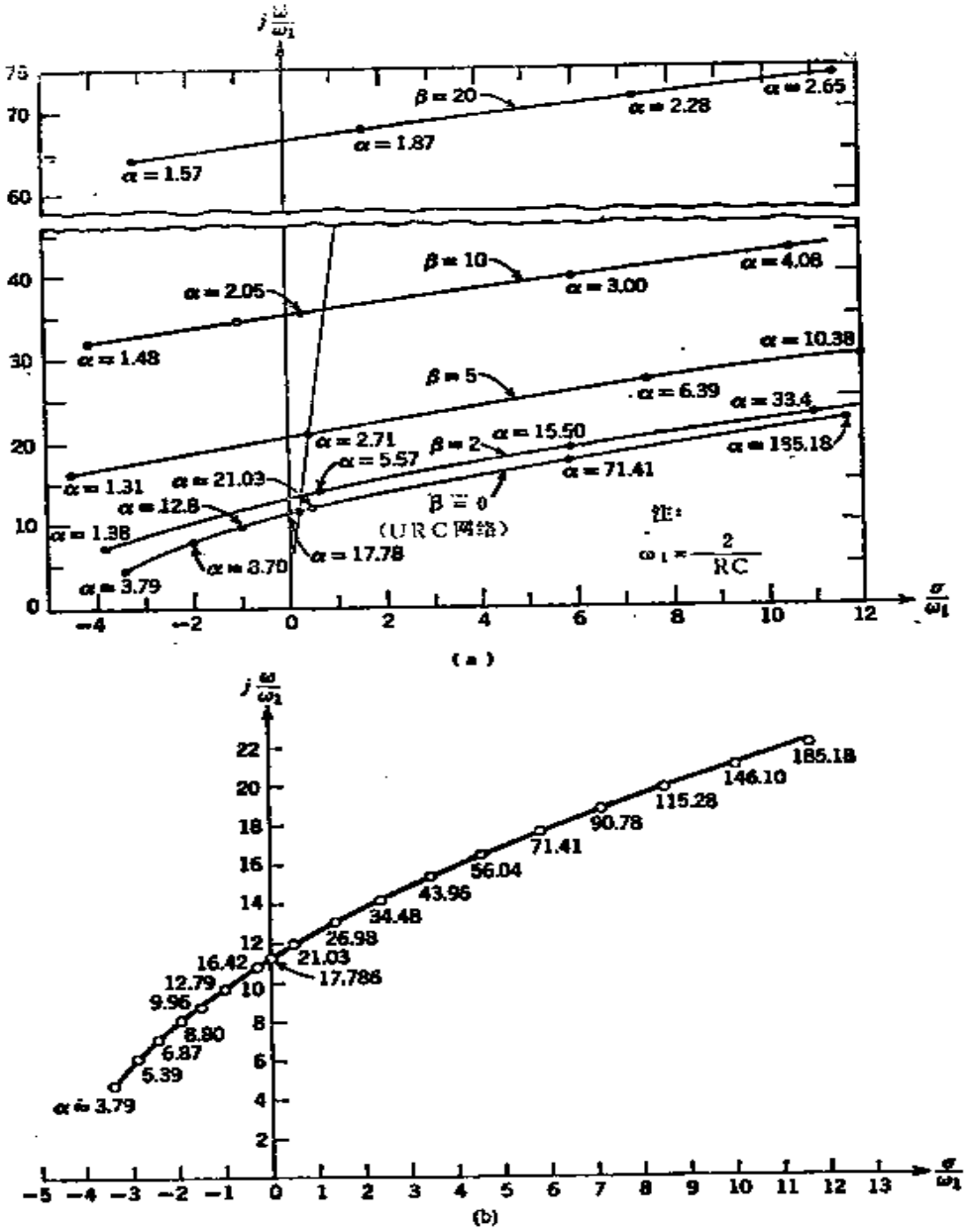


图 9-11 (a) 滤波器转移函数零点的位置 (b) 图 9-11 (a) 关于 B = 0 的详图

因而

$$R_1=\frac{R}{16.4}=194\ \Omega.$$

网络锥形递变对放大器性能的影响涉及功率耗散及关键极点位置的灵敏度。据指出，在整个锥形递变常数范围内，灵敏度和功率耗散之间都存在有折衷的选择。还包括有对于分布网络转移函数零点使用计算机解的设计程序。在薄膜结构中，用适当掩模和用于真空淀积膜的光刻法，可以简单地实现锥形递变。

图 9-10*中锥形递变 $\overline{\mathrm{RC}}$ 网络的开路电压转移函数为

$$t_v(s)=\frac{\gamma_0 e^{kL}+sC_0R_1\sinh\gamma_0L}{\gamma_0\cosh\gamma_0L+(k+sC_0R_1)\sinh\gamma_0L} \qquad (9.15)$$

式中

$$\gamma_0=\sqrt{k^2+sR_0C_0}$$

而每单位长度的 R 和 C 与 x 的关系为：

$$r(x)=R_0e^{2kx} \quad 和 \quad c(x)=C_0e^{-2kx}.$$

由于高增益反馈放大器级的极点，趋向于接在反馈回路中的 RC 网络的零点。因此，反馈网络接近实频率轴的零点，在说明参差调谐式带通的性质方面就成了决定性的。再者，对双曲线转移函数 $t_v(s)$，也存在有无限的零点组。这些零点就是

$$\gamma_0e^{kL}+sC_0R_1\sinh\gamma_0L=0 \qquad (9.16)$$

的根。$t_v(s)$ 的极点在负实轴上。$t_v(s)$ 的零点按不同的锥度值 $\beta=kL$ 并以 $\alpha=R_0Le^{\beta}/R_1$ 为参数标绘于图 9-11 中。更多的设计曲线在参考文献[8]中给出。

如 (8-10) 中所定义的 Q 对 α 的灵敏度是随锥度 β (对

---

* 图 9-10 和 9-11，经许可摘自[8]。

$\beta>10$）而迅速增加。实验的结果证实了这种理论对上述的均匀$\overline{RC}$的和锥形递变截面$\overline{RC}$的带通滤波器都是正确的。

恰好此时在涉及无源RC网络研究的项目方面有了紧缩。他们试图更好地了解在有源网络布局中的更复杂的$\overline{RC}$网络，并且获得较广泛类型的滤波和均衡特性。直到1966年左右为止，有源$\overline{RC}$网络很少有新成果出现。那时对无源$\overline{RC}$网络无论从分析和综合的观点来说都了解得比较好。从分析的观点，实际上能够用简易（还有许多其它的！）方式来分析的所有非均匀线都已研究过了。此外，已根据均匀和非均匀$\overline{RC}$网络提出了几种无源综合法，它为规定的和相当一般的频率特性或暂态响应的综合作了准备。以下几节讨论几种有源$\overline{RC}$网络综合的主要方法，同时也引入和它有关的相应无源综合法。

9.3 RC-$\overline{RC}$有源滤波器的设计

有源RC网络综合的方法主要有三种。这些方法是根据所使用的理想有源元件来划分的。一种方法是用负阻抗变换器(NIC)，第二种，运算放大器。以及第三种，回转器。在1950年代期间，强调了利用负阻抗变换器的方法（它们提供最易处理的数学解法），不过很少去研究它们对元件容差的灵敏度。最后当有源滤波器的设计由纯学术阶段转入实际实现领域的时候，人们发现NIC式综合法的灵敏度一般是太高了。

已做过大量的工作来实现回转器，而且这种元件显示有相当大的希望。可是，因为它在有源综合方面的基本目的是要把电容器变换成其作用就象用在LC综合中的电感器一样的结构，所以它现在还只被推荐为$\overline{RC}$网络综合的重要候选对象。

于是，运算放大器在提供有源$\overline{RC}$滤波器特性方面承担了

主要的任务。某些运算放大器有源$\overline{RC}$结构具有合格的低灵敏度，而且也许更重要的是采用了具有接近理想特性的廉价商用集成运算放大器。实质上，运算放大器提供电压控制电压源(VCVS)的性能，首先由萨伦(Sallen)和基(Key)在广义上使用过[10]。

在大多数有源RC结构中，人们被大量其成本和体积都远远超过有源器件，即运算放大器的无源元件所冲击。在有源结构中采用$\overline{RC}$网络的潜在优点是无源元件数目的减少，以及由无源元件所占有的衬底面积的可预料到的大量减小。例如，$\overline{RC}$元件在同样衬底面积上兼有电容器和电阻器的功用。一个能提供锐截止低通特性的简单有源$\overline{RC}$网络[11、12]示于图9-12中。无源分布RC网络的$[ABCD]$转移矩阵，在其电容端接地的情况下为

$$F(s)=\begin{bmatrix}\cosh\sqrt{s\tau} & \dfrac{R\sinh\sqrt{s\tau}}{\sqrt{s\tau}}\\ \dfrac{\sqrt{s\tau}\sinh\sqrt{s\tau}}{R} & \cosh\sqrt{s\tau}\end{bmatrix} \tag{9.17}$$

式中$\tau=RC$。

容易证明：有源网络的总传输矩阵为

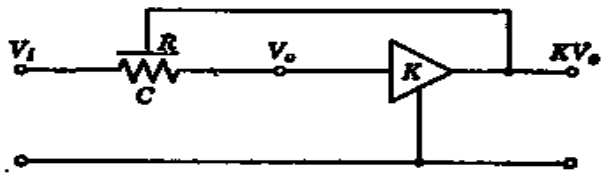


图 9-12 有源$\overline{RC}$滤波器

$$F(s)=\cosh\sqrt{s\tau}\begin{bmatrix}(1-k)+k\,\mathrm{sech}\sqrt{s\tau} & \dfrac{R\tanh\sqrt{s\tau}}{\sqrt{s\tau}}\\ \dfrac{(1-k)\sqrt{s\tau}\tanh\sqrt{s\tau}}{R} & 1\end{bmatrix}. \tag{9.18}$$

这种网络的电压转移函数

$$t_v(s)=\frac{V_0}{V_i}(s)=\frac{1}{k+(1-k)\cosh\sqrt{sRC}} \tag{9.19}$$

使得复极点对有可能相当容易地被实现。第一（主）极点由下

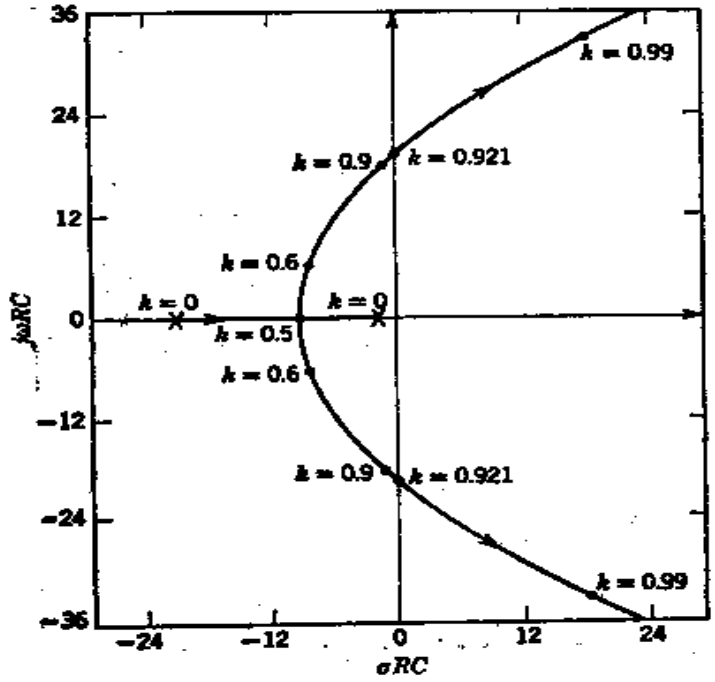


图 9-13　图 9-12 作为 k 的函数的第一主极点根轨迹

式给出：

$$sRC=(\log(M+\sqrt{M^2-1}))^2 \qquad (9.20)$$

式中

$$M=-k/(1-k). \qquad (9.21)$$

图 9-13*所示的这些主极点解，对几个从 $k=0$（即无源结构）到 $k\cong0.921$ 的 k 值来说，导致如图 9-14 所示的实频率响应。$k>0.921$ 的值引起振荡响应。为了对比幅度频率特性的截止

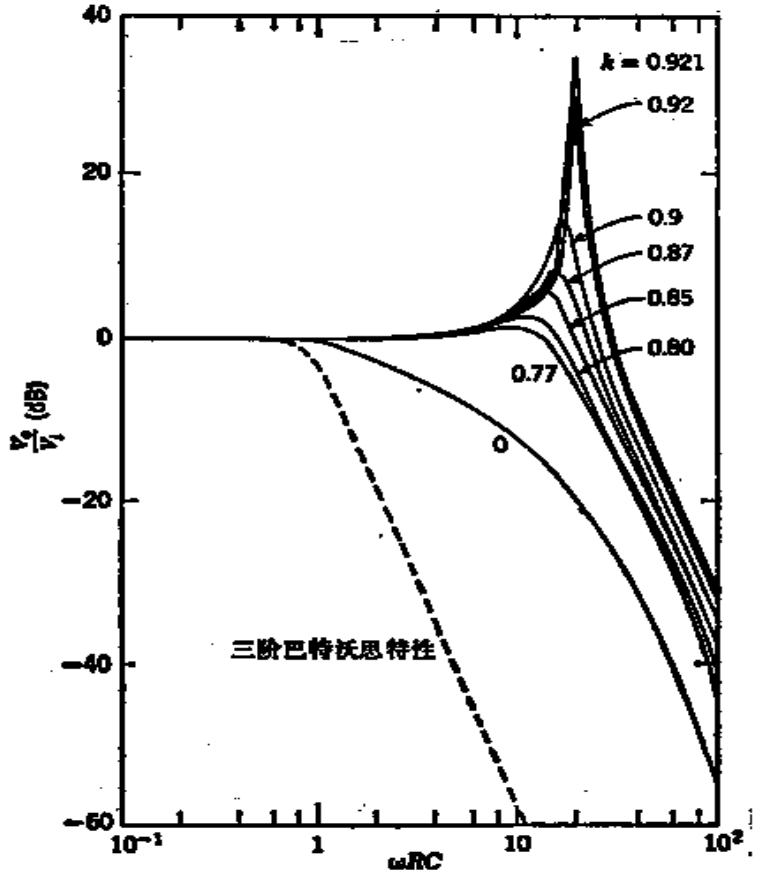


图 9-14　有源 RC 频率的响应曲线

* 图 9-13 到 9-18，经 IEEE 的许可摘自[12]。

特征　把三阶巴特沃思滤波器特性也画在这个图中。

主极点通过 $j\omega$ 轴时的 k 值约为 0.921。因为 $t_v(s)$ 对 k 的灵敏度，

$$S_k^{t_v}=\frac{dt_v/t_v}{dk/k}=\frac{1}{(1-k)}t_v(s) \qquad (9.22)$$

把$(1-k)$因子包括在其分母中，故初步研究表明：有源 $\overline{RC}$ 结构比它们相应的有源集总 RC 网络，例如萨伦（Sallen）和基（Key）电路，有较低的对 k 灵敏度，在后者的电路要在类似结构中获得同样选择性和低通特性，需要差不多 0.99 的 k 值[12]。

例 9.2　利用图 9-12 的结构设计 $\overline{ARC}$ 网络，其 3 dB 截止频率为 10 KHz，频域过冲为 3 dB，而且分布网络的全电容为 10,000 pF。

解：由图 9-14，为了获得 3 dB过冲，$k=0.80$。对于 $k=0.80$，归一化 3 dB 截止频率 $\omega RC=19$。因而

$$R=\frac{19}{2\pi fC}=\frac{19}{(6.28)(10^4)(10^{-8})}=30,300\ \Omega.$$

然而实际上，分布网络总是有集总寄生现象的，这表示于

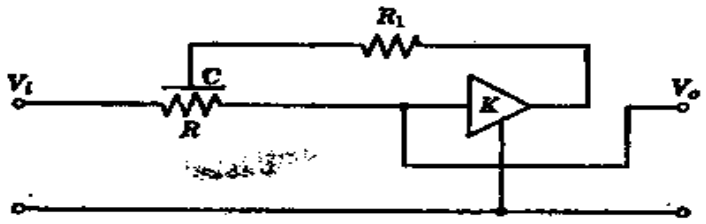


图 9-15　具有寄生放大器输出阻抗 R_1 的有源 $\overline{RC}$ 滤波器

图 9-15 的等效电路中，图中把电压输出器运算放大器的电源阻抗表示为 R_1。按照前节，显然图中所示的网络，即使 $k=0$ 也可以作为选择性的陷波滤波器。如果 $R_1/R\cong 0.0562$，它在

$\omega_0 \cong 11.19/RC$ 得到完全陷波。在改变图 9-12 的有源 RC 网络以容纳电源阻抗时，若令 $\alpha = R_1/r$ 和 $\tau = RC$，可以预期会得到类似的响应。其电压转移函数由下式给出：

$$t_v(s) = \frac{1 + \alpha\sqrt{s\tau}\sinh\sqrt{s\tau}}{k + (1-k)\cosh\sqrt{s\tau} + \alpha\sqrt{s\tau}\sinh\sqrt{s\tau}}. \quad (9.23)$$

对于 $k=0$，它简化为无源陷波网络；对于 $\alpha=0$，它简化为图 9-12 的网络。对于 $\alpha=0$ 和 $k=0$，则简化为无源均匀 $\overline{RC}$ 线段的情况。

图 9-12 网络的预期低通特性频率响应，即使在 VCVS 只伴随有小的电源电阻 R_1 时，也将严重地劣化，事实上，对于 $\alpha = R_1/R$ 小达 10^{-4}，在以 α 作参变量的情况下对 $k=0.8$ 和 0.9 时的低通响应劣化情况如图 9-16 和 9-17 所示。在利

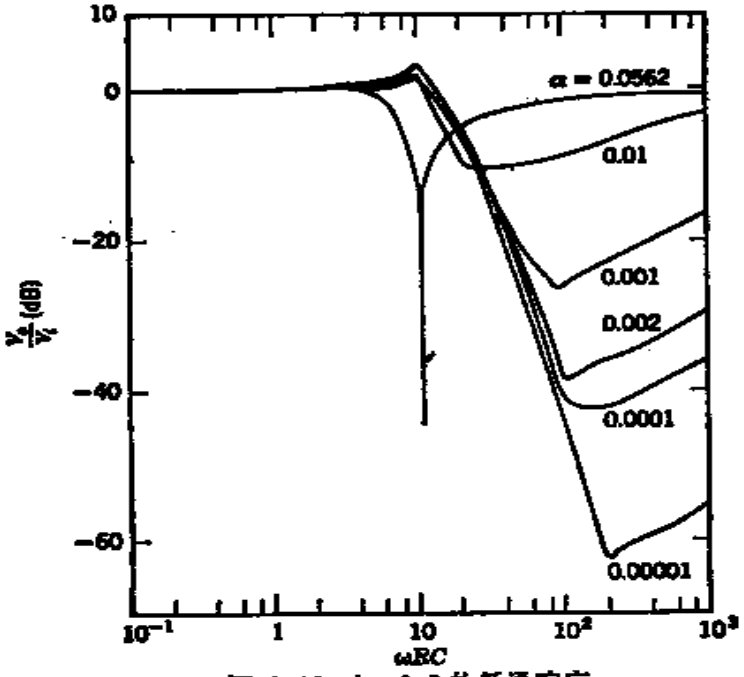


图 9-16 k=0.8 的低通响应

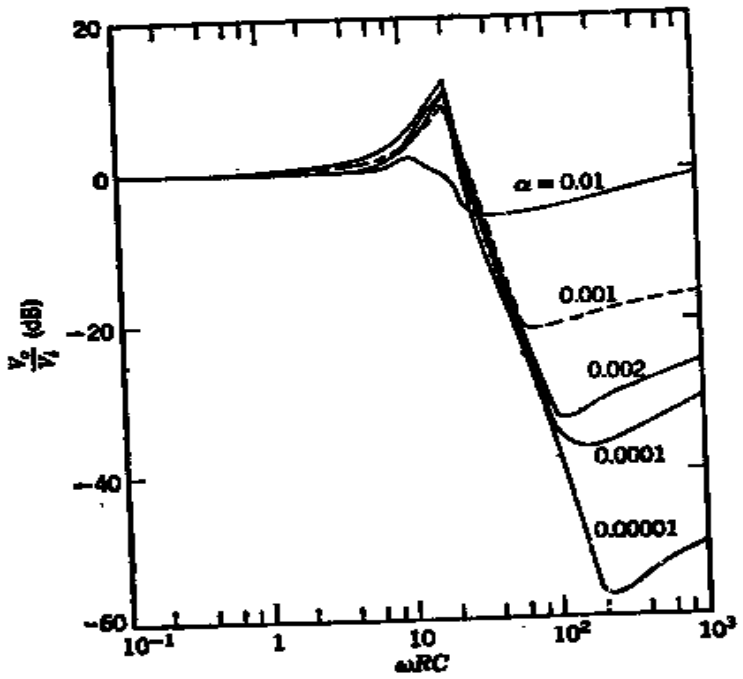


图 9-17　k＝0.9 的低通响应

用实际电压放大器来组合这种低通滤波器的时候，显然要多加小心。

例 9-3　假定图 9-15 所示结构的有源 $\overline{RC}$ 网络是设计作音频应用，并具有 $R=36\ \mathrm{K}\Omega$ 和 $k=0.8$。今欲保证带外响应在超过十倍 3 dB 的截止频率时下降 40 dB 以上，问最大可以容许多大的输出阻抗 R_1？

解：由图 9-16，$\alpha \leqslant 0.0001$。因而 $R_1 \leqslant 3.6\ \Omega$。

$\overline{RC}$ 网络的级联(图 9-18) 可克服上述单节 $\overline{RC}$ 网络所不希望有的高频响应。

对于图 9-12 形式的滤波器、但采用指数递变锥形 $\overline{RC}$ 网络由计算机产生主极点解的设计步骤已由马迪 (Mahdi)[13]提

出。马迪并已证明：同集总的 ARC 对应滤波器相比，$U\overline{RC}$ 或者 $E\overline{RC}$ 有源滤波器非主要极点的存在，有使相位响应线性化的趋势。

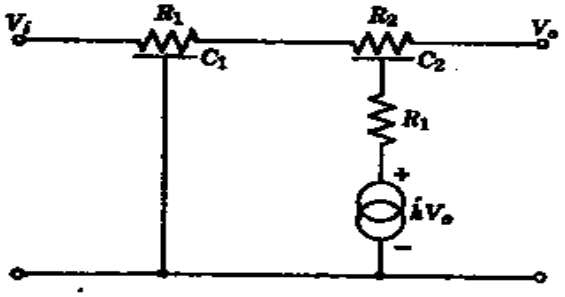


图 9-18 两极有源 $\overline{RC}$ 节

克尔温（Kerwin）和许尔斯曼（Huelsman）已采取一种利用分布、集总 RC 网络和有源器件相结合的方法[11、14、15]。对于给定振幅响应特性（对应于左半平面极点和 $j\omega$ 轴零点的任何组合）用这种综合方法，只需要少数几个简单的分布-集总-有源（DLA）RC 网络的级联就行了。

图 9-19 示可以实现两个复极点和两个实频率零点的集总有源 RC 网络。图 9-20 示一种能产生很类似振幅响应特性的 DLA 网络，但它显然要简单得多，而且只需要较小的电压控制电压源增益（$A_2 < A_1$）。克尔温（Kerwin）综合法是以（格奥西（Ghausi）和凯利（Kelly）所讨论的）有效主极点的概念为基础

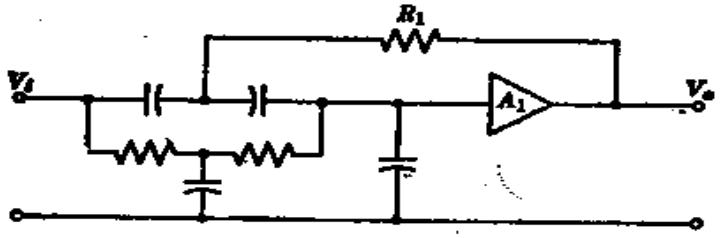


图 9-19 有源 RC 滤波器

[4]。人们可以清楚地看到，图 9-20 的网络拓扑，除集总电容器外，与以前提到过的图 9-15 所示陷波网络是相同的。克尔温实质上是把 DLA 网络（图 9-20）的振幅响应特性（具有

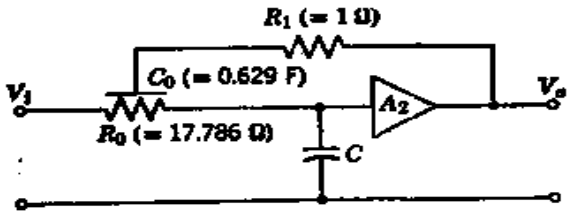


图 9-20　产生两个复零点和两个复极点的有源 RC 网络

所示 R_0、R_1 和 C_0 的特定值，和在各种增益 A_2 和电容 C 的数值下)与图 9-19 的有关两个极点、两个零点的有理函数的响应特性相拟合。这种函数给出如下：

$$t_v(s)=\frac{A_2e_1(s^2+1)}{s^2+\delta_1 s+e_1}\Big|_{e_1<1}$$

克尔温已绘出（作为 DLA 网络参数的函数的）DLA 网络的"等效极点位置"(图 9-21)。这种 DLA 网络，将只实现其半径较大(大于传输极点的半径)的传输零点。为了实现与（具有由特定极点对位置引起的规定低通性能的）集总网络特性的振幅特性相拟合，人们为 DLA 网络选择（图 9-21 中所示的）A 和 C 值。这种方法提供图 9-20 网络的元件值，它们导致归一化到 $\omega=1$ 的传输零点(对于锐截止)以及规定的传输极点。

如果要使电压转移函数的极点离原点的位置能大于零点的，而且事实上是在由 $C=0$ 所圈定的区域之外的任何地方，那么就可以采用图 9-22 所示的积木式电路及所示的具体数值。此外，参考文献[16]中的一套设计曲线使得人们有可能查出主极点位置，并读出相应的 R 和 A_2 值。所以实质上我们已用电阻器替换电容器，所用方式跟萨伦(Sallen) 和基 (Key)[10]作过的大致相同。

为了实现简单的单极点对，可以使用图 9-23 (a)所示的有源分立元件 RC 网络，其转移函数具有 $V_0/V_i=K/(s^2+\delta s+e)$

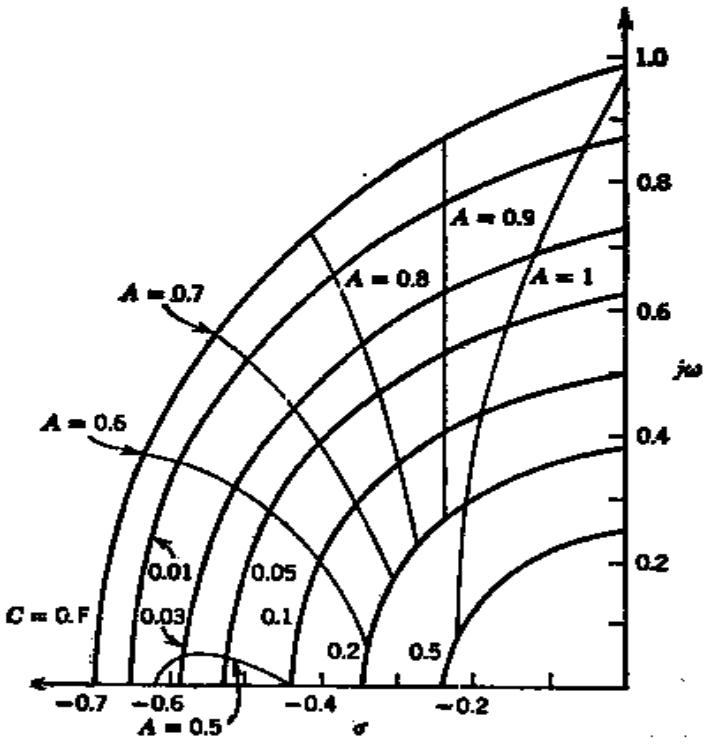
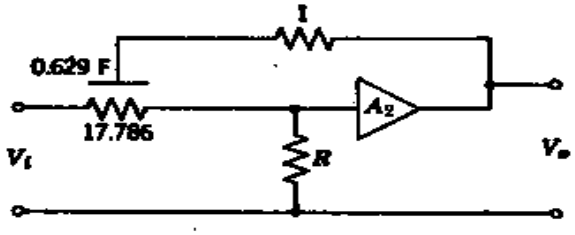


图 9-21　图 9-20 的等效极点位置



$K_2=\frac{RA_2\epsilon_2}{R+17.786}$ 实现 $\frac{V_o}{V_i}(s)=\frac{K_2(s^2+1)}{s^2+\delta_2 s+\epsilon_2}$的 DLA 网络

图 9-22

形式。不过，如前所述，图 9-23 (b)的网络，在直至谐振频率以上约十倍的频率下都将基本上提供同样的特性；而且为了获得相同的特性，人们只需要为 $\overline{\text{ARC}}$ 网络选择等效极点位置，并参考图 9-23 (c)来选取适当的 A_3 和 C 值。

克尔温(Kerwin)已证实：具有五个极点、四个(实频率)零点的低通椭圆滤波器函数，可以由几个适当的 $\overline{\text{ARC}}$ 积木式

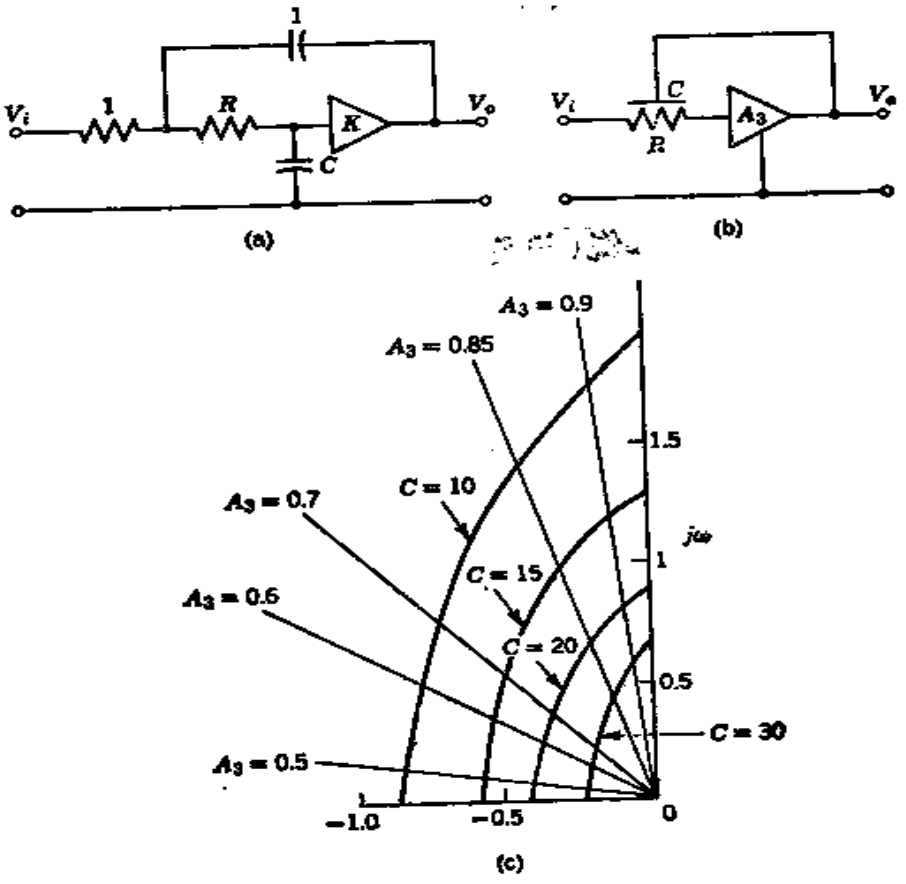


图 9-23 (a) 有源 RC 滤波器(b) 有源 $\overline{\text{RC}}$ 滤波器 (c) 关于图 9-23 (a) 网路的 DLA 设计图表

部件相级联来很好地加以逼近。

例 9-4 设计一个网络[16]，要实现的总电压转移函数为

$$t_v(s)=\frac{0.168\,(0.359\,s^2+1)(0.738\,s^2+1)}{(s^2+0.488\,s+0.501)(s^2+0.114\,s+0.808)(s+0.416)} \tag{9.24}$$

相当于具有 0.5 dB 容差的等波纹通带，并具有 40 dB 最小衰减的等波纹阻带。

解：我们可以把总转移特性分解为三个转移特性 t_a、t_b 和 t_c 的乘积：

$$t_a(s)=\frac{0.359\,s^2+1}{s^2+0.488\,s+0.501} \tag{9.25}$$

$$t_b(s)=\frac{0.738\,s^2+1}{s^2+0.144\,s+0.808} \tag{9.26}$$

$$t_c(s)=\frac{0.416}{s+0.416}. \tag{9.27}$$

把 $\rho^2=0.359\,s^2$ 代入 $t_a(s)$，以便把零点归一化到 $\omega=\pm1$，得到

$$t'_a(\rho)=\frac{\rho^2+1}{2.785\,\rho^2+0.814\,\rho+0.501}. \tag{9.28}$$

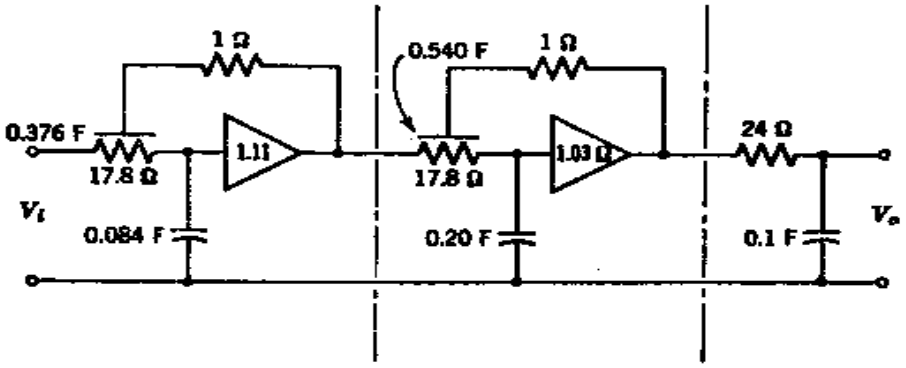


图 9-24 归一化的 DLA 网络一例

我们必须对一切情况实行同样的归一化，以便使用图 9-21 中的设计图表。结果所得网络如图 9-24 所示，并把网络特性绘于图 9-25 中。

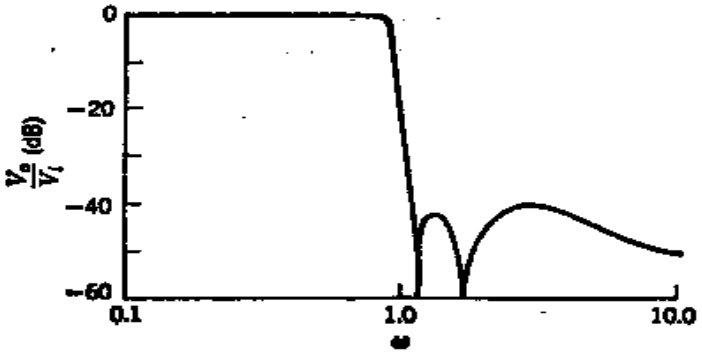


图 9-25　DLA 网络响应

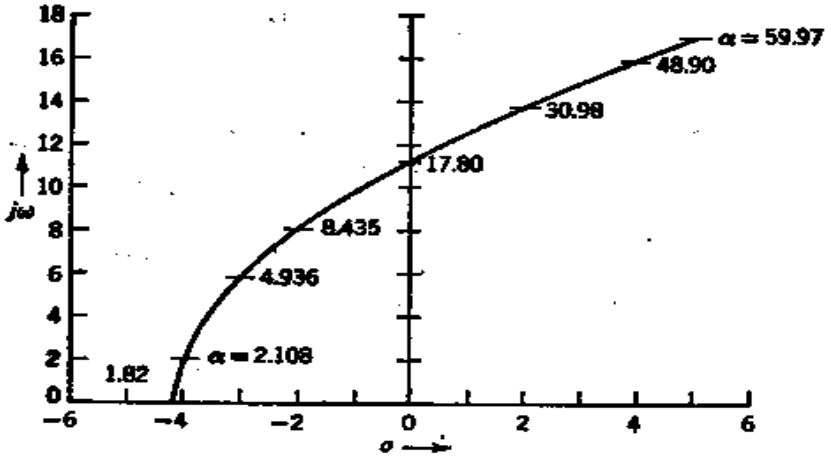


图 9-26　图 9-3 网络的零点的轨迹，作为 $1/R_1$ 的函数

如前所述，图 9-3 的增扩 $\overline{\text{URC}}$ 无源线段可以提供复零点或虚零点，包括右半平面中的零点。作为 $\alpha = R/R_1$ 的函数，这些复零点具有图 9-26 中所示的位置。无源 D-L 网络可以用

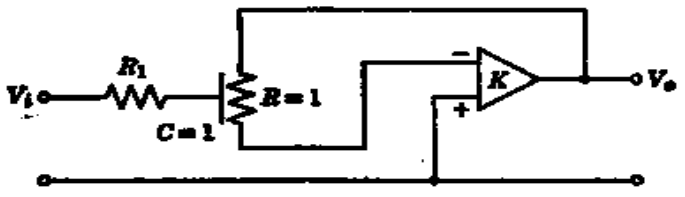


图 9-27　具有右半平面幻象零点的带通 DLA 网络

于图 9-27 的有源结构中，以得到具有

$$t_v(0)=t_v(\infty)=0 \tag{9.29}$$

的带通特性。对于这种网络，已用计算机程序[18]给出了 Q 与

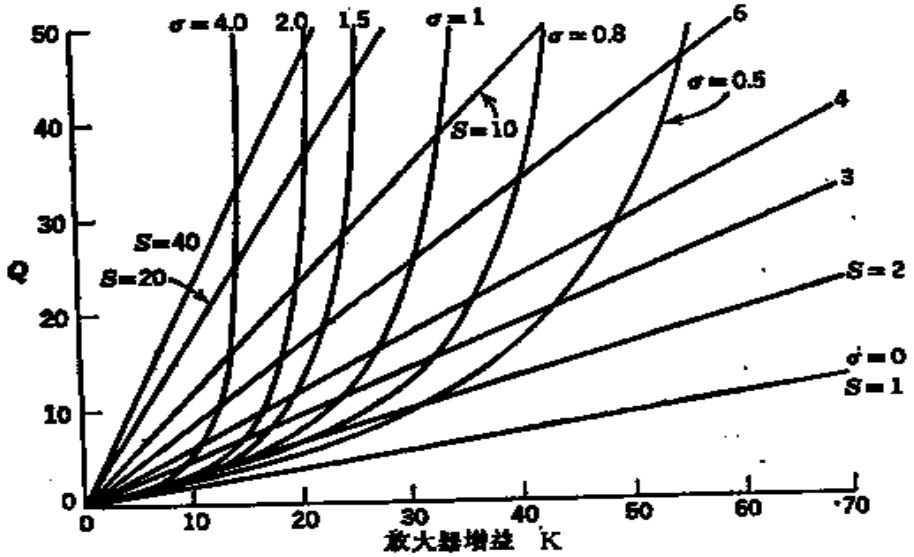


图 9-28　对于图 9-27 网络的 Q 与|k|的关系曲线，作为右半平面幻象零点位置 σ 的函数

Q 灵敏度（图 9-28）以及峰值频率 ω_0（图 9-29）对应于放大器增益 K 的函数。在这类情况下，以 σ（幻象零点*位置的实部）

---

* 参看 8.3 节。

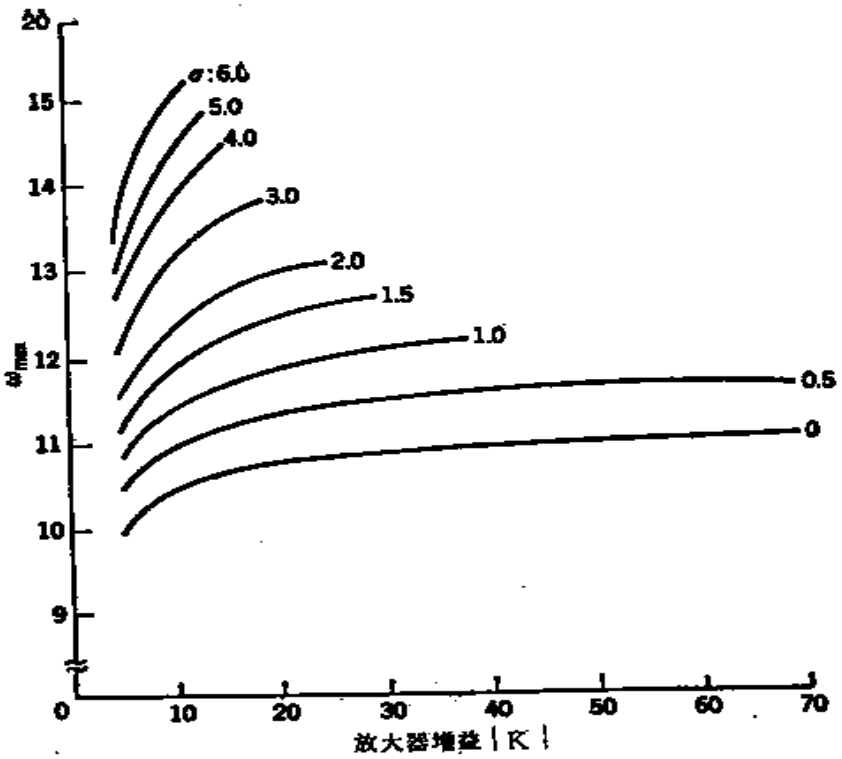


图 9-29 最大响应频率与放大器增益的关系曲线和 σ

为设计参数，参照图 9-28 就可近似选定 σ。于是[18]

$$R_1 \simeq \frac{1}{17.80 + 5.40\,\sigma + 0.529\,\sigma^2} \tag{9.30}$$

从 $\sigma=0$ 到 $\sigma=5.0$ 都在 $\pm 0.4\%$ 范围以内。因为幻象零点进一步进入右半平面，就把特定系统增益所要求的增益 K 变小了。

例 9-5 假定我们需要具有 $Q=50$ 和 $S_F^2<10$ 的带通滤波器[18]。

解：参考图 9-28，我们找到 $K\simeq 42$ 和 $\sigma\simeq 0.8$。由(9.30)，$R_1\simeq 0.45\ \Omega$。那么由图 9-29，一种解答就是：$\omega_0=12$ rps，假

定$|K|=42$ dB。对无源元件参数的灵敏度是很小的，而且$S_{\omega_0}^{Q}=0$。最后，如果R_1跟踪R（正如集成电路实现中那样），

$$S_R^Q+S_{R_1}^Q=0.$$

还有就是上面给出的Q对K的以及Q对额外相位变化的灵敏度。

9.4 有源 $\overline{RC}$ 网络的稳定性

1969年，沃朗卡（Woronka）和巴克洛（Barclow）应用魏德鲁姆（Wyndrum）的准确综合法[1]于$\overline{RC}$网络综合，从而引出一套微波滤波器理论，即一种应用林维尔（Linvill）法的有源滤波器结构的方法，结果并不导致集总元件。这种结构（图9-30）对于无源元件仅仅需要具有分路$\overline{RC}$短截线的共地级联的$\overline{RC}$线段。它是在利用负阻抗变换器（NIC）与$\overline{RC}$网络节相级联的早期方法[19]的基础上发展起来的。

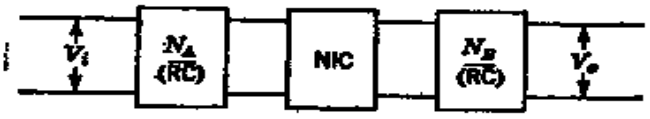


图 9-30 有源$\overline{RC}$网络结构

或许更重要的是，沃朗卡(Woronka)和巴克洛(Barclow)[20]阐述了实现有源均匀$\overline{RC}$网络获得复极点和有限复传输零点的z_{21}所必需的条件。首先，让我们回顾一下相应的基础资料。$\overline{URC}$元件（图9-31）*具有双曲线函数的导抗矩阵，它含有无限负实极点和零点。在准确的无源$\overline{URC}$综合法的最初发展期间[1]，用分路短截线、共地$\overline{URC}$元件的级联以获得有限

* 图9-31到9-36，经IEEE的许可摘自参考文献[20]。

传输零点。这些网络的相互并联，可有复传输零点。正实保角变换把超越函数式转变成新变量W的有理函数。$\overline{RC}$ 函数变成集总 LC 函数，即多项式的比。用理查兹 (Richards) 定理来完成综合。确立了策动点阻抗函数可实现的充要条件，以及转移阻抗函数可实现的充分条件 [1]。在W平面中得到详细的稳定性条件，它们当然与网络拓扑实现无关[20，21]。

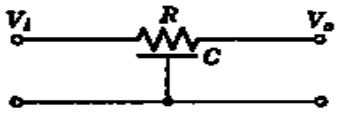


图 9-31 单段表征

$$Z_{11}=Z_{22}=\frac{R\coth\sqrt{sRC}}{\sqrt{sRC}}\Rightarrow\frac{R\coth\sqrt{sRC}}{\sqrt{RC}}\Rightarrow\frac{\alpha}{W}$$

$$Z_{12}=Z_{21}=\underbrace{\frac{R\,\mathrm{csch}\sqrt{sRC}}{\sqrt{sRC}}}_{s\text{ 平面}(\overline{RC})}\Rightarrow\underbrace{\frac{R\,\mathrm{csch}\sqrt{sRC}}{\sqrt{RC}}}_{\sqrt{s}\text{ 平面}(\overline{LC}\text{ 平面})}\Rightarrow\underbrace{\frac{\alpha(1-W^2)^{1/2}}{W}}_{W\text{ 平面(L-C平面)}}$$

用于此法中的$\overline{URC}$单段和双段节的特性，分别表征于图9-31 和 9-32。级联的$\overline{RC}$ 元件，当然只产生负实极点，虽然它们通常具有很难用综合步骤处理的无限多个离散的极点和零点。幸而，有可能把这些函数映入其它复频率平面，在那里它们变成简单的有理多项式之比，

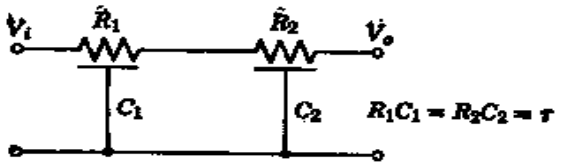
$$Z_{\overline{LC}}(\sqrt{s})=\sqrt{s}\cdot Z_{\overline{RC}}(s) \tag{9.31}$$

的变换使从 s 平面中的负实轴移到$\sqrt{s}$平面中的虚轴上的极点和（或）零点仍为无限个。另一个变换：

$$W=\tanh\sqrt{s\tau} \tag{9.32}$$

给出图 9-31 和 9-32 中所示的集总 LC 函数。

按图 9-30 的结构，利用这些级联的基本$\overline{RC}$ 元件和分路（短截线）的组合，使得有可能实现低通、高通和高Q带通结



$$\frac{Z_{11}}{R_1R_2} = \frac{[1 + R_1/R_2 \tanh\sqrt{s\tau}\,]}{\sqrt{s\tau}\tanh\sqrt{s\tau}\,(R_1+R_2)} \Rightarrow \frac{[1 + R_1/R_2 \tanh\sqrt{s\tau}\,]}{\sqrt{\tau}\tanh\sqrt{s\tau}\,(R_1+R_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+W^2)a_1a_2}{W(a_1+a_2)}$$

$$\frac{Z_{21}}{R_1R_2} = \frac{1}{\sqrt{s\tau}\cosh\sqrt{s\tau}\sinh\sqrt{s\tau}(R_1+R_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1R_2}{\sqrt{\tau}\cosh\sqrt{s\tau}\sinh\sqrt{s\tau}\,(R_1+R_2)} \Rightarrow \frac{a_1a_2}{\left(\frac{W}{1-W^2}\right)(a_1+a_2)}$$

式中 $a_1 = \frac{\sqrt{\tau}}{R_1}$

和 $a_2 = \frac{\sqrt{\tau}}{R_2}$

图 9-32 双段表征

构。

$W(=\Sigma + j\Omega)$ 平面的座标可用$\sqrt{s}\,(=U+jV)$ 平面来表示为

$$\Sigma = \frac{\sinh\sqrt{\tau}\,U\cosh\sqrt{\tau}\,U}{\cos^2\sqrt{\tau}\,V + \sinh^2\sqrt{\tau}\,U} \quad \text{(实轴)}$$

$$\Omega = \frac{\sin\sqrt{\tau}\,V\cos\sqrt{\tau}\,V}{\cos^2\sqrt{\tau}\,V + \sinh^2\sqrt{\tau}\,U} \quad \text{(虚轴)}$$

整个 s 平面将映入$\sqrt{s}$平面的闭合上半（或下半）区（图 9.33）。s 平面中的正实数频率轴对应于$\sqrt{s}$平面中的 45°（和 225°）线。在$\sqrt{s}$平面（图 9-34）中具有范围为

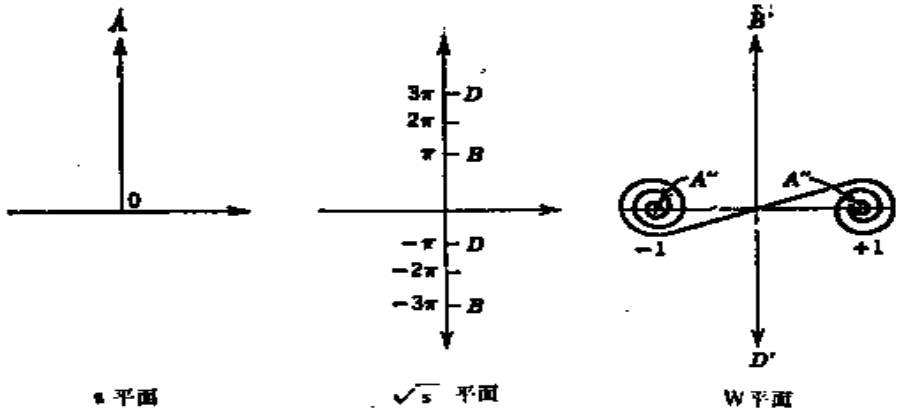


图 9-33　变换后的区域标志

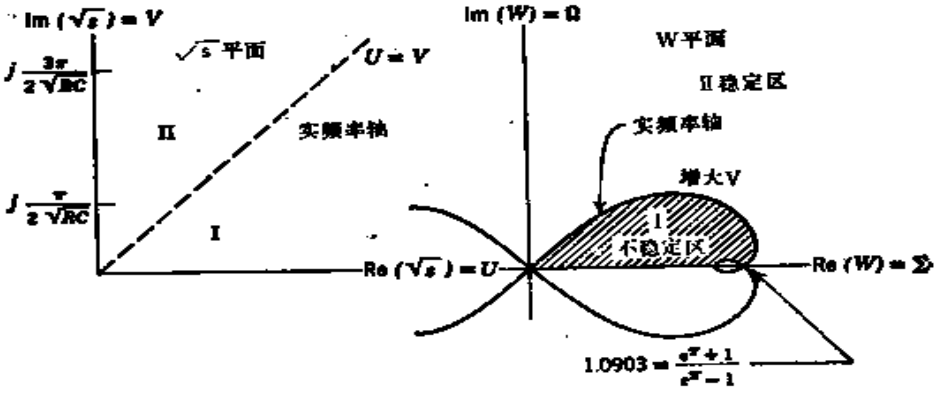


图 9-34*　$\sqrt{S}$→W平面映象

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{RC}}<Im(\sqrt{s})<\frac{\pi}{2\sqrt{RC}}$$

$$-\infty<\mathrm{Re}(\sqrt{s})<+\infty$$

* 图中$\sqrt{S}$平面原文误为 S plane，现已予更正——译者。

的半无限带将映入整个W平面。

实数频率轴（在$\sqrt{s}$平面中$U=V$）变成W平面中的螺旋形轨迹（图9-33)。对$s=0$，它从$W=0$开始，而且有四个支路。W平面第一象限中的螺线，在$W=1.0903=(e^{\pi}+1)/(e^{\pi}-1)$处与实轴相交，这相当于(加注在图9-33)$\sqrt{s}=\pi/(2\sqrt{RC})+j\pi/(2\sqrt{RC})$或$s=j\pi^2/(2RC)$。随着$\omega$的增加，螺线又在

$$s=j\frac{\pi^2}{RC},\ \text{即}\ W=0.996272\cdots=\frac{e^{2\pi}-1}{e^{2\pi}+1}$$

处再与W平面的实轴相交。已变换的实频率轴把W平面分成稳定和不稳定的工作区（图9-34)，分别对应于s平面的左半和右半面。图9-35说明s平面中的等Q[即选择性$Q=(\omega_0)/(2\sigma)$]线映入W平面的详细映象。它们与W平面实轴的交点为具有预定选择性（图9-35)，(特别是那些只需要W平面实极点的情况)的s平面转移函数的进一步设计提供了基础。

s平面中主极点的等Q[$=(\omega_0)/(2\sigma)$]线和W平面中的类

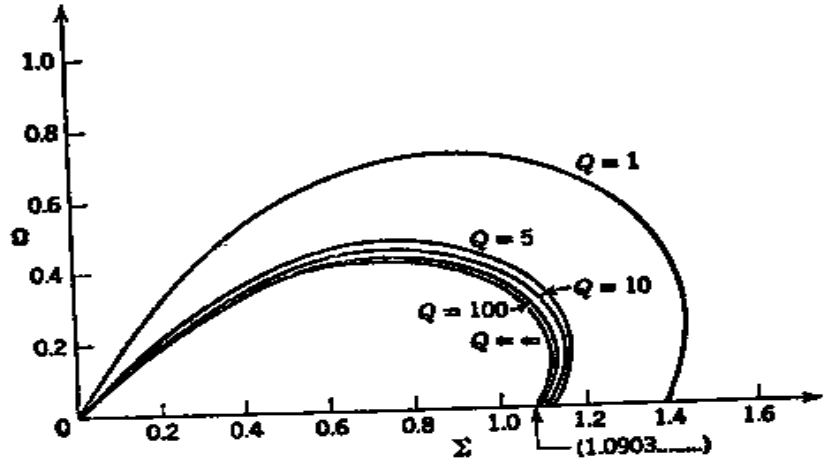


图 9-35 映入W平面的常数Q线

似轨迹之间的关系，给出于图 9-35 中。可是，在 s 平面中伴随主极点的其余极点必须加以考虑，而且这将对由主极点所单独预示的性能有所扰动。这在十倍主极点频率范围内，已证明是很小的。对于仅仅 W 平面正实轴极点为可实现的情况，关于 Q 和 $(\tanh^2\sqrt{s\tau}-|X|^2)$ 项的 X 的设计曲线由图 9-36 给出。W 平面中的极点，必须位于标定了 $U=V$ 的螺线之外以保证稳定性。所有这些导致：

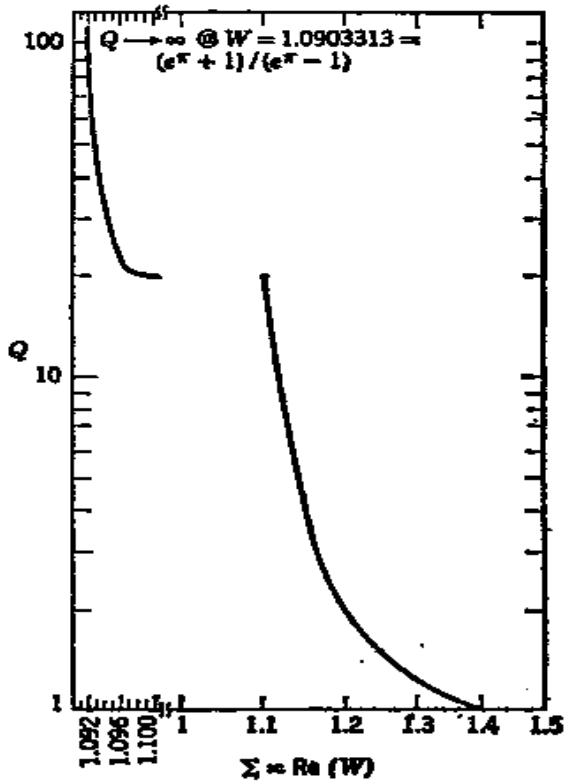


图 9-36 供选择（作为主极点的 $Q=\omega_0/q\sigma$ 的函数的）$W=\Sigma+J\,0$ 用的设计曲线

定理：一稳定有源分布 RC 网络函数在 $W=\tanh(a\sqrt{s})/2$ 平面为有理函数，且其分子（按 W）的次数低于或等于分母的充要条件是，所有 W 平面的极点都映射在由

$$\frac{e^{|\phi|}e^{j\phi}-1}{e^{|\phi|}e^{j\phi}+1}$$

所形成的区域（如图 9-35 中第一象限所示）之外，式中：$-\pi\leqslant\phi=\arg(1+W)/(1-W)\leqslant\pi$。

9.5 横向 $\overline{RC}$ 滤波器

在 1966 和 1967 年，W. I. H. 陈（W. I. H. Chen）和 R. C. 莱文（R. C. Levine）考虑了利用完全可集成的薄膜 $\overline{RC}$ 网络以实现规定时域响应（例如横向均衡器所需要的那样特性的可能性。横向滤波器（如我们可以在图 9-37 中看到的）有一种可以按任何方式互联的特殊分布抽头，通常是把其输出累加起来以形成所需要的输出信号。横向滤波器在传统上曾应用分布或集总 LC（无损耗）延迟线。除了在甚高频下工作以外，实现这种方法所需要的硬件的绝对体积已严格限制横向滤波器的使用。当然，可以用来代替它们的 $\overline{RC}$ 传输线，使滤波器体积缩小很多，因而揭示了（满足扩散方程要求的）$\overline{RC}$ 结构可以为纯 $\overline{LC}$ 延迟网络提供适当替换的可能性。所以，综合步骤实质上需要人们确定一种方法以估计每个抽头的波形成分，和一种把这些适当地累加起来以提供总信号的方法。横向 $\overline{RC}$ 滤波器可以是递归式的或者非递归式的，即有反馈的或者没有反馈的。陈（Chen）和莱文（Levine）为确定综合各种滤波器技术指标时所需要的系数而提供了一种数字计算机技术。他们在

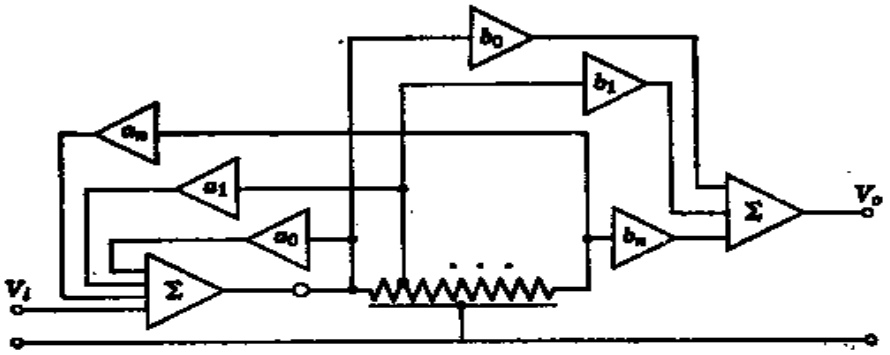


图 9-37 递归式抽头 $\overline{RC}$ 线

综合预定时域冲激响应的基础上进行工作，提供了一种确定系数 α_i 的算法，导致对所需冲激响应的最小均方误差近似。

在无反馈时对冲激的响应中，抽头的输出信号示于图 9-38*中。这当然是在假定为无限结构、或者是终接于另一$\overline{\text{RC}}$线以使输出端无冲激反射存在的一种结构下的准确解。注意抽头函数的几个特点。首先，峰值出现的时间，与抽头至输入端的距离的平方成正比。信号的峰值振幅，则与这个距离的平方成反比。我们看不出在通常意义上的时延，而只有色散现象（在输入端施加冲激的时候，部分信号就立即出现在所有抽头）。假定将抽头按规律 $X_n = kV_n$** 来取间隔，与有限线路有关的这族响应示于图 9-39 中。这些抽头信号既包括原始信号又包括由线路的两个不匹配终端引起的反射信号。假定输出端开路，并假定输入端为电压源激励。因为$\overline{\text{RC}}$线的特性阻抗 z_0 必须终接于无限长$\overline{\text{RC}}$线，才能使反射为零，故不可能建立能在输出端提供完全阻抗匹配的任何网络。在靠近$\overline{\text{RC}}$线输入端的那些抽头上的波形，和线路为无限长时的情况并没有多大不同。陈(Chen) 和莱文 (Levine) 发现，抽头的间隔需按 $x_n = k_n$的规律取点，其中 k_n 为换算因数，以保证各种波形的峰值都有等时间的间隔。陈 (Chen) 在博士学位论文中指出：这个间隔保证了这些抽头函数族的完整性。也就是说：按照上面规律所取间隔的抽头上所存在的函数，可以组合形成任何有限能量信号，例如对低通、带通或均衡器滤波器导出的那些信号；这在陈 (Chen) 的论文中是非常重要的结论。陈和莱文把他们的综合方法局限于实现时域中冲激响应的波形组合，这相当于频域中的低通滤波器结构。他们的逼近法建立在最小二乘方的方法

---

* 图 9-38 到 9-40，经 IEEE 的许可摘自参考文献[22]。

** W.I.H. 陈[22]已指出：这样间隔保证了这族抽头函数的完整性。

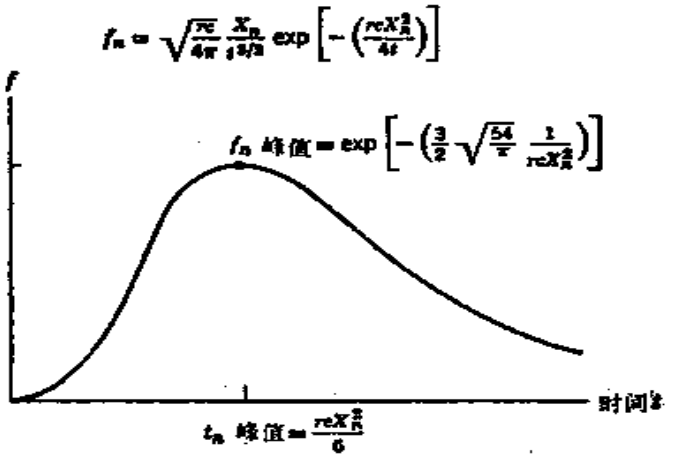


图 9-38 $\overline{RC}$ 横向滤波器在抽头距离输入端为 X_n 时的冲激响应

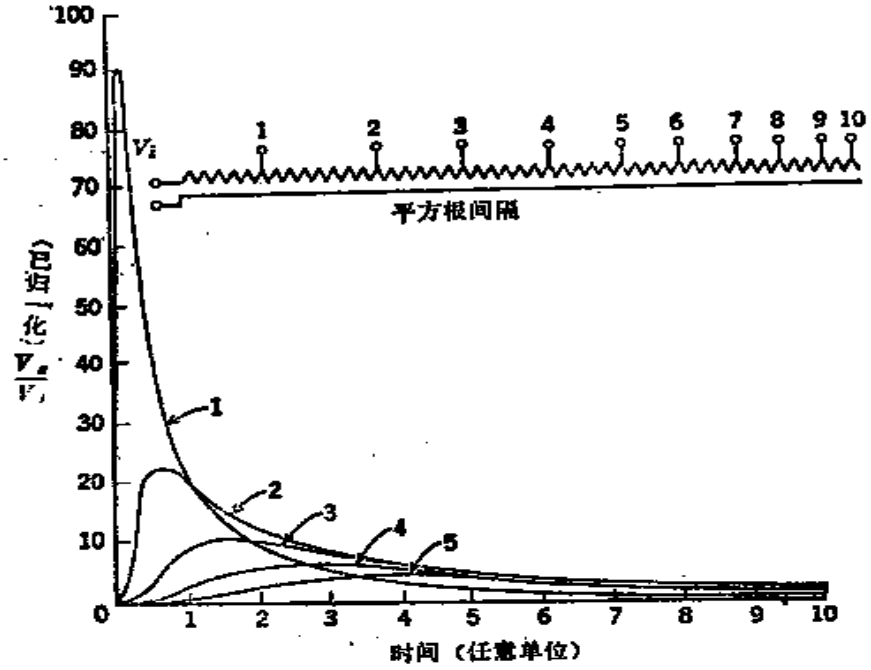


图 9-39 在按规律 $X_n = K\sqrt{n}$ 取间隔的抽头的情况下有限 $\overline{RC}$ 线的冲激响应

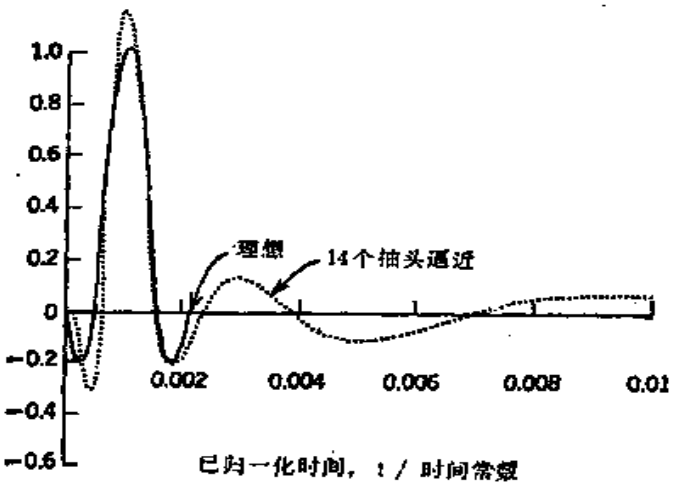


图 9-40 对期望时域函数的 14 个抽头逼近

基础上，在那里误差是按时域测量的。因而把误差表示为

$$I=\int_0^{\infty}\left[h(t)-\sum_{n=1}^{N}a_n h_n(t)\right]^2 dt. \qquad (9.33)$$

这里 h 为需要的冲激响应，h_n 为第 n 个抽头的冲激响应，而 N 则是最后抽头的数目。当然已经假定把抽头按照上面给定的规律来取间隔，结果得出 N 个代数联立方程。因为抽头函数已证明是线性独立的，所以对于 x_n 的每个正确值都保证了这些方程的非奇异解。计算是复杂的，而且必须在数字计算机上来实现。正和负的抽头值都需要。按陈和莱文早先的例子，用的是 14 个抽头 $\overline{\mathrm{RC}}$ 线试图近似图 9-40 所示的响应。这当然是非递归低通滤波器，所得到的时域近似值用虚线形式示于图9-40中。

关于 $\overline{\mathrm{RC}}$ 横向滤波器，人们可以得到的主要结论之一就是：利用少量具有非递归结构的抽头来实现实际的低通或带通滤波

器特性是困难的。因为要使对应于低通滤波器的简单函数的逼近变得好一些，需要用好几百个抽头来实现所期望的逼近（譬如说具有 0.1 到 0.3 dB 的准确度）。

然而，还有应用递归结构的另一种可能性未经充分的研究。正如我们在递归数字滤波器方面的经验表明的那样，所需抽头的数目可能会大为减少——也许总共只要 3 至 10 个抽头。D. A. 斯泡尔丁(D. A. Spaulding)的结论[23]已经说明情况正是如此，尽管实际上还需作进一步的努力以真正达到进行综合的目的。

9.6 集总和分布 RC 有源滤波器的比较

在考察既表征集总又表征分布 RC 网络的极点和零点的时候，人们发现了它们的基本相似性。事实上，在集总网络的零、极点和分布网络的零、极点之间的唯一基本区别，就在于它们数目的不同。也就是说，分布网络的特点在于其零、极点数目的无限性。尽管如此，两类网络的频率特性，基本上还是相似的。例如对于策动点阻抗函数，其零点和极点都沿负实轴交替出现，结果导致单调的频率特性。还可以指出许多其他相似性。一般说来，RC 和 $\overline{RC}$ 转移函数的关键频率的位置并不产生任何根本不同的频率响应类型。

因此，并不奇怪，利用 NIC 或运算放大器的有源分布 RC 网络并不显示和相应的有源集总 RC 滤波器有显著不同的特征。采用有源分布 RC 滤波器所获得的优点必然在于它们实现的简单性。因而，在任何特定情况下，达到具有较小总电容(因而总面积)或者较小总电阻的分布 RC 网络也许是可能的。电阻和电容函数共同具有同样的衬底面积，也是分布 RC 网络

(相对于集总网络)的优点。为了保证这些方法的实现，在微调 $\overline{RC}$ 网络以达到预定原始容差方面，就必须解决实际算法方面的许多问题。集总 RC 网络中的相应问题，有一种非常简便的解决办法，即调整分立的电阻器值。至于怎样微调与分布电容器密切相关（实际上是不能分离的）的分布电阻器？这个主要问题在很大程度上被忽略了，因而严重地限制了有源 $\overline{RC}$ 滤波器的使用。在引用分布 RC 网络的制造技术中，其终极目标是要在一块单一的硅集成片上既实现分布网络，又同时实现有源器件。虽然这已由考夫曼（Kaufman）建议了，但还未实际实现。

9.7 制造方面的考虑

直到现在，术语有源 $\overline{RC}$ 网络综合所具有的含义是，网络实现的无源部分为 $\overline{RC}$ 结构，而实现的有源部分则由分立的受控源组成。还没有分布有源器件的实际实现。在不久的将来可能会出现，例如薄膜晶体管或大面积 PN 器件它们能够提供有源分布增益。

不过，硅集成电路作为实际宽带集总增益器件和薄膜 $\overline{RC}$ 网络的组合，已为本章所叙述的综合技术提供基础。分布 RC 无源网络按薄膜构成最为合理。实际的分布网络可能是锥形递变的或者是均匀的。$\overline{RC}$ 网络还可能提供高通特性。这些网络结构中的每一个的转移函数，前面都已讨论过了。

一般说来，可以应用真空蒸发或阴极溅射这两种方法中的任何一种来作薄膜淀积。这些方法在参考文献中已有充分的说明。如果利用阴极溅射(假定钽为进行溅射的金属)，那么把钽溅射在适合的玻璃或陶瓷衬底上，在不需要钽的那部分则被光刻

法除去。接着，把剩余的钽部分氧化以形成绝缘的 Ta_2O_5 层。最后，将金沉积作为极板。利用这种方法，无源分布 RC 网络全电容的误差可不超过百分之几，而且可以把电阻层微调到千分之几的准确度。在薄膜衬底上有源器件可以由粘到互连垫片的梁式引线的硅集成电路片来提供。SIC 片的运算放大器已出现相当时间；单个集成片的回转器正在出现；而负阻抗变换器则很显然是可集成的。

如果准备按硅技术来制作分布 RC 网络，那么我们就可以利用与大面积 PN 结（在 SIC 中把它用来实现小电容器）有关的几何结构。PN 结对衬底是耐高反偏压的，而最上面的 P 型层则是导电良好的。蒸发接触会导致适当的 $\overline{RC}$ 网络。注意这就是用于集成电容器的同样几何结构。然而对于实际分布网络来说，要硅技术提供足够的精确度是靠不住的。这里有一点可取就是：PN 结本身的电容也许可由反馈误差信号电压来连续地进行电子调谐，以提供要求的转移函数特性。这样一种方法，已由考夫曼（Kaufman）在他早先关于分布 RC 陷波网络的论文中就提出了[5]。

最后，在薄膜技术而且肯定地在硅技术中，$\overline{RC}$ 网络的锥形递变，对有效的锥形因数来说，功绩不小。由于摄影术的局限性，通常不可能获得大锥形因数（$\beta>10$，这里 $r(x)=R_0e^{\beta x}$）的优点。

致谢

作者首先希望明白地答谢已在本章中取作参考的有关贡献。此外，J. S. 富 (J. S Fu)、Y. 富 (Y. Fu)、A. 格拉贝尔 (A. Grabel)、J. J. 戈伦比凯 (J. J. Golembeski)、W. J. 克尔温(W. J. Kerwin)和 W. 沃朗卡 (W. Woronka) 审阅了原

稿，而且提供了有价值的意见。

习　题

9.1　要求利用图 9-7 的结构来设计高 Q 选频放大器。假定准备由具有 1,000 的开环增益、10 KHz 的 3 dB 带宽而且对其 $Z_{入}>10^6$ 和 $Z_{出}<10\ \Omega$ 的运算放大器来实现 K。对 R、C 和 R_1 提供设计值，以便得到具有 $Q=10$ 和 $\omega_r=400$ Hz 的带通放大器。选择 R、C 和 R_1 值，使放大器网络接口的加载影响可以忽略。

9.2　画出能实现 R_1、R 和 C 的薄膜网络布局的粗略草图。假定电阻膜密度为 50 Ω/□，电容密度为 0.1 $\mu F/cm^2$。

9.3　现假定除采用锥形递变 RC 网络及带通结构的 Q 取为 20 以外，其他条件与习题 1 中所述相同。

应用图 9-11 的设计曲线，并考察习题 1 中有关网络负载的注意事项，试求当 $\beta=2$、5、10 时的 α 以及 R_1、R 和 C 诸值。

9.4　试就 $\beta=2$ 的情况，对习题 3 的解答拟出薄膜布局草图。

9.5　按在截止前具有峰值 3 dB>G(0)=0 dB 的要求，设计具有图 9-12 的网络拓扑的低通滤波器。

假定 G(440 Hz)=−10 dB。放大器的 $Z_{出}$ 可忽略不计。

9.6　重作习题 5，但现在假定运算放大器的出端阻抗为 1.0 Ω；在带阻范围之外必须大于−40 dB。

9.7　试用图 9.20 的网络拓扑设计一个在 $s=-100\pm j\ 10^3$ 时有“等效传输极点”、并在 $s=\pm j\ 3\times10^3$ 时有传输零点的有源滤波器。为了计算 R_1，需想到以与考夫曼(Kaufman)的陷波网络（图 9-3 a）相同的方式产生传输零点。

9.8　假定要用图 9-27 的滤波器去实现一在 $W=1$ 时 $Q=25$、且灵敏度 $S^{Q}_{\frac{1}{2}}\leqslant10$ 的带通放大器。用后续图中的设计图表去确定 R_1 和 K。

参 考 文 献

[1] R. W. Wyndrum, Jr., "The exact synthesis of distributed RC networks," Technical Report 400-76, Department of Electrical Engineering, New York University, May 1963; *IEEE Convention Record* 1965.

[2] R. P. O'Shea, "Synthesis using distributed RC networks," *IEEE International Convention Record*, Part 7,18-29 (1965).

[3] P. M.Chirlian, *Integrated and Active Network Analysis and Synthesis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.

[4] M. S. Ghausi and J. J. Kelly, *Introduction to Distiibuted Parameter Networks*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

[5] W. M. Kaufman, "Theory of a monolithic null device and some novel circuit applications," *Proc. IRE*, 48, 1540-1545 (Dec., 1960).

[6] W. M. Kaufman and S. J. Garret, "Tapered distributed filters," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-9, No. 4,329-336 (1962).

[7] J. J. Golembeski, "Distributed RC network tuning," *IEEE J. Solid State Circuits*, SE 4, 425-427 (Dec., 1969).

[8] G. J. Herskowitz and R. W. Wyndrum, Jr., "Design of distributed RC feedback networks for bandpass amplifiers," *Semiconductor Products*, 7,13-19 (1964).Also G. J. Herskowitz and R. Wyndrum, "Distributed RC networks for approximately maximally flat narrow band amplifiers," *Proceedings of the 9 th I. R. E. East Coast Conference on Aerospace and Navigational Electronics*, Baltimore, Maryland, (Oct., 1962) pgs. 1.1.2-1 through 1.1.2-7.

[9] M. J. Gay, "The design of feedback tuned amplifiers using distributed bridge-T networks," *Microelectronics and Reliability*, 3,93-107 (1964).

[10] R. P. Sallen and E. L. Key, "A practical method of designing RC active amplifiers," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-2, 74-85(March, 1955).

[11] W. J. Kerwin, "Analysis and Synthesis of Active RC Networks Containing Distributed Lumped Elements," Ph. D. Dissertation, Stanford University, (Aug., 1966).

[12] R. W. Wyndrum, Jr., "Active distributed RC networks" *IEEE. J. Solid State Circuits*, SC-3, 308-310 (Sept., 1968).

[13] H. Mahdi, "Synthesis of Active Distributed RC Circuits Using Uniform and Exponentially Tapered RC Networks," Ph. D.

Thesis, Northeastern University (March, 1970).

[14] W. Kerwin and L. P. Huelsman, "Digital computer analysis of distributed lumped active RC networks" *IEEE J. of Solid State Circuits*, **3**, No. 1,26-29 (March, 1968).

[15] L. P. Huelsman, "The distributed-lumped active network," *IEEE Spectrum*, 55 (Aug., 1969).

[16] W. J. Kerwin, "Synthesis of active RC networks containing distributed and lumped elements," *Proceedings of the Asilomar Conference on Circuits and Systems*, Pacific Grove, California, November 1,-3, 1967.

[17] S. P. Johnson and L. P. Huelsman, "A high-Q distributed-lumped-active network configuration with zero real part sensitivity," *Proc. IEEE*, **58**, 491-492 (March, 1970).

[18] W. J. Kerwin and C. V. Shaffer, "An integrable IF amplifier of high stability," *Proceedings, Eleven Midwest Symposium on Circuit Theory* (May, 1968).

[19] R. W. Wyndrum, Jr., "Microelectronic active filters," *New York University Technical Report*, 400-459 (May, 1962).

[20] R. W. Wyndrum, Jr., R. Barcklow, and W. Woronka, "Active distributed RC networks synthesis, *Proceedings Twelfth IEEE Midwest Circuit Symposium*, University of Texas (1969), Section XIII, pp. 7.1-7.12.

[21] J. Bourquin and T. Trick, "Stability of distributed RC networks," *Proceedings of the Eleventh Midwest Symposium on Circuit Theory*, Purdue University (May, 1968).

[22] W. I. H. Chen and R. C. Levine, "Computer design transversal filters using thin film RC distributed networks," *Proceedings of the Tenth Midwest Symposium on Circuit Theory of the IEEE* (May, 1967).

[23] D. A. Spaulding, "On the use of a tapped distributed RC transmi ssion line in zero forcing adaptive equalizer,"*Bell Telephone Laboratories*, unpublished memorandum (June, 1967).

10 开关滤波器的应用、表征和设计

M. R. 艾伦(M. R. Aaron)
贝尔电话实验室
荷姆德尔(Holmdel)，新泽西州

10.1 预备知识

开关滤波器被用在按脉冲形式来处理或传送信息的通信、控制和计算等许多领域。这里我们集中在应用于通信系统的开关滤波器的设计上。把这样一类滤波器用作从连续时间信号域到离散时域或者离散振幅域的桥梁，象在脉幅调制（PAM）和脉码调制（PCM）系统中那样。在进行更清楚描述这些应用领域之前，让我们先讨论几个简单问题。我们把这样一种滤波器怎么归类？它的示意图怎样？什么样假定才适合于分析和设计？本章的大部分内容都将集中于象图 10-1 中所示的一类滤波器上。为了使内容具体，我们将用无源集总网络元件表示，尽管也能包括有源网络而且也将要加以考虑。因而可知：这种开关滤波器除了在一个支路中嵌入开关以外跟任何其他无源滤波器几乎别无什么不同。而且并不奇怪！如果开关满足下面所给定的特性，开关滤波器显然符合于线性、时变网络的类型。

假定可以把开关的特性表征如下：

1．在开关接通（闭合）的时候呈低电阻。

2．在开关“不接通”状态（断开）的时候，则用高阻抗通常为无限大表示。

3．在接通和断开状态之间的过渡是短暂的。

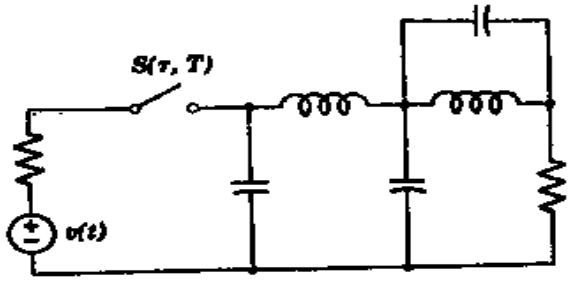


图 10-1 典型的开关滤波器

4．每T秒把开关闭合一个时间τ。

5．以上的特性与信号无关。

显然，低阻抗和高阻抗是相对的名称，并假定它相对于无源网络的元件是满足的。同样，开关的过渡时间与嵌入了该开关的网络的时间常数相比是短暂的。

在满足这些假定的情况下，开关滤波器就退化成线性、周期时变网络的特种类型—这种网络是分段稳定的。换句话说，在接通或断开的每一种状态中，网络都是线性和非时变的。事实上对这两种状态的每一种的网络拓扑可能不同，但并不妨碍分析。网络的某些明显部分是常数，使其很适合于应用线性非时变微分方程所较常用的分析方法，这在开关滤波器年代早就由贝内特(Bennett)[1]清楚地认识到了，他为确定我们前面所表征的网络的稳态响应提出了一个一般而准确的方法。德索尔(Desoef)[2]通过利用巴什科(Bashkow)[3]的A矩阵而简化了贝内特的运算并得出公式，而且他有可能一下子得到稳态响应和瞬态响应。桑德伯格(Sandberg)[4]采用了不同方法，并从周期变化的分段恒定元件的观点考虑了网络的分析。在图 10.1 的网络中，用周期性变动电阻器代替开关时，就可看成桑德伯

格所考虑情况中的一种特殊情况。所有这些准确方法都归入现代网络理论家叫做状态空间方法[5、6]范畴。和以上方法不同，费蒂韦斯 (Fettweis)[7] 则利用了零极点和傅里叶法，来获得包含一只周期性运行开关的网络的准确稳态响应。直到最近，准确方法对设计并没有强大影响。一般结果是很复杂的，而且它们又不能提供给设计者以便于理解的设计选择。由卡特莫尔(Cattermole)[8]、克劳利(Crowley)[9]、德索尔 (Desoer)[10]等人[11]最早提出的近似分析方法可用以简化分析，因而也对有用的设计法方面指出了方向。这就是我们要在本章强调的内容。现代计算机辅助设计是依靠逐次逼近法因而强调近似方法[12]，并增加了准确分析方法的效用。按这种步骤，初始设计就从近似分析开始，综合方法则可利用恰当的子程序来解析地加以试验[13]。元件值(或奇点)可在逐次逼近过程中加以改变以找到所需响应。早期"由计算机给出"网络的观点[14]真的是描绘了现行情况!

本章有几方面的目的。首先，我们需要指出开关滤波器用在哪里。这在 10-3 节中说明。第二个而且主要的目的，打算探索现行的设计方法。换句话说，我们怎样得到提供给计算机的初始近似的？这里我们着重介绍已长期采用但从未发表过的频域法[11]。另一目的打算表明简化假定在实际上能满足得多么好。我们的最后目的，打算指出工艺现状及其动向。我们的重点自始至终都在电路及其设计上，而不在数学的严密上。所以，我们不牵涉到那些学术的、无效的、实际上决不发生的病态情况。事实上，我们的数学要求是适度的（主要为拉普拉斯变换和傅里叶变换），而且大部分包括在下一节中。在那里把我们需要的公式导出来，因而本章基本上可以自己解决问题。

10.2 采样表示法和关系式

因为采样过程是讨论中的系统和网络二者的基础，复习几个关于连续时间波形转换成其离散时间样值的基础的简单概念，将是有益的。这里我们从脉幅调制（PAM）的观点来检查采样过程。在这种体制中，采样被看作为把脉冲载波$p(t)$和信号$v(t)$在乘积调制器中的相乘的过程，如图 10-2 所描绘的那样。如果各冲激都占有面积 A，那么脉冲载波可以表示为

$$p(t)=A\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT-t_0)\quad 0<t_0<T \qquad (10.1)$$

这里 $f_s=1/T$ 为采样频率，而 t_0 为“起始”时间。因为这个冲激串是周期的，故可把它展开成傅里叶级数并乘以$v(t)$而得到输出*

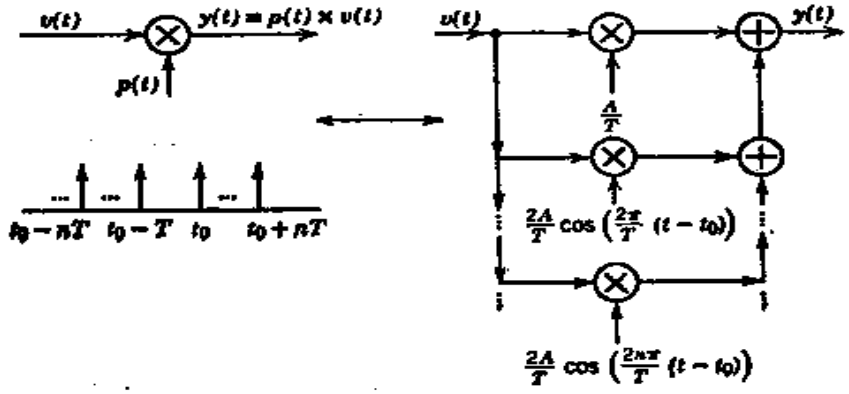


图 10-2 作为脉幅调制的采样

* 可以把方程(10.2)解释为一组(无限的)正弦波乘积调制器，其载波频率是采样频率的整数倍。各调制器都由输入信号激动，并把所有输出都加在一起。

$$y(t)=\frac{A}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}v(t)\cdot e^{j2\pi nf_s(t-t_0)}. \qquad (10.2)$$

这整节都假定：信号 $v(t)$是实函数，并且除了在 $t=0$ 以外并没有不连续性的点。那么(10-2)的傅里叶变换得出[15]

$$Y(\omega)=\frac{A}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}V(\omega+m\omega_s)e^{+jm\omega_s t_0}, \qquad (10.3)$$

式中 $Y(\omega)$是调制器输出的傅里叶变换，$V(\omega)$是输入信号的傅里叶变换(频谱)，$\omega=2\pi f$和$\omega_s=2\pi f_s$。如图 10-3 所示，如果采样频率太低，则信号频谱的位移值将重叠。这使无失真原信号不能从样值通过线性滤波而得到恢复。有两种补救办法：增加采样频率来减小重叠(叠混失真，混淆)，和（或）在采样前

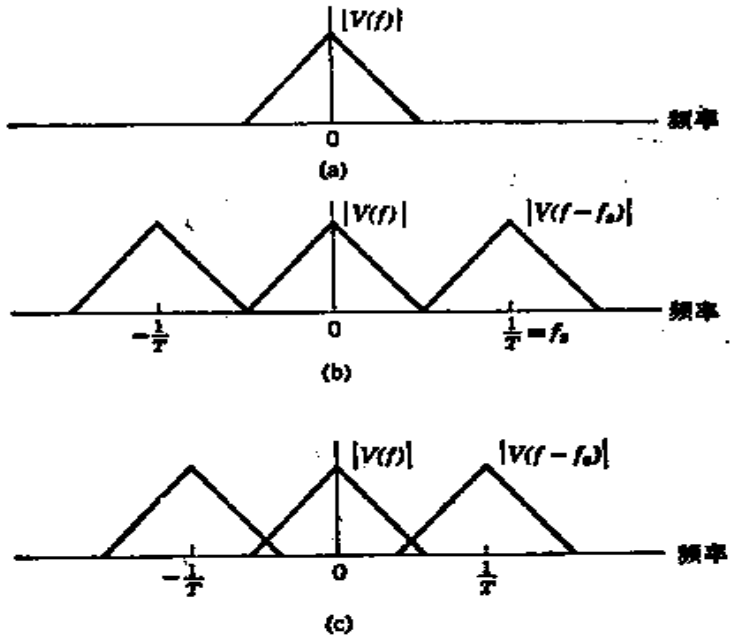


图 10-3 采样信号的振幅频谱：(a) 原信号的频谱，(b) 采样信号的频谱，(c) 在减低采样频率情况下的频谱

限制信号频带。正如以下的讨论所示，这些就是我们对开关滤波器感兴趣的主要原因。

下面导出采样输出串的傅里叶变换的另一形式。这将使我们依次导出一些以后将证明为有用的其他关系。如果我们回到(10.1)，乘以$v(t)$并一项一项地采取傅里叶变换，

$$Y(f)=A\sum_{n=-\infty}^{\infty}v(nT+t_0)e^{-j2\pi f(nT+t_0)}. \qquad (10.4)$$

使(10.3)和(10.4)相等给出的关系式，正是开关滤波器设计的核心所在；即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}v(nT+t_0)e^{-j\omega(nT+t_0)}=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}V(\omega+m\omega_s)e^{+jm\omega_s t_0}. \qquad (10.5)$$

方程(10.5)就是数学文献中通常所说的泊松(Poisson)求和公式[15]的一种形式。这里除其重要外，它又是求和级数的有用媒介物。如果把(10.5)的极限取为$t_0\to 0$，便得到更普通的形式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}v(nT)e^{-j\omega nT}=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}V(\omega+m\omega_s)+\frac{v(0+)}{2}. \qquad (10.6)$$

按照拉普拉斯变换(因为$v(t)=0$，当$t<0$时)

$$\sum_{n=0}^{\infty}v(nT)e^{-snT}=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}V(s+jm\omega_s)+\frac{v(0+)}{2} \qquad (10.7)$$

或

$$\frac{v(0+)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}v(nT)e^{-snT}=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}V(s+jm\omega_s). \qquad (10.8)$$

后面在以策动点（一端对）阻抗 $Z(s)$的冲激响应 $Z(t)$ 代替信号$v(t)$的情况下，我们便有机会来着重利用(10.8)。此外，考虑 $Z(s)$ 对有限宽度脉冲 $P(s)$ 的响应会是方便的。在一切情况下，$Z(s)$都会是 s 的有理函数。对于有理函数$Z(s)$,(10.8)中的级数可以很快加以总和，并容易计算 $v(0+)$。为了便于参考，这里我们将收集一些另外形式。为了避免伴随冲激进入网络(其阻抗函数 $Z(s)$理想上接近常数，例如纯电阻）而产生的一些数学混乱，我们不是用有限宽度脉冲来激励网络就是激励时考虑实际情况而附加上寄生电容，或二者都实行。就有限宽度脉冲来说，其变换为$P(s)$，因而我们在(10.8)中以 $P(s)$ $Z(s)$代 $V(s)$。这样，我们将只讨论实际上有意义的情况，这时，当 s 趋近无限大时，$P(s)$、$Z(s)$就接近于 $1/Cs^k$，这里$k\geqslant 1$。对本节来说，我们假定 $k=1$ 和 $P(s)=1$。

如果

$$Z(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\sum_{n=0}^{N}a_n s^n}{\sum_{m=0}^{M}b_m s^m} \tag{10.9}$$

式中$M=N+1$，那么由初值定理

$$z(0+)=\lim_{s\to\infty}s\cdot Z(s)\to\frac{a_N}{b_M s^{M-N-1}}=\frac{1}{C}. \tag{10.10}$$

$z(0+)$的另一种形式，可以由部分分式展开或 $Z(s)$ 的反变换来得到(对于单阶极点)(我们把它留给读者来证明)：

$$z(0+)=\sum_{m=1}^{M}Z(s)\text{在其极点的留数。} \tag{10.11}$$

因为已假定 $Z(s)$ 是有理的，其冲激响应由指数和组成，

使其易于计算(10.12)式*右边所示的表达式

$$\frac{1}{T}\sum Z(s+jm\omega_s)=\frac{Z(0+)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}z(nT)e^{-snT}. \quad (10.12)$$

显然，如果

$$Z(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{s+\gamma_m} \quad (10.13)$$

具有负实部的单阶极点$(-\gamma_m)$，其留数为 A_m，那么由

$$z(t)=\sum_{m=1}^{M}A_m e^{-\gamma_m t} \quad (10.14)$$

读者可以容易地证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}z(nT)\,e^{-snT}=\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{1-e^{-(s+\gamma_m)T}} \quad (10.15)$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}z(nT)e^{-snT}=\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m e^{-(s+\gamma_m)T}}{1-e^{-(s+\gamma_m)T}}. \quad (10.16)$$

因为(10.15)和(10.16)之差是 $Z(0+)$，(10.11)就较间接地得到证明。由(10.11)、(10.12)和(10.16)得到

$$\frac{1}{T}\sum Z(s+jn\omega_s)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}A_m\left[\frac{1+e^{-(s+\gamma_m)T}}{1-e^{-(s+\gamma_m)T}}\right] \quad (10.17)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}A_m\coth(s+\gamma_m)T/2^{**}, \quad (10.18)$$

从(10.13)中 $Z(s)$的形式，它顺便使我们能够证明熟知的展开

---

* 式中未表示关于和数的范围，它们是从$-\infty$延到∞。

** 在式(10.18)中，原文$\sum_{m=1}$应为$\sum_{m=1}^{M}$——译者

式(通常所示为 $\omega_s=\pi$)，

$$\frac{1}{\gamma}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma}{\gamma^2+n^2\omega_s^2}=\frac{\pi}{\omega_s}\coth\left(\frac{\pi\gamma}{\omega_s}\right). \qquad (10.19)$$

在结束本节之前，我们考虑一种概念上有用的理想化。假定 $Z(s)$为最小电抗型阻抗(在 $j\omega$ 轴上没有极点)[34]，并在直到一半采样频率的频带范围内实部为常数(R)，在其它频率都为零。那么它对单位面积电流冲激的响应为(习题 10.4)

$$z(t)=\left(\frac{2R}{T}\right)\frac{\sin\pi t/T}{\pi t/T} \quad \text{当 } t\geqslant 0$$

$$=0 \qquad \text{当 } t<0. \qquad (10.20)$$

(当然，这样一种冲激响应只能由有限集总参数网络来逼近(参看习题 10.5)。)因为 $n\neq 0$ 的 $z(nT)=0$ 和 $z(0+)=2R/T$，那么由(10.6)或(10.12)(以 $s=j\omega$)，我们有

$$\sum Z(\omega+m\omega_s)=R=\frac{T}{2C} \qquad (10.21)$$

最后等式中定义 $C=T/2R$是由博德(Bode)电阻积分定理[34]得出的(同阻抗函数的初值定理一样)。当我们继续进行时就要回到式(10.21)的这种概念和意义上来。

这样就收集了我们所需要的大部分公式。我们要特别着重说明这些结果不是新的，而是包括在有关 Z 变换和拉普拉斯变换的各种课本中[15]。这里这些公式是在采样课题内导出以使问题得到统一的实际观点。

10.3 应 用 范 围

开关调制器

开关网络的最初应用之一，是用在信号频率变换的调制器中。这些调制器在滤波器发明之后重要起来了。并且成为频分制多路复用（FDM）的基础。三十多年前为这些网络的设计所提出的理论和技术，与我们研究的时分制多路复用（TDM）的开关滤波器的设计确有特别关系。但是这个事实看来并没有广泛受到应有的重视。当想到乘积调制和采样本质上紧密相关时，很快就使我们回忆到有关开关调制器先驱者（彼德森(Peterson)[16]、赫西(Hussey)[16]、卡拉瑟斯(Caruthers)[17]、贝尔菲奇(Belevitch)[18]、塔克(Tucker)[19]、等等[20]*)的工作。为此，考察图 10-4 的开关调制器方框图。电路的目的是把输入信号频谱变换到(举例来说)载波的低边带。输入信号的频带由低通滤波器限制到比正弦载波的频率低得多，低通滤波器的出端阻抗（由输入变量器看入的）假定为R。同样地，由输出变量器向出端带通滤波器看入的阻抗也假定为R，并把它设计来通过载波的低边带。假设包括二极管、载波电源供给和变量器在内的电路是完全平衡的。而且，假定满足以下的条件：

1．环形调制器中的各二极管都有恒定的正向电阻r_f和恒定的反向电阻R_b。

2．假定载波振幅V_c比信号大得多。因而这个载波主要是

---

* 参考文献[20]包括一份广泛的文献目录介绍。

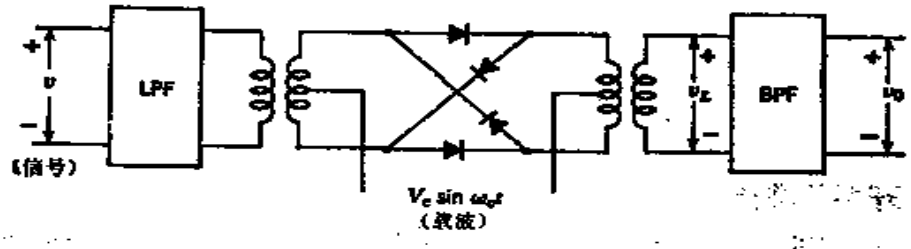


图 10-4　开关调制器的方框图

用来转换环形电路中二极管的正向和反向状态。就信号来说，这种假定认为：这个载波象个大的方波。

3．从电桥所看到的各滤波器阻抗（即R），假定满足$R=\sqrt{r_f \cdot R_b}$关系。

在上述假定之下，我们可为载波的正半周画等效格形网络，如图 10-5(a) 所示。利用平衡格形网络的所知关系[34]（或摊开电桥），我们可以把带通滤波器输入端的电压写为（工作在载波的正半周期间，用下标 1 表示）

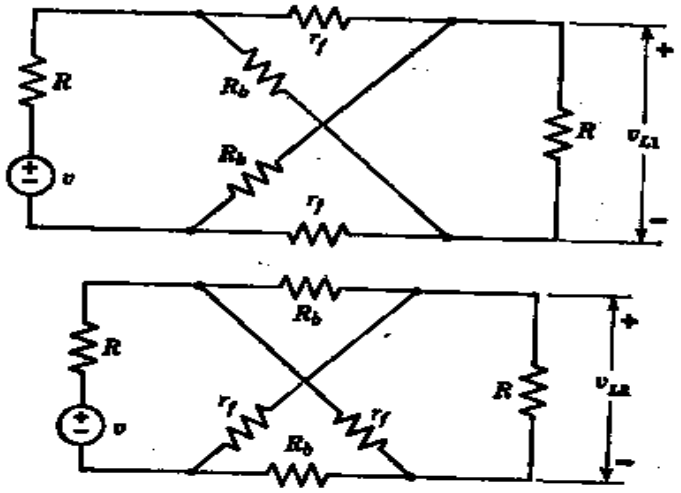


图 10-5　开关调制器的理想化等效电路：(a) 载波的正半周，(b) 载波的负半周

$$v_{L_1}=\frac{v}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{r_f}{R_b}\right)^{1/2}}{1+\left(\frac{r_f}{R}\right)^{1/2}}\right]. \tag{10.22}$$

利用图 10-5(b)，在载波的负半周期间（用下标 2）则把 v_L 导出为

$$v_{L_2}=-\frac{v}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{r_f}{R_b}\right)^{1/2}}{1+\left(\frac{r}{R_b}\right)^{1/2}}\right]. \tag{10.23}$$

可以把方程(10.22)和(10.23)结合起来写作

$$v_L=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{r_f}{R_b}\right)^{1/2}}{1+\left(\frac{r_f}{R_b}\right)^{1/2}}\right]x(t)\cdot v(t), \tag{10.24}$$

其中开关函数

$$x(t)=\begin{cases}1 \text{ 载波的正半周}\\ -1 \text{ 载波的负半周}\end{cases} \tag{10.25}$$

它是周期性的，其周期为 $2\pi/\omega_c$，并且可按傅里叶级数展开，给出

$$x(t)=\frac{4}{\pi}[\cos\omega_c t-1/3\cos 3\omega_c t+\cdots.$$

由(10.24)(卡拉瑟斯(Caruthers) 在 1939 年所得到的) 明显可见，该电路已简化为采样表示法一节中所考虑的乘积调制器。不过现在载波是方波，而不是冲激串。并且它的基频通常比信号中最高频率的两倍还高得多。

很明显，我们在分析中已进行了一些理想化，使电路简化为这样一种简单形式。从有效功率传输的观点，滤波器阻抗在

所需频带内应是恒定的，在不需要边带的范围内不是入端滤波器有很高的阻抗就是出端滤波器有很低的阻抗(反过来也一样)[17]。对于后面讨论的开关滤波器，可以看到类似特性也是需要的。其他实际因数，例如非线性、电路不平衡、寄生电容和实际选频的终接情况，已由几个作者考虑到了。考虑了现代半导体二极管特性的这个课题的新近著作，则已由先驱者之一D. G. 塔克(D. G. Tucker)完成了[21]。

时分制开关

关于50年代的分析和设计研究的主要动力，来自对时分制开关和时分制多路复用的新兴趣。晶体管的发明促进了这两个领域的再研究。在图10-6内所画的基本的时分制开关系统

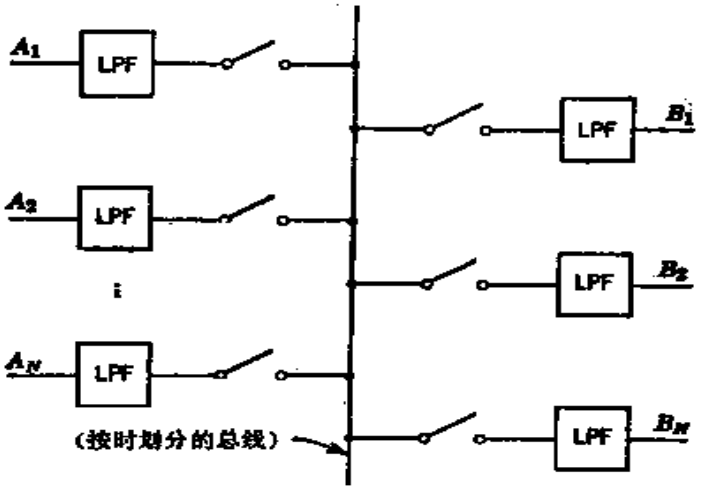


图 10-6 基本的时分制开关网络

中，每个用户线都有一低通滤波器和一采样门的设备。同步闭合在两条线路上的门，就提供一条通话路径。把这条通话路径，照额定采样率8 KHz闭合一个短时期(根据采样理论，它传送

带宽比 4 KHz 小的语音)。在各采样周期内采样门闭合的时间，必须短暂到允许其他用户也能划分使用公共"总线"的时间。当用户的数目增加时，分配给每个信道的时间就减少。如果假定从开关看入滤波器阻抗是电阻性的，那么在通话者之间所传输的能量就和接通对断开时间之比成正比。在比率小的时候就导致大量的能量损耗，在必须容纳许多用户的时候实际上就会是这样。幸而发展了这种技术。在断开期间就存储输入信号能量，在闭合的时候，则在短暂时间内就把信号能量全部传输到输出端。图 10.7 中所画的称为谐振转移的最常用方法是在 50 年代就分别由几个人*独自发明出来。卡特莫尔 (Cattermole) 除提供技术之外还对这方面提供了基本观点。他早先论述的论文[8]就是一个标志。他建立一个明确的实际形象，给出这种谐振转移电路的逻辑过程，并提出随后研究者可能依据的设计条

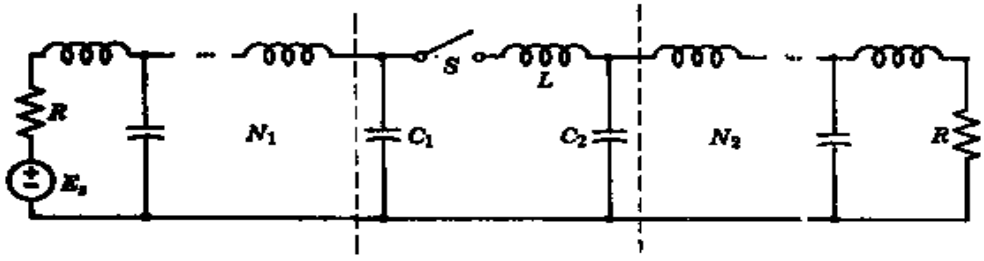


图 10-7　谐振转移开关网络

件。他在参考文献 [8] 中所提供的贡献，对这方面的一个认真研究者是必须要精读的内容。这里限于篇幅，不拟详细报导。

* H. B. 哈尔德 (H. B. Haard) 和 C. G. 斯瓦拉 (C. G. Svala)，美国专利 2,718,671 (1953.3.11；1952.3.12 在斯韦登 (Sweden) 首先提出)。K. W.卡特莫尔 (K. W. Cattermole)，英国专利 753,645 (1954.12.3)。J. A. T. 弗伦奇 (J. A. T. French)，英国专利 841，555 (1956.4.14)。W. D. 刘易斯 (W. D. Lewis)，美国专利 2,936,337 (1957.1.9)。

图 10-7 电路的理想特性是很简单的。考虑图 10-7 在虚线框内的那部分，并重示于图 10-8(a)。当开关断开的时候，入端滤波器的末尾电容器被充电至电源电压。把开关闭合一个相当于谐振回路的半周期时间。在此期间，电流波形是一个半周正弦波，如图 10-8(b)所示，电压波形则是余弦的。两个电容器交换其电荷，并当打开开关的时候，出端滤波器电容器上的电荷就放电到负载。对电路作近似分析的依据是：实际上在短暂闭合期间，中心谐振转移网孔以外电路元件中的电流和电压，基本上是恒定的。这种事实对所有的近似分析和设计技术都是决定性的。我们在 10.4 节中再详细地考虑这种电路。关

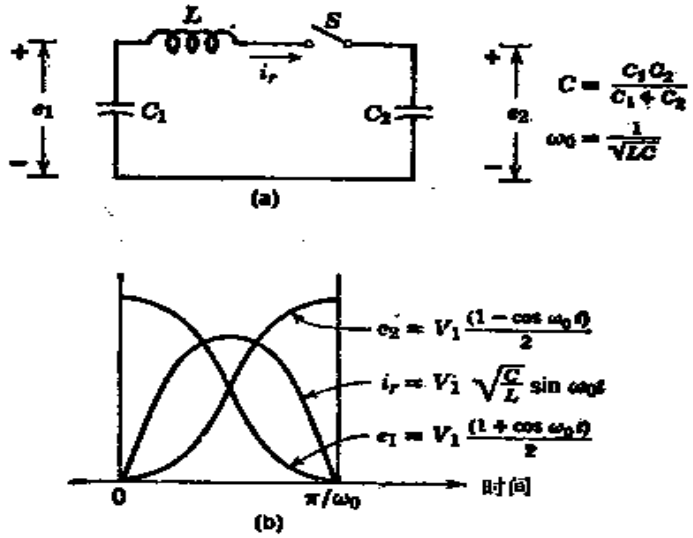


图 10-8 谐振转移波形：(a) 电路，(b) 波形。

于谐振转移电路的最全面讨论以及广泛的书刊介绍，读者可参考费蒂韦斯(Fettweis)的广博论文[22]，他本人对这方面已作了重要贡献。谐振转移开关是最通常用在专用小交换机(Private Branch Exchanges)中所用的 PAM 时分制开关系统中[23、

24]。

虽然我们着重谈了低通滤波器之间的谐振转移，但容易证明带通滤波器之间或低通和带通滤波器之间也可有谐振转移。后一种情况对思雷舍(Thrasher)所强调的开关和频分多路复用组合应用来说，是很重要的[25、26]。

时分制开关的另一形式，叫做数字时分制开关，使开关信号含有数字形式。数字转换过程中所需要的滤波器，则在下一节内加以考虑。

时分制多路复用和PCM

与时分制开关有密切关系的领域，就是时分制多路复用[27]。此时把图 10-6 的时分制总线分一半作发送另一半作接收，如图 10-9 所示。由于会遇到串话问题，要避免大距离和高速率的 PAM 传输。因此，通常把这种多路复用作为过渡到PCM的第一步，如图 10-9 所示。在PCM系统中[28]，把多路复用的PAM串送入时间上复用的模拟-数字转换器，以产生对

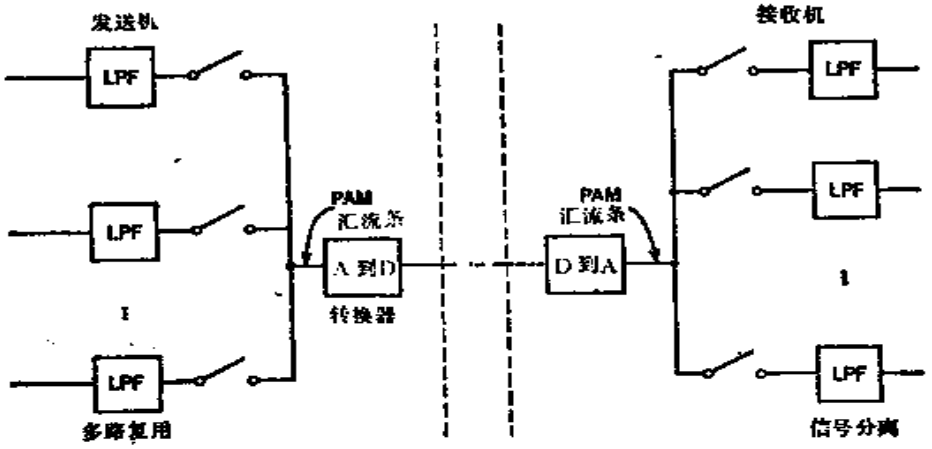


图 10-9 时分制多路复用

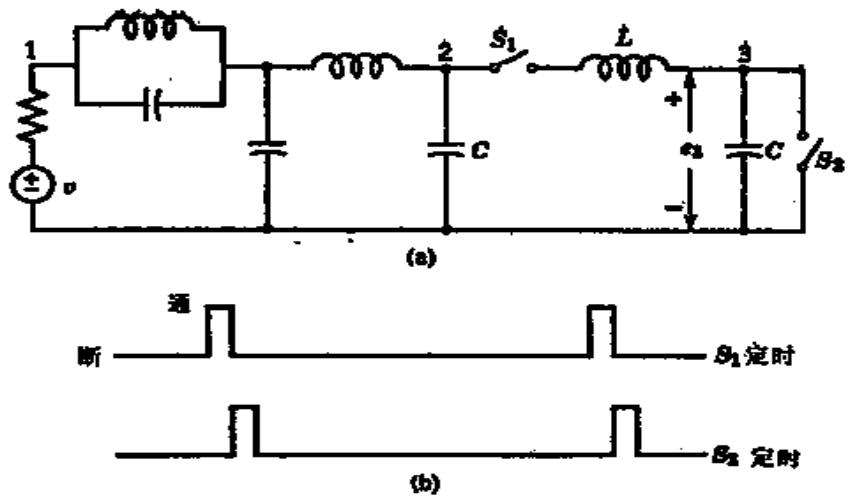


图 10-10 多路复用滤波器：(a) 网络，(b) 定时

PAM 脉冲幅值的数字逼近值。此时，开关滤波器可能采取如图 10-10 所示的形式，这看起来很象图 10-7 中谐振转移电路的一半。这里的一个主要差别就是：电容器 C_L 为 PAM 汇流条所共有，并被逐次地接到复用电路的每个信道上。因此，为了避免线路之间的串话干扰，在两个相邻的信道样值之间，把 C_L 箝位到低阻抗(放电)，如图 10-10 的时间图中所示。为了避免寄生电容的增长，减少对开关速度的要求并使串话干扰减至最少，通常把多路复用分级组成[29]，如图 10-11 所示。这意味着：为了使每个分级复用汇流条接入 A/D 转换器，就需要附加称为转移门（或再采样器）的开关网络。

用在 PCM 终端的另一类型网络是采样保持电路[30]，如图 10-12(a)所示。它可用于单路系统中以对频带限制滤波器的输出采样，或用在多路系统中接在滤波和采样后面。在后一种情况下，可能把采样保持用来从脉冲中心采样，这里它相对地不受转换瞬变现象和控制门脉冲漏泄所恶化。在两种情况下

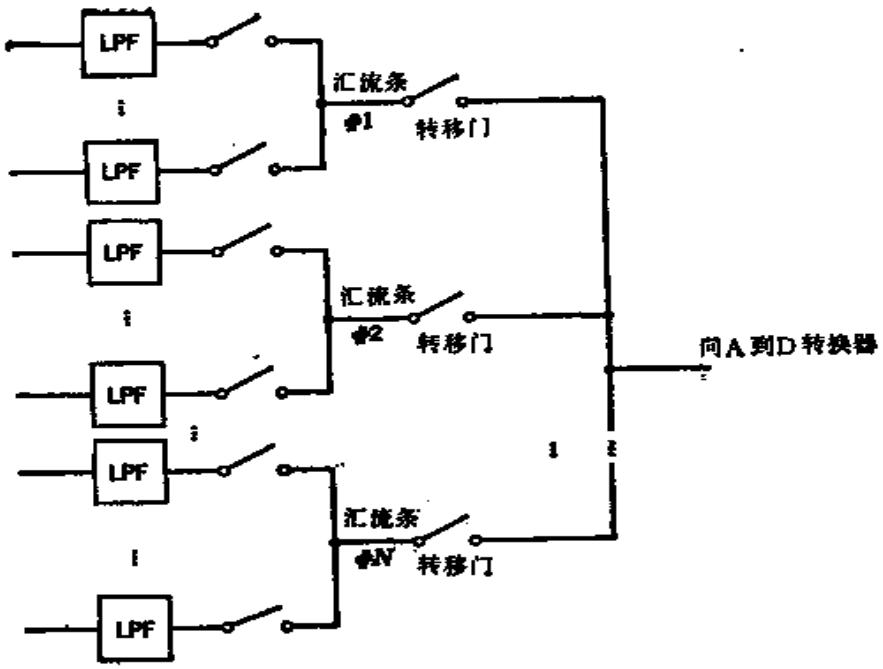


图 10-11　多级多路复用

都将在转换时间间隔内保持如图 10-12(b) 所示的理想平顶的脉冲样值送入 A/D 转换器。

在接收端，需要类似于图 10-1 所示的信道重建滤波器来重新构成同原模拟信号极为相似的复制品。我们的重点将放在这种应用的滤波器上。

其他应用

在载波控制系统中，需要提供环路波形而不必将载波抑制的双边带信号变换到基带。把提供这种“包络线”波形的网络叫做“AC 补偿网络”或同步网络。可以使用周期运行开关和 R 及 C 元件来实现它们而不用电感器。在许多方面它们都与前面

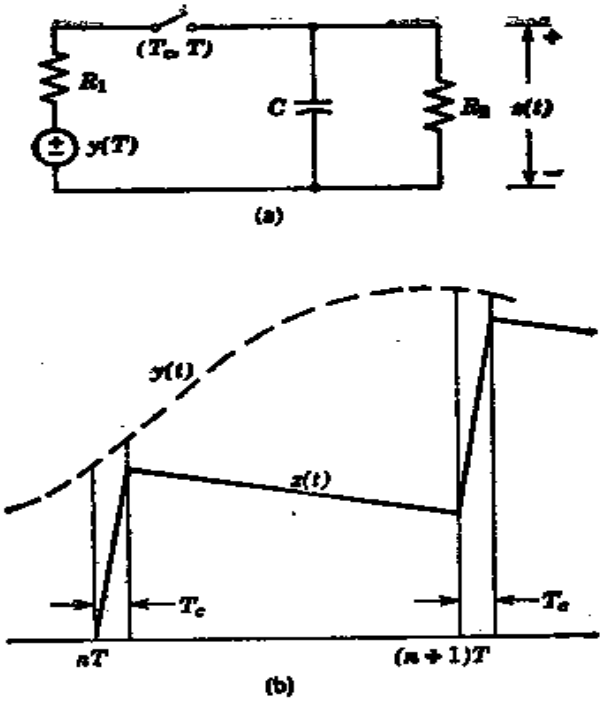


图 10-12　理想的采样保持电路和波形

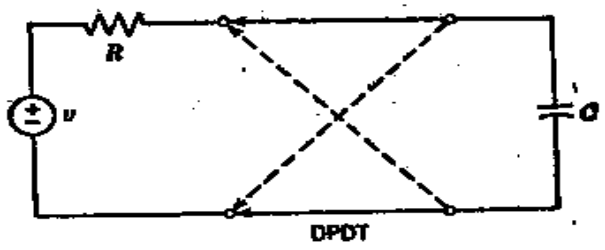


图 10-13　载波控制系统的 AC 补偿网络

所讨论的开关调制器类似。森(Sun)和弗里希 (Frisch) [31]所详细分析的一种简单同步网络，可以用如图 10-13 经过双刀双掷开关(DPDT)连接到电容器的 RC 网络来表示。 DPDT 开关显然相当于开关调制器，它具有描述开关的占空因数的周期开

关函数。森和弗里希利用状态空间方法，来提供准确的分析法和一种有效的综合法。有关设备实现的详细情形及其他参考文献，可以在 K. A. 艾维(K.A.Ivey)的书[32]中找到。

显然，在采样数据控制系统中需要开关滤波器。那里最常用的网络，也许就是前面提到的采样保持电路。它可用来给已调幅样值的窄脉冲串一个阶梯插值。准确的分析是直截了当但比较凌乱[4、30]。

最后，N通路滤波器的开关滤波器类型的应用，将在第11章中涉及。

10.4 近似分析和表征

线性变量网络的稳态分析

当联系结合几种开关网络近似分析法时，回忆几个很简单的关于线性变量网络的结果，将是有益的[33]。在这点上扎德埃(Zadeh)较其他人作了有用的贡献。

线性时变系统对具有傅里叶变换为$X(\omega)$的输入 $X(t)$的响应$y(t)$，定义为

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega,t)\cdot X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (10.26)$$

式中 $H(\omega,t)$为系统的转移函数。尤其是，可以由周期试验值 $Ie^{j\omega t}$ 的响应来决定它。在这种输入时，就容易把$H(\omega,t)$看作是网络对 $Ie^{j\omega t}$的响应 $y(t)$与 $Ie^{j\omega t}$之比($y(t)$除以 $Ie^{j\omega t}$)，即

$$y(t)=I\cdot H(\omega,t)e^{j\omega t}. \qquad (10.27)$$

如果我们进一步规定为周期T的线性周期时变网络，则很明显如使 t 变成 $t+T$，网络的稳态特性仍然是不变的。这意味着：

$e^{j\omega(t+T)}$的响应必须为 $y(t+T)$。

$$y(t+T)=I\cdot H(\omega,t+T)e^{j\omega(t+T)}。\qquad(10.28)$$

如果把(10.27)的两边都乘以 $e^{j\omega T}$，那么

$$y(t)\cdot e^{j\omega T}=I\cdot H(\omega,t)e^{j\omega(t+T)}\qquad(10.29)$$

由于线性关系，它必定是 $y(t+T)$。对比(10.28)和(10.29)立刻表明，系统函数具有周期为T的周期，并且由于线性关系，它与常数 I 无关。这个事实可由称为弗洛奎特 (Floquet) 理论的微分方程理论来更严密地加以证明。因为$H(\omega,t)$是周期的，可以把它展开成傅里叶级数，给出

$$H(\omega,t)=\sum_{-\infty}^{\infty}H_n(\omega)\cdot e^{j(2\pi nt/T)}。\qquad(10.30)$$

后面还要利用这个展开式，并主要涉及直流项

$$H_0(\omega)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}H(\omega,t)\,dt,\qquad(10.31)$$

可以把这解释为：在所有可能同间隔开始时间内平均的时变系统函数。显然剩余的傅里叶系数就表示在边带 $n\omega_s=n(2\pi/T)$ 左右的系统响应。在利用调制器作频率平移时，这类响应是有意义的。总之，必须在滤波器中提供足够的衰减，以阻止能量从一个边带进入另一边带的折叠现象。正如早在 10.2 节所指出的那样，这就叫做我们的对策。

在以上和整个以下的讨论中，假定输入信号的频率(ω) 和采样频率 (ω_s) 是不可通约的。而且，静态响应 $y(t)$不是 t 的周期函数，这可以从(10.28)和(10.29)看到；即，$y(t+T)=e^{j\omega T}\cdot y(t)$。后面这个事实，贝内特(Bennett) [1] 和贝尔菲奇(Belevitch)[18]两人都已指出过了。

一般评述

当开关闭合时间同周期比较是相对短的时候，可适用于开关滤波器的分析就有几种有效方法。因为我们已经指出过，在这种条件下，实际上可以把网络分离成本质上分开的两部分。德索尔(Desoer) 和卡特莫尔 (Cattermole) 两人都已在采用谐振转移的开关网络分析中利用这种近似法。卡特莫尔已表明，可以把开关用已调制脉冲序列所组成的一个等效电流源来替换。这个电流对网络的效应，就由这个网络在包迹(输入)频率的转移阻抗和这个网络的脉冲序列阻抗两者来决定。这个由卡特莫尔所杜撰的用语脉冲序列阻抗，则由函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z(nT)e^{-j\omega nT}=\frac{1}{T}\sum Z\ (\omega+m\omega_s)+\frac{z(0+)}{2}\equiv\underline{\underline{Z(\omega,+)}}$$

(10.32)*

或

$$\sum_{n=1}^{\infty} z(nT)e^{-j\omega nT}=\frac{1}{T}\sum Z(\omega+m\omega_s)-\frac{z(0+)}{2}\equiv\underline{\underline{Z(\omega,-)}}$$

(10.33)*

给出。这些公式已在 10.2 节中导出了，就是方程(10.7)和(10.8)。实际上，脉冲序列阻抗 $\underline{\underline{Z(\omega,+)}}$ 表示：一端对 $Z(\omega)$ 对(10.1)式所给定从 $-\infty$ 到 0 而且包括 0 的所有冲激的周期冲激串的响应。$\underline{\underline{Z(\omega,-)}}$ 的定义仍如上所述，只是没有发生过在零处的冲激。

德索尔使用一种把开关认为是冲激采样器的采样数据方

* 注意符号表示中的多余部分单纯为了检错。两横号连同加号，一横号则连同减号。

法。冲激采样器激励一种网络，其冲激响应为象征谐振转移作用的半周期、正弦脉冲。于是把这些成形脉冲用来激励围绕开关的滤波器。通过利用这种有限的脉冲形状，就有可能计及在卡特莫尔理想化分析中所忽视的门电路损耗的影响。此外，德索尔提供一个逐次逼近方法来计算开关的有限闭合时间。在作者所接触的任何一种通信应用中从来不需要这么高阶近似。可以指出：德索尔所给定的零阶近似与卡特莫尔所得的结果，对所有实际目的都是相同的。在极限情况下当德索尔所假定的脉冲形状变成一种冲击时，我们以后将证明这两个结果在数学上确实是相等的。

还有最初克劳利(Crowley)所用的著作还未发表的另一方法和卡特莫尔的方法紧密相关。这种方法明显利用这一事实，即如果时变周期和转换（采样）周期相等，则网络的时变转移函数是周期性的。还找到了提供开关损耗的一种简单方法。德索尔和卡特莫尔得到的结果，也可以用这种方法同样得出。我们将指出可以把这三种结果有效地结合。而且对初步设计来说，我们将指出：怎样可以把某些开关网络简化为一种近似的非时变滤波器[11]，而允许利用老式（但有效）的影象参数方法[34]。

卡特莫尔(Cattermole)的理想化分析

为了求得如图 10.7 所示的理想谐振转移双向信道(卡特莫尔所谓的双向直达信道）的转移函数，我们在本节中介绍卡特莫尔的方法。为了方便起见，在这里而且也在下节中我们假定两个低通滤波器是相同的。按卡特莫尔方法，把开关认为是理想的（接通电阻为零，断开电阻为无限大，而且在这两种状态之间转变的渡越时间为零），谐振转移线圈的 Q 为无限大，

而且低通滤波器是无耗的。为了阐明所涉及的概念，通过利用戴维南(Thevenin)等效和互易性，把这个图转化成图 10.14 的等效电路。这将允许我们把所有三种方法都放在同样的地位。各种符号定义如下：

1．Z_{22} 和 $Z_{33}(=Z_{22})$是在端对 2 和 3 分别看到的阻抗；

2．$Z_{12}=Z_{34}$ 是两个相同滤波器当中任何一个的转移阻抗；

3．$T=2\pi/\omega_s$ 是采样周期；

4．$\omega_s=$采样频率。

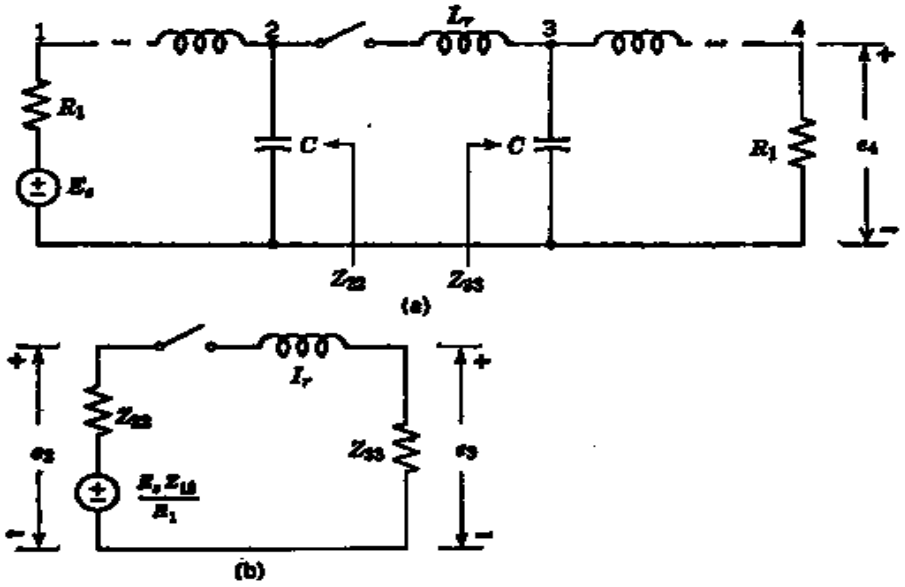


图 10-14　谐振转移开关的等效电路：
(a) 原电路，(b) 等效电路

卡特莫尔更进一步假定：开关和谐振转移电感器可以用电流发生器 I 来替换，这里

$$I=CF(\omega)e^{j\omega t}\sum\delta(t-nT)=\frac{CF(\omega)}{T}e^{j\omega t}\sum e^{jm\omega_s t} \tag{10.34}$$

是一个已调制的冲激序列，具有等于 $CF(\omega)e^{j\omega t}$ 的包络线。函数 $F(\omega)$ 应从边界条件来决定，而且正如以后看到的会证明它是与 10.4 节中所给定的系统函数（10.30）的傅里叶级数展开式中直流项 $H_0(\omega)$ 有密切的关系。此外，象在所有近似方法中的一样，低通滤波器的时间常数比短暂的闸门时间是大得很多的。因而在谐振转移环中的电容器互换电荷期间，存储在这些网络中的能量基本上仍然是不变的。在紧接发生每个冲激的前后，考虑边界条件可得到 $F(\omega)$。下列两个方程就是由于考虑边界条件的结果。第一个是

$$\frac{Z_{12}(\omega)}{R_1}-CF(\omega)\cdot\underline{\underline{Z_{22}(\omega,+)}}=CF(\omega)\cdot\underline{Z_{33}(\omega,-)} \tag{10.35}$$

这说明 $e_2(0+)=e_3(0-)$。第二个方程

$$\frac{Z_{12}(\omega)}{R_1}-CF(\omega)\cdot\underline{Z_{22}(\omega,-)}=CF(\omega)\cdot\underline{\underline{Z_{33}(\omega,+)}} \tag{10.36}$$

则是从 $e_2(0-)=e_3(0+)$得出的。在手头的特殊情况下，已把低通滤波器假定是相同的，因而方程之一就足以决定 $F(\omega)$ 是

$$F(\omega)=\frac{Z_{12}(\omega)/CR_1}{\underline{\underline{Z_{22}(\omega,+)}}+\underline{Z_{22}(\omega,-)}}. \tag{10.37}$$

因为电流 I 在频率 ω 的分量是 $F(\omega)/T$，输出电压在输入频率的分量只不过是 $Z_{34}(\omega)\cdot CF(\omega)/T$。由此得出这种转移函数为

$$\frac{E_4(\omega)}{E_1(\omega)}=H_0(\omega)=\frac{[Z_{12}(\omega)]^2}{R_1T[\underline{\underline{Z_{22}(\omega,+)}}+\underline{Z_{22}(\omega,-)}]}. \tag{10.38}$$

以后将说明这个表达式确实就是 $H_0(\omega)$。所以，借助于(10.32)

和(10.33)把(10.38)的分母转化成另一形式，将是有用处的。利用这些方程，我们就可以写出

$$\frac{E_4(\omega)}{E_1(\omega)}=H_0(\omega)=\frac{[Z_{12}(\omega)]^2}{2R_1\sum Z_{22}(\omega+m\omega_s)}. \qquad (10.39)$$

因为我们已假定滤波器是无耗的，大家都知道[34]（而且易于证明），$Z_{22}(\omega)$的实部为

$$\mathrm{Re}[Z_{22}(\omega)]=\frac{|Z_{12}(\omega)|^2}{R_1}. \qquad (10.40)$$

由于有这个关系，可以把(10.39)写成

$$H_0(\omega)=\frac{\mathrm{Re}[Z_{22}(\omega)]}{2\sum Z_{22}(\omega+m\omega_s)}. \qquad (10.41)$$

更理想化的式子将使我们能证明：在极限情况下，对相当于采样频率一半的频带范围内的信号来说，零值插入衰减是可达到的。如果各滤波器都是理想低通滤波器，在采样频率一半以内具有平坦通带而且超过这点就全无传输，那么$\mathrm{Re}[Z_{22}(\omega)]=R_1$而且从(10.21)可知(10.41)式分母中的总和也等于R_1。在所有上述的理想化条件下，尽管开关只闭合采样周期的一很小部分时间，理论上是有可能得到零值插入衰减的。这确实是一很显著的结果，而且正如以后看到的，实际上这可用有限的、其实相当简单的经济网络极为接近实现的。

德索尔(Desoer)的分析

如以前所指出的那样，德索尔对谐振转移器的响应的零阶逼近，也是以谐振转移环路和低通滤波器的其余网孔之间的时间常数有大的差异为根据。应用这样假定，在开关闭合的短暂时间就不需要考虑中心谐振转移网孔以外的电流和电压。当开关闭合时，这就直接导致描述图(10-14)的初期松弛的谐振转移

网孔的如下方程组

$$e_2(t)=v(t)-\int_0^t i_r(\tau)\cdot z(t-\tau)d\tau \qquad (10.42)$$

$$e_3(t)=\int_0^t i_r(\tau)\cdot z(t-\tau)d\tau \qquad (10.43)$$

$$e_2(t)-e_3(t)=v(t)-2\int_0^t i_r(\tau)\cdot z(t-\tau)d\tau \qquad (10.44)$$

式中：$v(t)$是在端对 2 上的开路电压，$z(t)$则是$[Z_{22}(s)]$的反变换。德索尔提到，这些方程也可能由图 10-15 的方框图得出。特别 (10.44) 描述图 10-15 的脉冲调制器的输入，即 $V(s)-2Z(s)\cdot I_r(s)$，这就是 (10.44) 右边的拉普拉斯变换。由方框图、(10.44) 和谐振转移网孔，显然，冲激调制器的输入为 $e_2(t)-e_3(t)$。对于时间区间 $0\leqslant t<T$，那时脉冲形成网络的输出 $C\cdot P(s)$为 $C[e_2(0)-e_3(0)]p(t)$，这就是谐转移振电流，并有

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\tau}\sin\dfrac{\pi t}{\tau} & 0\leqslant t<\tau\\ 0 \text{ 在别处}\end{cases} \qquad (10.45)$$

和

$$P(s)=\mathscr{L}[p(t)]=\frac{\omega_0^2}{s^2+\omega_0^2}(1+e^{-s\tau}) \qquad (10.46)$$

式中

$$\tau=\frac{\pi}{\omega_0}=\sqrt{\frac{2}{CL_r}}. \qquad (10.47)$$

利用方框图来得到零阶近似（由标准采样数据方法）给出

$$E_4(s)=$$

$$=\frac{R_1\frac{1}{T}[\sum Z_{12}(s+jm\omega_s)\cdot E_1(s+jm\omega_s)]CP(s)\cdot Z_{12}(s)}{1+2C\left[\frac{1}{T}\sum P(s+jm\omega_s)\cdot Z_{22}(s+jm\omega_s)\right]} \qquad (10.48)$$

式中起始条件 $\lim_{s\to\infty} sP(s)\cdot Z_{22}(s)$ 为零。当 $\tau\to 0$，$P(s)\to 1$，则起始条件为非零的，而且如德索尔所指出反馈回路确实是不稳定的。这是由于冲激调制器的冲激直接馈入反馈回路上的阻抗 Z_{22} 里，并在其入端电容那里产生阶跃的事实引起。这又立刻在脉冲调制器的输入端产生阶跃而使脉冲调制器输出端的脉冲在量度上引起跃变，从而一直跳上天！回路是不稳定的。有两种防止这问题发生的方法。德索尔在他的附录 IV 中给出一种方法，这种方法包括把半正弦脉冲的序列提前 $\tau/2$，以使脉冲调制器工作时，门电路上的电压就为零。避免在 $P(s)$ 达到 1 ($\tau\to 0$)时发生跃变反馈的另一直接方法，就是消除它们。这是用(10.33) 替换 (10.48)式分母中括弧内的这个项来完成的。

$$\frac{1}{T}\sum Z_{22}(s+jm\omega_s)-\frac{1}{2C}=\underline{Z(\omega,-)} \qquad (10.49)$$

每逢 $\tau\to 0$ 就得到：

$$E_0(s)\equiv E_4(s)]_{\tau=0}=\frac{[\sum Z_{12}(s+jm\omega_s)\cdot E_1(s+jm\omega_s)]Z_{12}(s)}{2R_1[\sum Z_{22}(s+jm\omega_s)]} \qquad (10.50)$$

如果 $\tau\to 0$ 这与德索尔的结果是相同的。为了得到对输入 $e_1(t)=Ee^{j\omega t}$ 的稳态响应，我们把 $E_1(s)=E/(s-j\omega)$ 代入(10.49)得到

$$E_0(s)=\frac{1}{2R_1}\cdot\frac{E\left[\sum Z_{12}(s+jm\omega_s)\cdot\dfrac{1}{s+jm\omega_s-j\omega}\right]Z_{12}(s)}{\sum Z_{22}(s+jm\omega_s)}。 \qquad (10.51)$$

稳态响应由(10.51)式分子中和数的虚轴极点而得到（因为 $Z_{12}(s)$ 没有这样的极点），因此，稳态响应具有形式

$$\sum_{-\infty}^{\infty} H'_{m0}(\omega)\cdot e^{j(\omega+m\omega_s)t} \tag{10.52}$$

式中 $$H'_{m0}(\omega)=\frac{EZ_{12}(\omega)\cdot Z_{12}(\omega+m\omega_s)}{2R_1\sum Z_{22}[\omega+(k+m)\omega_s]}. \tag{10.53}$$

响应应当具有(10.52)所给定的形式这一点是从关于 10.4 节中(特别是(10.27)和(10.30)式)所包括的变量网络的稳态响应的一般结果推出的。我们的兴趣集中在 H'_{00}，或特别是

$$\frac{E_0(\omega)}{E_1(\omega)}=\frac{H'_{00}(\omega)}{E_1(\omega)}=\frac{[Z_{12}(\omega)]^2}{2R_1\sum Z_{22}(\omega+k\omega_s)} \tag{10.54}$$

可以看到这和卡特莫尔方法所得到的(10.39)是相同的。德索尔分析的主要优点在于当处理谐振转移网孔包含由于有限电感器 Q 与(或)开关电阻而引起的损耗时，包括了波形因数 $P(s)$。在这类情况下很明显，全部电荷交换是不可能有的，这类情况下的不可避免的这种损耗，可以由包括脉冲形状的更一般结果(10.48)式来计算。此时如果我们用 $H'_m(\omega)$（注意相当于 $\tau=0$ 的下标零已被去掉）表示稳态响应的系数(如(10.52)中所示)，读者应能从(10.48)出发，并用类似于从(10.50)到(10.53)中

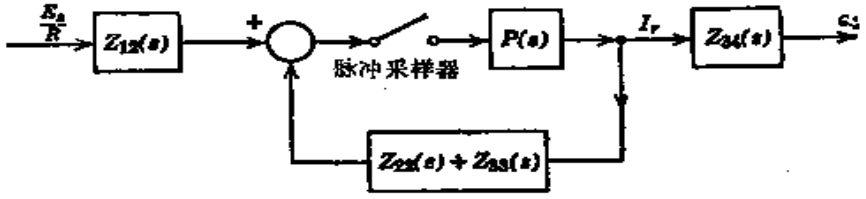


图 10-15 逼近于图 10-14 的谐振转移器的采样数据系统

所用的步骤来得到

$$\frac{2R_1H'_m(\omega)}{E}=\frac{Z_{12}(\omega)\cdot P(\omega+m\omega_s)\cdot Z_{12}(\omega+m\omega_s)}{\frac{T}{2C}+[\sum P(\omega+k\omega_s)\cdot Z_{22}(\omega+k\omega_s)]}. \tag{10.55}$$

以后我们将指出脉冲波形因数在检查无谐振的转移开关滤波器中是有用的。

正式傅里叶级数方法

卡特莫尔(Catterınole)的方法基本上是一种傅里叶级数方法*。克劳利(Crowley)在未发表的1956年的著作中独立地探索了同样路线。我们讨论的大部分是按照克劳利的更正式傅里叶级数的方法。除门电路特性之外，其余所有假定都与先前使用的方法一样。门电路可由下式表征（参看图10-14）

$$e_3(nT+\tau)-e_2(nT+\tau)=G[e_2(nT)-e_3(nT)]. \tag{10.56}$$

因为将假定冲激调制，可以把(10.56)写成

$$e_3(nT+)-e_2(nT+)=G[e_2(nT-)-e_3(nT-)]. \tag{10.57}$$

如果$G=1$就易于看出，(10.57)表示谐振转移电路的电荷交换特性。另一方面对于$G<1$，(10.57)表示在有损耗谐振转移网孔中的电荷交换，为了以后参考起见，我们也指明，$G=0$表征了电路在门电路是一个把e_3箝位到e_2的低电阻的情况。

因为谐振转移网孔中的电流具有周期为T的周期性，故可以把它明确地写成傅里叶级数

$$I=\frac{Q}{T}\sum e^{j(\omega+n\omega_s)t} \tag{10.58}$$

此式只不过是用Q替换了(10.58)中的$CF(\omega)$。量Q将由电荷交换条件(10.57)来决定。借助于(10.58)就易于看出，可以把电压$e_2(t)$和$e_3(t)$表示为

---

* 费蒂韦斯（Fettweis）在他1959年的论文中为开关滤波器导出一准确分析步骤中也利用了周期性。

$$e_2(t)=\frac{Z_{12}(\omega)e^{j\omega t}}{R_1}-\frac{Q}{T}\sum Z_{22}(\omega+n\,\omega_s)e^{j(\omega+n\omega_s)t}$$

(10.59)

和

$$e_3(t)=\frac{Q}{T}\sum Z_{33}(\omega+n\,\omega_s)e^{j(\omega+n\omega_s)t} \qquad (10.60)$$

注意根据假定 $Z_{22}(\omega)=Z_{33}(\omega)$和 $E_s=e^{j\omega t}$。为了求解 Q，我们首先写出 $v(t)=e_3(t)-e_2(t)$并在 $t+=NT+\varepsilon$ 和 $t-=NT-\varepsilon$ 计算它。把 $v(t)$代入(10.57)，再从上面所述取极限 $\varepsilon\to 0$，把(10.57)变成

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(NT+\varepsilon)=-G\lim_{\varepsilon\to 0}v(NT-\varepsilon) \qquad (10.61)$$

式中：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}v(NT\pm\varepsilon)$$

$$=e^{j\omega NT}\left[\frac{Z_{12}(\omega)}{R_1}-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\,Q}{T}\sum e^{\pm j(2\pi n\varepsilon/T)}\cdot Z_{22}(\omega+n\,\omega_s)\right].$$

(10.62)

计算(10.62) 中的极限时必须加以注意。一般说来，极限的运算与求和不能加以互换，除非和数是均匀收敛的，但这对现有情况是不确切的。幸而我们已经为取 (10.62)式右边关于正号的极限铺平了道路 (参看(10.6))；即从(10.5)

$$\frac{1}{T}\sum e^{+j(2\pi n\varepsilon/T)}\cdot Z_{22}(\omega+n\,\omega_s)=\sum_{k=0}^{\infty}z(kT+\varepsilon)\,e^{-j2\pi f(kT+\varepsilon)}$$

(10.63)

对于有理的 Z 可以应用(10.15)把这表示为有限和。

$$\frac{1}{T}\sum e^{+j(2\pi n\varepsilon/T)}\cdot Z_{22}(\omega+n\,\omega_s)=\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m e^{-\gamma_m\varepsilon}}{1-e^{-(j\omega+\gamma_m)T}}.$$

(10.64)

因为 γ_m 有正实部，很明显在右边的极限是有限的，从而由

(10.6)我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{T}\sum e^{+j(2\pi n\varepsilon/T)}\cdot Z_{22}(\omega+n\omega_s)=\sum_{k=0}^{\infty}z(kT)e^{-j2\pi fkT} \tag{10.65}$$

这就是我们熟悉的$\underline{Z_{22}(\omega,+)}$。同样地

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{T}\sum e^{-j(2\pi n\varepsilon/T)}\cdot Z_{22}(\omega+n\omega_s)=\sum_{k=1}^{\infty}z(kT)e^{-j2\pi fkT}, \tag{10.66}$$

而这个恰恰就是$\underline{Z_{22}(\omega,-)}$。因而可以把(10.62)写成

$$\frac{Z_{12}(\omega)}{R}-\underline{\underline{2Q\cdot Z_{22}(\omega,+)}}=G\left[2Q\cdot\underline{Z_{22}(\omega,-)}-\frac{Z_{12}(\omega)}{R}\right]. \tag{10.67}$$

对(10.67)求解Q得出

$$Q=\frac{\frac{Z_{12}(\omega)}{2R_1}[1+G]}{\underline{\underline{Z_{22}(\omega,+)}}+G\,\underline{Z_{22}(\omega,-)}}. \tag{10.68}$$

比较(10.68)和(10.37)揭示出：如果$G=1$，不出所料、Q就是卡特莫尔的$CF(\omega)$。I在输入频率(10.58)的$n=0$项)的分量为Q/T。那时，输出电压对输入电压之比只不过是

$$\begin{aligned}\frac{E_4(\omega)}{E_1(\omega)}&=\frac{Q}{TE}Z_{12}(\omega)\\&=\frac{[Z_{12}(\omega)]^2[1+G]}{2R_1T[\underline{\underline{Z_{22}(\omega,+)}}+GZ_{22}(\omega,-)]}\end{aligned} \tag{10.69}$$

当$G=1$时则变成(10.38)。

看来在我们在考虑开关滤波器的其他型式的设计之前，最好对前面这相当详细的三节作一个简短的概括。首先，按照卡特莫尔、德索尔和克劳利的著作，我们已看到在带有开关的滤

波器之间、把开关闭合很小几分之一周期，达到无耗能量传输，原则上是可能的。所有方法都导致周期性系统函数，其直流分量 $H_0(\omega)$ 则使输入频率的输出电压与输入端的对应分量相联系。出现在 $H_0(\omega)$ 中的脉冲序列阻抗表明，在 ω 的特性与在 $\omega \pm n\omega_s$（当 $n=0、1、2、\cdots$ 时）所计算的阻抗的依赖关系。我们在 10.3 节了解到，这种特性对开关调制器方面的早先工作者是明显的。

很难在各种各样方法之间作出选择；介绍它们的真正原因确实正是表明它们本来的一致。在下面，我们将一般地就被推广到包含有限脉冲波形因数的傅里叶表示法进行介绍。这将导致脉冲序列阻抗概念的直接推广。此外，我们将应用这种方法于非谐振转移滤波器以决定近似方法怎样与准确分析相比并且对设计问题进行介绍。

PCM 信号分用滤波器

考虑图 10-16(a)中的开关滤波器。这个是用在实验性PCM端机的各信道中，以从其量化的 PAM 样值来恢复模拟信号（声音或数据）。对我们的目的来说，伴随 PAM 样值的量化噪声是不重要的。以下的条件假定是有效的：

1．门电路每 T 秒闭合一个短暂时间间隔 τ。对于 24 路 PCM 系统来说，典型值为：(a) $T=125$ 微秒，相当于 8 KHz 采样；(b) $\tau=2.6$ 微秒*。

2．因为 $\tau/T \ll 1$，在把开关闭合期间，开关电流的波形由图 10-16(b)中电路的脉冲响应来决定。电源电阻 R_s 和开关“接通”电阻 R_ε 被一起集总成 $R=R_s+R_\varepsilon$。在开关打开的时

* 每信道所分配的总时间是 125 微秒/24 亦即近似 5.2 微秒．在这个时间间隔内，把 2.6 微秒用为信号重建，又 2.6 微秒则用为防护波段。

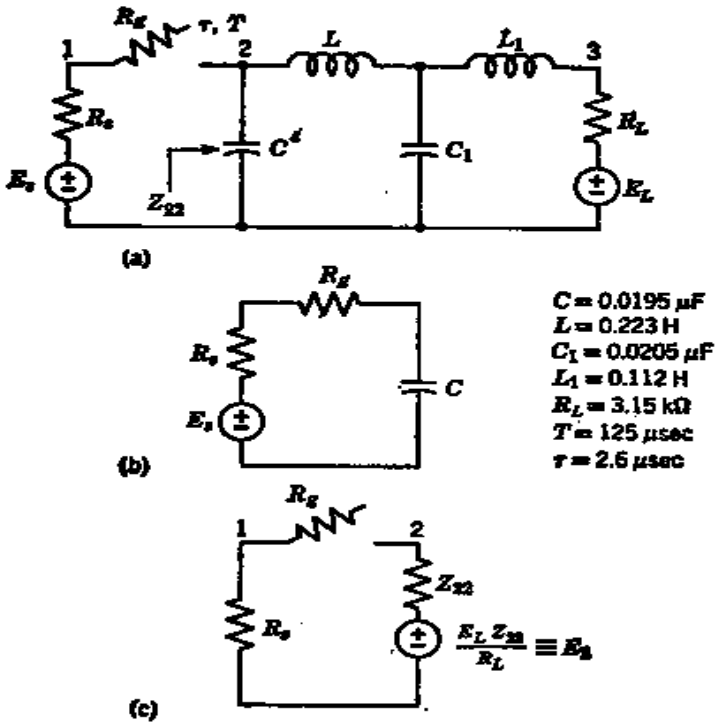


图 10-16　初期实验性信号分用滤波器：(a) 信号分用滤波器，(b) 在充电期间 ($E_L=0$) 的近似等效电路，(c) 在 (3) 测量等效阻抗的电压，$E_s=0$ 的等效电路。

候，假定其阻抗为无限大。因而单位脉冲波形是

$$p_1(t)=ae^{-at} \quad 0\leqslant t\leqslant \tau \tag{10.70}$$

式中：

$$a=1/RC$$

而拉普拉斯变换 $P_1(s)$给定为

$$P_1(s)=\frac{a}{s+a}[1-e^{-(s+a)\tau}]. \tag{10.71}$$

3．开关由下式表征

$$Ge_1(NT+)-e_2(NT+)=0. \tag{10.72}$$

因为假定脉冲由 $P_1(s)$形成，

$$I=\frac{Q}{T}\sum P_1(\omega+n\omega_s)e^{j(\omega+n\omega_s)t} \tag{10.73}$$

式中 Q 将由(10.72)来决定。由(10.73)和图 10-16可看出：

$$e_1(t)-e_2(t)=Ee^{j\omega t}-\frac{Q}{T}\sum P_1(\omega+n\omega_s)\cdot Z_{22}(\omega+n\omega_s)e^{j(\omega+n\omega_s)t}. \tag{10.74}$$

以 $e>0$ 写出 $V(t+)=[Ge_1(NT+e)-e_2(NT+e)]$，代入(10.72)并当 $e\to 0$ 取极限 $V(t+)$，则对 Q 给出以下的方程

$$GE_1=Q\left[\frac{h(0)}{2}+\frac{1}{T}\sum Z_{22}(\omega+n\omega_s)\cdot P_1(\omega+n\omega_s)\right] \tag{10.75}$$

式中：

$$h(0)=\lim_{s\to\infty} sZ_{22}(s)\cdot P_1(s). \tag{10.76}$$

合併(10.75)与(10.73)，并求解 $E_3(\omega)$给出

$$\frac{E_3(\omega)}{E_1(\omega)}=\frac{G\cdot Z_{23}(\omega)\cdot P_1(\omega)}{\sum Z_{22}(\omega+n\omega_s)\cdot P_1(\omega+n\omega_s)+\dfrac{T\cdot h(0+)}{2}} \tag{10.77}$$

(10.77)的分母就是广义脉冲序列阻抗。如果我们容许 $P_1(\cdot)$达到 1。那么 $h(0+)=1/C$ 而(10.77)成为

$$\left[\frac{E_3(\omega)}{E_1(\omega)}\right]_0=K_0(\omega)=\frac{Z_{23}(\omega)\cdot G}{\dfrac{T}{2C}+\sum Z_{22}(\omega+n\omega_s)}. \tag{10.78}$$

被用为 G 的值恰恰是由 $P(\omega)$在 $\omega=0$ 所假定的值，即 $1-e^{-aT}$。可知这个量在充电间隔末尾只不过是电容器 C 上输入电压的几分之一。因此，由(10.77)得到(10.78)的等效方法，是当 $G=1$ 时在(10.77)分母中应容许 $P_1(\cdot)$ 达到 1，而在(10.77)

分子中则达到 $P_1(0)$。

代替开关的等效阻抗

为了避免涉及起始条件的问题，在使用脉冲形状的时候，即使 $h(0+)$是零最好也一直把它一道计算。因而回到(10.77)，我们重新把它改写成另外形式*

$$\frac{E_3(\omega)}{E_1(\omega)}=K(\omega)$$

$$=\frac{G\cdot Z_{23}(\omega)}{\dfrac{T\cdot h(0+)/2+\sum{}'P_1(\omega+n\omega_s)\cdot Z_{22}(\omega+n\omega_s)}{P_1(\omega)}+Z_{22}(\omega)}. \tag{10.79}$$

我们在分母的和数内已特地分离出 $n=0$ 项，来定义一个等效阻抗以代替图 10-16 中的开关[11]。由(10.79)就可以容易看到等效阻抗 $Z_e(\omega)$是

$$Z_e(\omega)=\frac{T\cdot h(0+)/2+\sum{}'P_1(\omega+n\omega_s)\cdot Z_{22}(\omega+n\omega_s)}{P_1(\omega)} \tag{10.80}$$

并且把具有开关的电路用图 10-17 所示的等效电路来替换。显然，如果 $P_1(\omega)\to 1$(因为 $\tau\to 0$)，我们就有

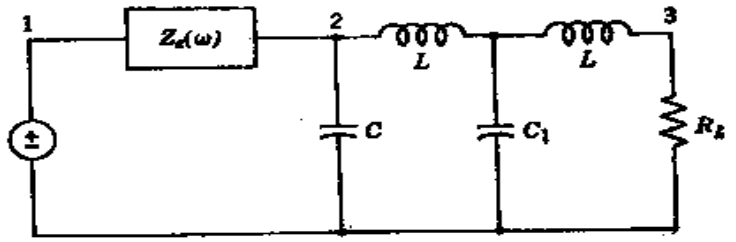


图 10-17　等效非时变网络

* 在 (10.79) 中和数上的撇号，表示去掉 n=0 项。

$$Z_{e0}(\omega)=\frac{T}{2C}+\sum{}'Z_{22}(\omega+n\omega_s). \qquad (10.81)$$

因为我们已消除开关，并已用阻抗(10.80)或(10.81)替换它，看来也许可以利用标准设计方法了。但由于等效阻抗对于带外影像 Z_{22} 的依赖关系，设计中的困难仍然存在。但我们即将说明，怎样克服这个剩余的障碍。

为了说明在定义阻抗和处理极限时必须注意的问题，我们用别的方法来导出等效阻抗。假定把电压源移到输出端。那么通过戴维南(Thevenin)定理和互易性，我们就得到图10.16(c)的电路。电流 I 如前相同由 (10.73) 给定，电压 $e_2(t)$ 则由(10.74)的右边以 E_2 替换了 E 来给定。现在，Q 将由恰好在门电路的第 N 次运行前出现在滤波器电容器 C 上的电荷来决定，即

$$Q_N=Qe^{i\omega(NT-\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0+}Ce_2(NT-\varepsilon) \qquad (10.82)$$

由(10.74)和(10.82)我们得到

$$Q=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[CE_2e^{-i\omega\varepsilon}-\frac{CQ}{T}\sum e^{-i\omega_s\varepsilon}P_1(\omega+n\omega_s)\cdot Z_{22}(\omega+n\omega_s)\right]. \qquad (10.83)$$

求解 Q 得出

$$Q=\frac{CE_2}{1+\frac{C}{T}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum e^{-i\omega_s\varepsilon}P_1(\omega+n\omega_s)\cdot Z_{22}(\omega+n\omega_s)}. \qquad (10.84)$$

借助于(10.66)可以看到极限是下式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{T}\sum e^{-i\omega_s\varepsilon}\cdot P_1(\omega+n\omega_s)\cdot Z_{22}(\omega+n\omega_s)=\sum_{k=1}^{\infty}h(kT)e^{-i\omega kT} \qquad (10.85)$$

所定义的广义脉冲序列阻抗，和(10.33)比较起来这同

$$[PZ(\omega,-)]=\frac{1}{T}\sum P_1(\omega+n\omega_s)\cdot Z_{22}(\omega+n\omega_s)-\frac{h(0+)}{2} \tag{10.86}$$

一样。由(10.74)(以 E_2 替换了 E) 如果我们取 $e_2(t)$ 的 ω 分量与 I 的 ω 分量之比，就得到阻抗

$$Z(\omega)=\frac{E_2-\frac{Q}{T}P_1(\omega)\cdot Z_{22}(\omega)}{\frac{Q}{T}P_1(\omega)}. \tag{10.87}$$

利用(10.84)所给定的 Q 和(10.86)的关系于 (10.87) 中，我们得到

$$Z(\omega)=\frac{\frac{T}{C}-\frac{T\cdot h(0+)}{2}+\sum{}'P_1(\omega+n\omega_s)\cdot Z_{22}(\omega+n\omega_s)}{P_1(\omega)} \tag{10.88}$$

这跟(10.80)所给定的 $Z_s(\omega)$不是相等的。在容许 $P_1(\omega)$ 达到 1 的时候，$h(0+)$成为 $1/C$ 而(10.88)和(10.81) 就变成一样。对于窄脉冲来说，$P_1(\omega)$比 $Z_{22}(\omega)$ 的频带更宽，脉冲形状的主要效应则由 $P_1(0)$加以规定。换句话说，充电时间常数 $1/\alpha$ 必须比充电时间 τ 小得多以避免大量损耗，而且避免因为 τ 由于采样抖动而引起变化所带来的损耗变动。由于这些原因，所以我们集中于方程(10.81)所给定的等效阻抗和(10.78)所给定的转移函数。

逼近转移函数和准确转移函数的比较

在这时，读者肯定至少会提出四个问题：

1．(10.78)所给定的逼近转移函数是怎样与准确分析比较的？

2．怎样适当预测测量结果？

3．怎样把它用于设计？

4．举几个例子怎么样？

这里我们说说第一个问题。紧接在后面的部分和整个10.5节，则是针对剩余问题的，

考查用在 D 2 PCM 通路架中的图 10-18 的开关分用滤波器[29]。以后将涉及设计方法。S. 杨格(S. Yang)已写出一种计算机程序以计算按照下列两个方法所说明的这种滤波器的转移函数的模值，两种方法即：照原样的(10.78)式和用我们在

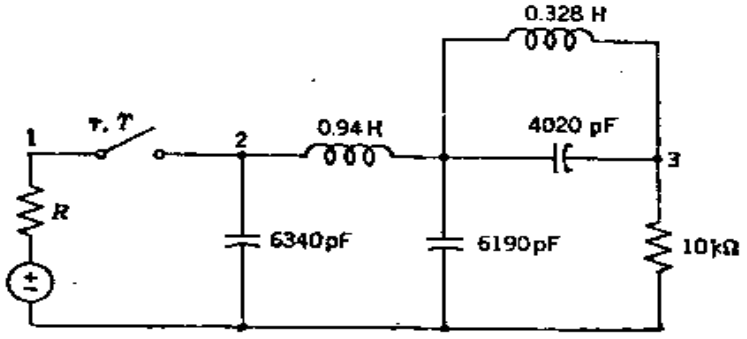


图 10-18 D_2通路架分用滤波器

下一节导出的等效阻抗近似改正式的(10.99)式。此外，利用 M. L. 利乌(M. L. Liou)和 P. H. 麦克唐纳 (P. H. Mc Donald)夫人所导出的、以状态变量表示法为基础的计算机程序，S. 杨格 (S. Yang)为分用滤波器也已计算了准确转移函数。已假定可忽视的开关损耗 (0.1 毫欧!) 这是因为开关只闭合 0.1 微秒时间 (采样周期 125 微秒的 1/1250)。把这两种逼近转移函数列举如下以备查阅(对于 G=1)

$$K_0(\omega)=\frac{Z_{12}(\omega)}{\frac{T}{2C}+\sum Z_{22}(\omega+n\omega_s)} \qquad (10.89)$$

$$K_1(\omega)=\frac{Z_{12}(\omega)}{\frac{T}{2C}+\sum_{-1}^{1}Z_{22}(\omega+n\omega_s)+j\frac{1.29\,\omega}{\omega_s^2 C}\left[1+0.127\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right]}. \tag{10.90}$$

三种情况[(10.78)、(10.99)和准确的]* 的转移函数模值，单位用分贝的计算结果给定于表 10.1 中。可以看出这三种方法

表 10-1　图 10-18 开关滤波器的近似衰减的效应

频率 (kHz)	衰减 (dB)			|最大差值|
	准确的($\tau=0.1$微秒, $R=10^{-4}$欧)	近似 1 (10.78)	近似 2 (10.99)	(用 5 位数据)
0.5	5.97	5.97	5.97	0.005
1.0	6.00	6.00	6.00	0.004
1.5	6.03	6.04	6.04	0.004
2.0	6.08	6.08	6.08	0.005
2.5	6.07	6.07	6.07	0.003
3.0	5.97	5.97	5.97	0.001
3.5	7.74	7.73	7.74	0.012
4.0	20.80	20.78	20.78	0.019
4.5	44.52	44.51	44.49	0.029
5.0	35.94	35.94	35.94	0.003
5.5	35.23	35.23	35.22	0.008
6.0	36.98	36.98	34.97	0.008

在通带内相差不超过 0.005 dB，在阻带内相差则不超过 0.03 dB。(10.78) 和状态变量方法之间的这种一致是所指望的，特别是在开关闭合时间和接通电阻有意使它们为非常小的时候。不过，用下一节中给出的逼近法 (10.99) 所得到的极好计算结

* 用 1,001 项来计算(10.78)分母中的标称无限和。

果，可对其应用建立信心。分析和设计两方面都相当地简化了。下一节中所导出的一种更简单的逼近法，为设计提供了一个实用的起点。

在开关电阻是实际的而且接通时间为采样周期的一个较大百分率的情况，让我们作其他的比较。这将使我们至少对目前的例子能决定(10.78)或(10.99)适用的范围。首先，我们把门电路接通电阻保持在低值 0.1 欧，并使门电路的接通时间从采样周期 125 微秒的 0.08% 改变到 8%。对于 $\tau=0.1$、1.0、5.0 和 10.0 微秒所计算的衰减，给定在表 10.2 中。把接通时间从 0.1 微秒增加到 1.0 微秒，将导致带内衰减在频带低边缘稍微

表 10-2　图 10-18 开关滤波器的接通时间(τ)衰减的效应

频率(kHz)	衰减 (dB) ($R=0.1\ \Omega$)			
	$\tau=0.1\ \mu$sec	$\tau=1.0\ \mu$sec	$\tau=5\ \mu$sec	$\tau=10\ \mu$sec
0.5	5.96	5.92	5.71	5.43
1.0	5.99	5.95	5.76	5.50
1.5	6.03	6.00	5.85	5.64
2.0	6.08	6.05	5.95	5.80
2.5	6.07	6.08	6.01	5.91
3.0	5.97	5.93	5.97	5.92
3.5	7.73	7.81	8.11	8.34
4.0	20.80	20.97	21.64	22.31
4.5	44.52	44.59	44.77	44.67
5.0	35.94	35.94	35.77	35.27
5.5	35.23	35.21	34.99	34.41
6.0	36.98	36.95	36.63	35.88

降低 0.04 dB 那么多。进一步把门电路接通时间增加到 10 微秒，使整个通带中的衰减斜率上升 0.5 dB。如果接通时间保持在低值 0.1 微秒的常数，而改变门电路电阻，我们得到图

10-19 所示的曲线。对这些特性曲线的考查表明，带内衰减随着 $1-e^{-\alpha\tau}=P(0)=G$（即充电电路中的电压损耗）而很接近地变化。因而，在任何一种逼近表达式中，应用因数 G 都足以促使它们与准确分析很接近一致。对于较大的接通时间值（1、5 和 10 微秒），已算出具有门电路电阻从 0 直到 25 欧的衰减的变化实质上是零（在整个 0 到 6 KHz 频带实际上最大变化 0.02 dB）。这是不足为奇的，因为对最大接通电阻来说在 1.0 微秒的最小充电时间结尾实质上把电容器完全充了电。因而对通信运用中所出现的门电路电阻我们得出结论：简单近似法(10.99)是特别好的。

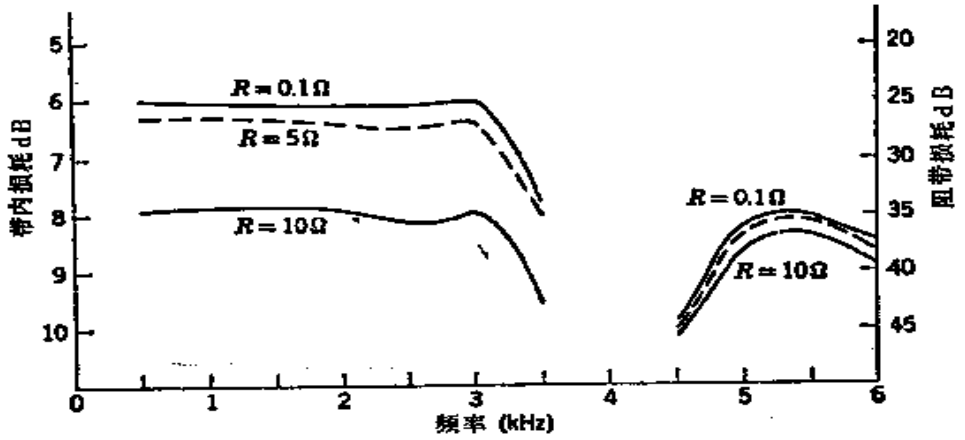


图 10-19　不同开关电阻的特性变化

等效阻抗的测量

因为我们讨论的是比较生疏的用含有阻抗函数 (10.81) 的固定式网络来替换时变网络的概念，我们理应从实验上指出这种近似有多好*。我们已经看出从近似转移函数 所算出的衰减

* 本节的大部分结果和先前三节中的结果，都由作者在未发表的 1959 年报告中给出了。

特性，实质上与从状态变量表示法所算出的准确结果是难以区分的。这里我们把等效阻抗(10-81)的测量与计算结果相比较，并导出另一种对(10-78)的有趣近似作为进行设计的序幕。在下节的设计中我们再与实验作进一步比较。

在作时变网络测量的过程中必须小心。这是因为以频率 ω 输入却引起频率 $n\omega_s+\omega$ 的输出的事实造成，这一点由(10.30)是明显的。这意味着必须利用调谐检波器，而且由于跟 $\omega_s-\omega$ 分量叠混一起在 $\omega=\omega_s/2$ 的附近作测量是特别困难的。此外，在滤波器截止频率以外约 3 KHz 以上灵敏度会有所降低。因此，我们在阻抗测量方面集中于 $\omega_s/2$ 以下的频率。用来作测量的方法是建立在一种代换技术上。首先，出端阻抗 $Z_{33}(\omega)$ 的测量就是使用具有调谐检波器(带宽约 50 Hz)的阻抗电桥，在 $\omega_s/2$ 以内选定的频率下来进行。开关侧的输入电压在这种情况下被短路了，开关继续工作而且终端 R_L 仍保持连接（参看图 10-20)。在各频率都用电阻和电抗（电感）替换开关，而且每个都调整直到 $Z_{33}(\omega)$ 的读数与把开关连接时的一样为止。照这样，我们就得到代换开关的阻抗。对于图 10-16 滤波器的测量结果*与计算相比是满意的。在大部分通带上，电阻分量基本上是 $T/2C=3.2$ 千欧，与测量极相吻合。等效电感的测量和计算之间的不吻合，对于整个频率范围都只在 6% 以内——那正好在所用电桥的准确量程范围内。

处理（10.81）中无限和的两种方法中随便哪一种都可以很方便地应用于计算 $Z_e(\omega)$。由（10.17）很明显，我们可以写出

---

* 作者和 C. L. 马多克斯(C. L. Maddox)在 1959 年作过了这些测量。

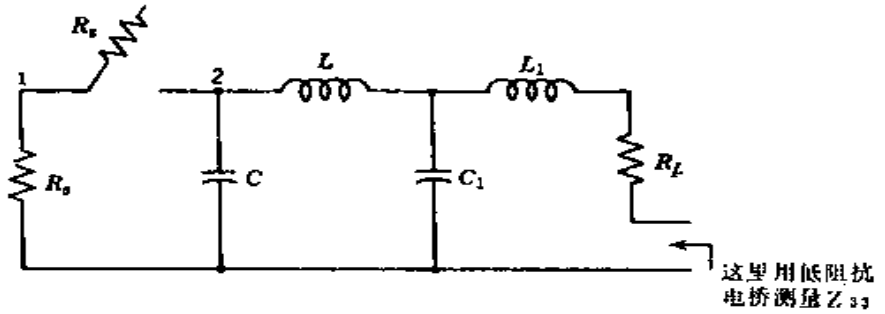


图 10-20　决定等效阻抗的测量

$$Z_{e0}(\omega)=\frac{T}{2C}-Z_{22}(\omega)+\frac{T}{2}\sum_{m=1}^{M}A_m\left[\frac{1+e^{-(j\omega+\gamma_m)T}}{1-e^{-(j\omega+\gamma_m)T}}\right]. \quad (10.91)$$

因此，如果把奇点（γ_m）和留数（A_m）确定，就可以计算(10.91) 而没有什么困难。实际上更有吸引力的是讨论元件值。实际上这将允许我们在得到开关滤波器的初步设计方面建立一种步骤。

如果我们通过渐近线由 Z_{22} 移去电容而得到

$$Z_{22}(\omega)=\frac{1}{j\omega C}+Z_{22}(\omega)-\frac{1}{j\omega C}=\frac{1}{j\omega C}+Z_a(\omega), \quad (10.92)$$

那么在这样分项的情况下，等效阻抗表达式中的和就更容易用如下少数几项来计算。首先，实现 (10.92) 中渐近项的准确和。在 (10.81) 中，利用 (10.92) 和 (10.19) 易于表明

$$Z_{e0}(\omega)=\frac{T}{2C}+\frac{j}{\omega C}-j\frac{\pi}{\omega_s C}\cot\frac{\pi\omega}{\omega_s}+\sum{}'Z_a(\omega+n\omega_s). \quad (10.93)$$

对眼前（和大多数应用中的）情况来说，Z_{22} 可由其 $|n|>2$ 的渐近值得到很好逼近。这意味着 (10.93) 中末尾的和数至多只需要以 $n=\pm1$、±2 几项进行。对于采样频率以下所关心的

区域作进一步逼近是有用的，在这个区域。(10.93) 中余切的展开与 $j/\omega C$ 项（对 $|x|=|\omega/\omega_s|<1$ 适用的）合併给出

$$\frac{j}{\omega C}-j\frac{\pi}{\omega_s C}\cot\frac{\pi\omega}{\omega_s}=j\frac{2x}{\omega_s C}\left[\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^4}{90}x^2+\cdots+\frac{(-1)^k(2\pi)^{2k}}{2\cdot(2k)!}B_{2k}x^k\cdots\right] \tag{10.94}$$

式中 B_{2k} 是伯努利 (Bernoulli) 数。(10.94) 式括弧内 x^k 的系数的另一种表示式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{(-1)^k(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2\cdot(2k)!}. \tag{10.95}$$

在 (10.94) 式括弧内级数中的开始几项系数为 $\pi^2/6=1.645$、$\pi^4/90=1.082$、$\pi^6/9450=1.017$ 等项将趋近于一。利用这个事实，可以把 (10.94) 中的级数写成

$$j\frac{2x}{\omega_s C}[0.645+0.082x^2+0.017x^4+\cdots]+j\frac{2x}{\omega_s C}\left(\frac{1}{1-x^2}\right). \tag{10.96}$$

合併 (10.94)，(10.95) 与 (10.93)，最后得到

$$Z_{s0}(\omega)=\frac{T}{2C}+j\frac{1.29x}{\omega_s C}[1+0.127x^2+0.027x^4+\cdots]+\sum_{-2}^{2}{}'Z_a(\omega+n\omega_s)+j\frac{2x}{\omega_s C}\cdot\frac{1}{1-x^2}. \tag{10.97}$$

在 (10.97) 式中含有 $n=\pm2$ 的和项一般地可予以忽略。根据这一假定我们得出更紧凑的近似式

$$Z_{s0}(\omega)=\frac{T}{2C}+j\frac{1.29x}{\omega_s C}[1+0.127x^2]+\sum_{-1}^{1}{}'Z_{22}(\omega+n\omega_s), \tag{10.98}$$

当 $|x|<1$ 这是一种极好的逼近。这在表 10.1 关于转移函数的比较中已表明过。按 (10.98)，转移函数成为

$$K_1(\omega)=\frac{Z_{12}(\omega)}{\frac{T}{2C}+\sum_{-1}^{1}Z_{22}(\omega+n\omega_s)+\frac{1.29\,jx}{\omega_s C}(1+0.127\,x^2)}. \tag{10.99}$$

一种适于设计目的的较粗略近似是忽略 (10.97) 中的求和项而得到

$$Z_{s02}(\omega)=\frac{T}{2C}+j\frac{1.29\,x}{\omega_s C}\cdot\frac{1}{(1-0.127\,x^2)}+j\frac{2\,x}{\omega_s C}\cdot\frac{1}{(1-x^2)}. \tag{10.100}$$

读者不难证明：(10.100) 相当于图 10-21 (a) 中所给定的实际阻抗。注意这个阻抗只取决于入端电容 C 和采样频率 ω_s。入端电容通常根据阻抗水平和门电路的功率处理能力来选择。C 一选定，我们就可以利用 (10.99) 作为设计的媒介物。这将在下一节中加以研究。最后我们对利用 (10.100) 或较粗略的近似值

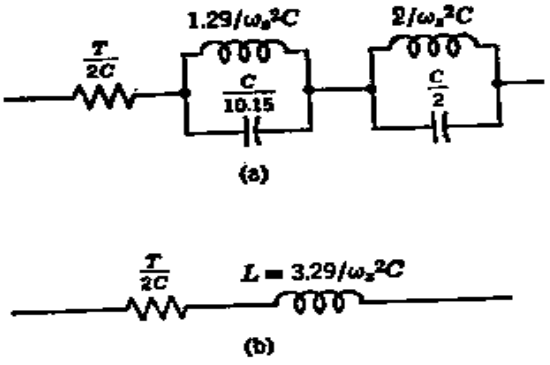


图 10-21 等效阻抗近似

$$Z_{s03}(\omega)=\frac{T}{2C}+j\frac{3.29\,x}{\omega_s C}=\frac{T}{2C}\left(1+j\frac{3.29}{\pi}x\right) \tag{10.101}$$

的转移函数与 (10.98)（其有效性在表 I 中建立了）进行比较以结束本节的讨论。如果利用 (10.100) 或 (10.101)，就得

到近似转移函数

$$K_2(\omega)=$$

$$=\frac{Z_{12}(\omega)}{\frac{T}{2C}+Z_{22}(\omega)+j\frac{1.29x}{\omega_s C}\cdot\frac{1}{(1-0.127x^2)}+j\frac{2x}{\omega_s C}\cdot\frac{1}{(1-x^2)}} \tag{10.102}$$

和

$$K_3(\omega)=\frac{Z_{12}(\omega)}{\frac{T}{2C}+Z_{22}(\omega)+J\frac{3.29x}{\omega_s C}}, \tag{10.103}$$

它们的衰减特性在表 10.3 中用分贝来给出。为了便于比较起见，把由 (10.99) ($K_1(\omega)$) 所得到的衰减值也在表 10.3 中

表 10-3　图 10-18 开关滤波器的简化等效阻抗对衰减的效应

频率(kHz)	衰减 (dB)			
	由 10.99 (由表10.1的纵行 3 重列的)	由10.102 [图10.21(a)的 Z_{eq}]	由10.103 [图10.21(b)的 Z_{eq}]	最粗略的等效 $Z_s=T/2C$
0.5	5.97	5.97	5.97	5.98
1.0	6.00	5.99	5.99	6.09
1.5	6.04	6.04	6.04	6.43
2.0	6.08	6.11	6.11	7.12
2.5	6.07	6.13	6.15	8.13
3.0	5.97	6.01	6.03	9.03
3.5	7.74	8.23	8.41	[illegible].84
4.0	20.78	21.34	21.71	8.50
4.5	44.49	38.57	38.71	32.10
5.0	35.94	30.17	29.83	25.00
5.5	35.22	30.58	29.45	25.00
6.0	36.97	32.82	30.47	25.92

重复列出。一直到 3 KHz 显然都吻合得很好（误差小于 0.1 dB)。甚至在 3 KHz 和 4 KHz 之间的过渡区域内，连最简单函数（10.103）对于许多应用都是够好的。如果省略电抗分量而且 $Z_s=T/2C$，那么就得到表 10.3 的末行中所给定的结果。显然这是很差的逼近。

10.5 开关滤波器的设计

概述

对开关滤波器的设计提出两种方法。我们将强调以等效阻抗概念为基础的方法。可以把这个称为频域方法。另一种时域设计方法已成功地加以使用，不过我们只简短地顺便提及。梅(May) 和斯赖普 (Stump)[38]、托马斯 (Thomas)[39] 以及吉布斯 (Gibbs)[40] 的著作就是这种著作的代表。根本统一的主题是从方程 (10.12)、(10.20) 和 (10.21) 得出的，概略说来，目的应使阻抗函数的冲激响应在整个采样时间除了冲激的开始以外都接近于零。换句话说，谐振转移网孔中的电容在下一个充电时间之前就放电到零。这种条件的确切满足需要一个无穷的网络（参看习题 10.5)。吉布斯[40] 为得到有限的带内等波纹逼近值而提出一个有趣的方法，并把他的技术同托马斯[39]所给出的技术相比拟（参看托马斯方法的习题10.5)。托马斯已设计几种用在电子时分制开关系统中的滤波器。限于篇幅不能详细介绍。应该很明显，可以把这种方法作为对后面所讨论的计算机辅助设计方法的前奏曲。

根据等效阻抗的设计

由右边看进电容器 C 和对于门电路的简单 R、L 逼近* 的阻抗表示于图 10-22 (a) 中。检查其频率特性的实部的曲线显示出：在大部分通带范围内，这个实部非常接近于（截止频率约 3.8 KHz 的） 定 K 式低通滤波器的串中剖阻抗 [34]。在大

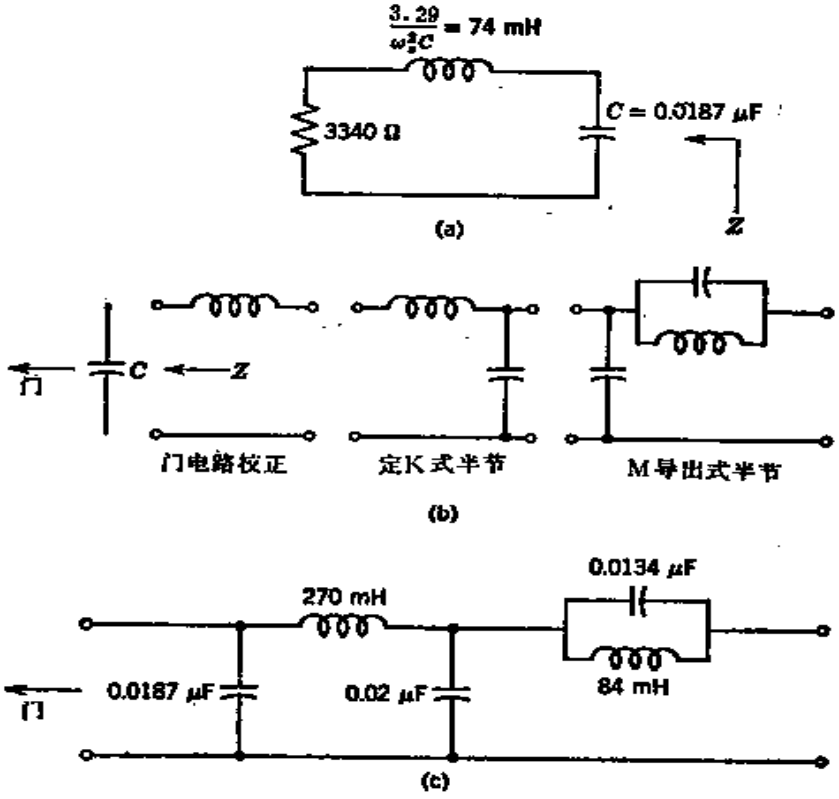


图 10-22 D 1 的分用滤波器设计：(a)回头看进 C 和门电路的逼近阻抗 Z，(b)滤波器节，(c)复合滤波器。

* 这种设计方法在 1960 年就得出了。

部分信号频带内，可以把那个负的虚分量由附加串联电感来抵消。剩余几节包括：定 K 式半节接着是一个 $m=0.6$ 的 m 导出式半节，如图 10-22(b) 所示。需要 m 导出式节对终端阻抗获得好的匹配。10.22(c) 中的复合滤波器直到 3 KHz 都保持大于 30 dB 的回波衰减。幸而这种方法导致了一种滤波器，它们的衰减特性也满足了T1PCM 载波系统的 D 1 通路架[28] 的需要。

在所强加的设计约束情况下，一般说来将很难用这种方法来满足最严格的要求，但它是一种进入正确境地的有用媒介物。让我们扼要讲讲这种方法。

1．利用简单 R、L 的门电路逼近——$R=T/2C$，$L=3.29/\omega_c^2 C$。这样就为滤波器规定这个阻抗和接近 4 KHz 的截止频率。

2．利用串联 L 来抵消从电容器 C 右边向门电路所看入阻抗的电抗分量。这就给出一种串中剖匹配。

3．加上定 K 式节和 m 导出式节以满足截止特性和带外的衰减要求以及阻抗匹配。

计算机辅助设计——无源滤波器

为了要求用于通带更受限制的分用滤波器的设计，提出一种计算机辅助方法来设计就变得必要了*。已写出了计算（10.98）的子程序，并把萨普罗克斯（Suprox）的逐次逼近法[35]用来改变元件值以达到所需的特性。图 10-18 的滤波器就是这种方法的结果。其幅频特性给定于表 10.1 中。

下面是利用这种方法的例子。考虑图 10-10 的滤波器，它

---

* P. E. 弗莱谢尔（P. E. Fleischer）在 1966 年提出了本节中所讨论的方法。

是用来限制信号在采样以前的频带。在数字通路架中，它就是通常所说的多路复用滤波器。如同所示那样，把门闭合达谐振转移周期 $\tau=\pi\sqrt{LC/2}$。在公共 PAM 汇流条的电容器 C 充电以后，n 位的模拟-数字转换器运用在这个保持值上而产生一种用 n 位二进制表示的 PAM 样值。在转换过程终了时，这个电容器经由低阻抗开关 S_2 放电。在放电以后，S_2 断开并在谐振转移期内把这个电容器连接到另一信道（和滤波器），并把这个新信号按其前面信号的同样程序进行处理。可以指出这种滤波器的转移函数就是（假定用低阻抗开关 S_2 全部放电）

$$\frac{E_2(\omega)}{E_1(\omega)}=M_0(\omega)=\frac{GZ_{12}(\omega)\dfrac{T}{RC}}{\dfrac{T}{2C}+\sum Z_{22}(\omega+n\omega_s)}. \quad (10.104)$$

拿五、六和七元件滤波器来凑试满足传输要求。虽然它们都达到了所需传输特性，但必须利用图 10-23 的七元件设计来获得对电源匹配的入端阻抗。利用电子计算机（IBM）7094 时设计大约需要 0.01 小时。

其他滤波器包括 D2 通路架的分用滤波器[29]和话音插空技术(TASI)-B 的滤波器[37]，则已用弗莱谢尔(Fleischer)方法设计。

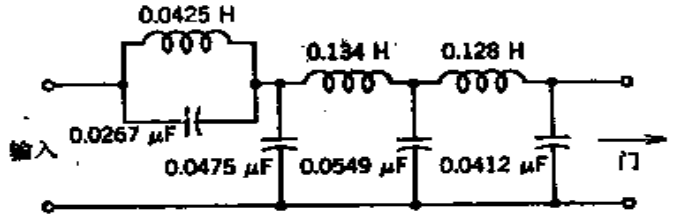


图 10-23 为 D 2 设计的多路复用滤波器

计算机辅助设计——有源滤波器

近来(1970)，利乌(Liou)、麦克唐纳(Mc Donald)和西伦(Thelen)[13]叙述了按照弗莱谢尔基本原理的计算机辅助设计方法。但在两个很有趣的方面详细内容有差别。它继续利用萨普罗克斯(Suprox)逐次逼近法，但是利用了基于状态空间技术[6]的准确分析程序。其次，尽管把 10.5 节的方法限制于无源梯形网络，但它对有源和无源滤波器都适用。对于通信应用，第二种改进了的型式可能比第一种更有意义。这有两种原因。首先，逼近分析方法通常达到了充分的程度*。更重要的，对于这里所考虑的应用有源滤波器在成本上已可与无源滤波器相竞争了。利乌、麦克唐纳和西伦所设计的这样一种有源滤波器已见于他们的论文，不拟在此加以重复。

把这种方法的基本概念概括为老的谚语“如果你起初并不成功，务必再次的试”，或用更新式说法，各种各样的所谓：“设计策略”、算法或者流图。在第一个运行周期内，把要求与具体电路的计算性能相比较(第一次试)。计算所需性能和实际性能之间的差别即所谓误差，并经由最优化策略把电路加以改变，以降低一些这种误差的程度。可以采用各种各样的量度，但最简单和最普通的量度也许是在选定的各频率上幅频特性误差平方的加权和。最速下降和/或最小二乘[14]被用在萨普罗克斯(Suproc)[35]中，但原则上可以把通用最优化策略中随便哪一个编程序。

对于有源开关滤波器的多级运算放大器实现来说，应该注意到存在自然区分。例如在分用滤波器中，第一个运算放大器

---

* 当然性能严格要求的目标、可能需要准确分析程序[42]。

就使开关与滤波器的其余部分隔离开。因而，一部分设计利用这儿的方法，剩下的设计则按非时变网络的传统习惯进行。这种方法已由艾伦（Aaron）和米特拉（Mitra）[41]以及利乌、麦克唐纳和西伦[13]使用过。

其他因数

读者不要误认为开关滤波器设计只不过是运用计算机程序问题。实际设计的内容比我们上面所包括的要超过相当多。在高性能采样保护电路的设计中[30]，必须遵循的是要把开关考虑为非线性。必须了解在开关控制波形中抖动的影响。开关电路的选择（二极管电桥、晶体管、结型场效应晶体管(JFET)、金属氧化物硅场效应晶体管(MOSFET)、···）根据许多因数，包括：速度、功率要求、控制电路以及控制连接线的平衡、不均匀性等等。在有源开关滤波器情况下，控制连接线与运算放大器过载的相互作用可能是重要的，而且必须考虑在时变负载下工作的放大器的稳定性。在薄膜电路中，则必须考虑全部基片电容和电阻。当然，成本总是要给以重视的。这里排除了这些和其他情况的详细讨论，但是不应当低估它们的重要性。例如可参看[43]。

10.6 摘　　要

对开关滤波器设计有几种得出有效的初步近似的方法。1962 年为了第一个商用 PCM 系统的多路复用滤波器和分用滤波器的设计，而引进了等效阻抗近似。根据这种设计方法已生产了上百万个滤波器。由于性能要求更加严格，因而引用计算机作为一种对滤波器经济实现的帮助。对于按照数字通信和数

字交换的发展，所要求的开关滤波器设计来说，这里所叙述或参考文献的方法足以提供一个基础。

致谢

已作了具体努力来表明：许多工作者在过去的贡献已经怎样产生现代设计技术和知识。在整个课文中给予了特别赞扬。对以上所述在获得有关表 10.1 到 10.3 的数据方面，我更要感谢 S. 杨格(S. Yang)的帮助。在十年多时间内，我在这方面已和 C. L. 马多克斯(C. L. Maddox) 有了合作的良好幸运。在阐明一些含糊点方面，P. E. 弗莱谢尔(P. E. Fleischer) 是一位有帮助的伙伴。

习　题

10.1 导出(10.6)。

10.2 试证明：当$T\to 0$（采样频率成为任意大），(10.17) 就简化为(10.13)。

10.3 试证明：对于阻抗函数初值定理和博德(Bode) 电阻积分定理是等同的。

10.4 如果$Z(\omega)$是最小电抗阻抗函数，其实部$R(\omega)=R$，在频带$-\omega_s/2\leqslant\omega\leqslant\omega_s/2$范围内为常数，在别处则为零，证明其单位面积冲激响应可以给定为(10.20)。证明对应的最小电抗为

$$X(\omega)=-\frac{R}{\pi}\ln\left|\frac{\omega+\frac{\pi}{T}}{\omega-\frac{\pi}{T}}\right|$$

而且渐近线电容(大 ω)为 $T/2\,R$。进一步证明

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}X(\omega+2\pi m/T)=0$$

因此(10.21)是根据这个结果直接得出的。

10.5 试证明习题 10.4 的电抗函数 $X(\omega)$的连分式展开，使我们得出图 10.24 (a)无终接的无限梯形，其中由[39]给定的元件值为

$$C_1=\frac{T}{2R},\quad L_1=\frac{6RT}{\pi^2}$$

并对 $n=1,2,3\cdots$

$$C_{n+1}=\frac{T}{2R}\left(\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2}\right)(4n+1)$$

$$L_{n+1}=\frac{2RT}{\pi^2}\left(\frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2}{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2n+1)^2}\right)(4n+3).$$

对大 n 证明 $C_{n+1}\to 2T/R\pi$ 和 $L_n=2RT/\pi$，而且这些值就是累接定 K 式梯形的全并联和串联支路。因此如果把梯形并中剖或串中剖断开，就可以把 m 导出式终端节用来对电阻负载匹配。试证明，如果图 10-24 (a) 的梯形在第二个电容器断开，并加上 m 导出式终端半节，结果得出图 10-24 (b)的滤波器。这基本上是托马斯(Thomas)所使用的方法[39]，并且足以满足一些设计，或在迭

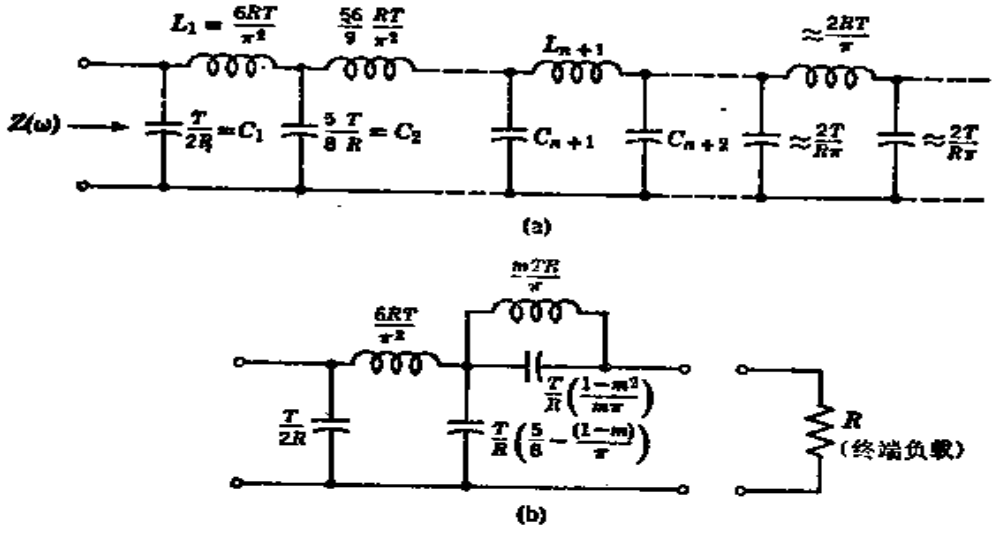


图 10-24 理想低通滤波器的逼近法——习题 10.5：(a) 无终接的无限梯形，(b) 5 元件逼近值。

代设计中可以用来作为初始近似。

10.6 假定把图 10-12 的采样保持电路理想化，这样以致 $R_2 \to \infty$。假定电路后面有一个在保持间隔内激励样值的理想脉冲调制器。试证明在这类情况下关于采样保持电路的准确转移函数是 $G(s)$，这里 $G(s)$ 为

$$G(s)=\frac{\left[1-\exp\left(-\frac{T_c}{R_1C}-sT_c\right)\right]e^{sT_c}}{(1+sR_1C)\left[1-\exp\left(-\frac{T_c}{R_1C}-sT\right)\right]}.$$

要注意这里所叙述的情况(除量化噪声外)主要就是在 A/D 转换器接着采样保持时所出现那样。

10.7 导出(10.55)。

10.8 谐振转移器中的两个网络不相同，试证明转移函数(10.54)成为

$$\frac{H'_{00}(\omega)}{E}=\frac{Z_{12}(\omega)\cdot Z_{34}(\omega)}{R_1\left[\sum Z_{22}(\omega+k\omega_s)+\sum Z_{33}(\omega+k\omega_s)\right]}.$$

10.9 在 PAM 时分制开关系统中(参看图 10-6)，总线上的电容可以引起不完全的电荷转移和信道之间的串话。谐振转移网孔表示为图 10-25，其中 C_H 为总线电容并且已把谐振转移电感分裂开。使 C_H 和 C 联系起来保证全部电荷互换(参看参考文献[8])。当闭合开关转移期间，试标出节点电压和电感电流。

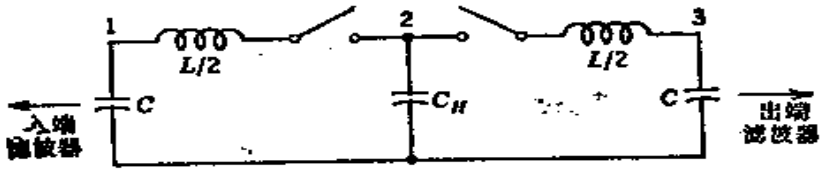


图 10-25 谐振转移中的总线电容——习题 10.9

10.10 图 10.8 (a)的谐振转移网孔中，在电感内损耗的影响是什么？在转移期间 $\pi\sqrt{LC}$，试作图表示小损耗的波形。对于高 Q 电感器来说，在从 e_1 到 e_2 的电压转移中逼近损耗是什么？可以怎样调整转移时限使这种损耗减至最少？在开关断开的时候，什么样的转

移时限可使电流为零；

10.11 试导出图 10.10 的多路复用滤波器的逼近转移函数，(10.104)式。

10.12 去掉图 10.10 具有的箝位开关 S_2，考虑习题 10.11 的多路复用滤波器。假定脉冲采样，证明近似转移函数为

$$\frac{E_2}{V(\omega)}=\frac{Z_{12}(\omega)\frac{T}{RC}}{\frac{T}{2C}+\sum Z_{22}(\omega+n\omega_s)-e^{-j\omega T}\left[\sum Z_{22}(\omega+n\omega_s)-\frac{T}{2C}\right]}.$$

10.13 试证明：对于习题 10.14 的理想低通滤波器习题10.12 和10.104 的结果是相同的。

10.14 试证明：(10.94) 可能直接从 $1/C\sum_{-\infty}^{\infty}1/j(\omega+k\omega_s)$ 得到，而不利用 (10.19)。[提示：考虑 (k 的正负值) 成对项，并利用 (10.95)。]

10.15 从(10.88)(设分母中的 $P_1(\omega)$ 等于 1) 直接导出 (10.98) 是可能的。这是一个含有利用和数中 $Z_{22}(\omega)$ 的渐近值、包括和数中的脉冲形状、而且利用 $\alpha\tau\gg1$ (这是快速充电所需) 的事实的繁杂运算。这本质上是一种操作技能的训练。

参 考 文 献

[1] W. R. Bennett, "Steady-state transmission through networks containing periodically operated switches," *IRE Trans. PGCT*, 2, No. 1,17-22 (March, 1955).

[2] C. A. Desoer, "Transmission through a linear network containing a periodically operated switch," *Wescon Conv. Record*, 34-41 (1958).

[3] T. R. Bashkow, "The *A*-matrix, new network description, *IRE Trans. PGCT*, 4, No. 3(1957).

[4] I. W. Sandberg, "The analysis of networks containing periodically variable piecewise—constant elements," *Proc NEC.*, 17,81-97 (1961).

[5] Y. Sun and I. T. Frisch, "Transfer functions and stability for networks with periodically varying switches," *Asilomar Conference. Record*, 130-142 (1967).
[6] M. L. Liou and F. R. Mastromonaco, "Exact analysis of linear circuits containing a periodically operated switch using the state space approach," *1968 Int. Symposium on Circuit Theory*.
[7] A. Fettweis, "Steady-state analysis of circuits containing a periodically operated switch," *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-6**, 252 (1959).
[8] K. W. Cattermole, "Efficiency and reciprocity in pulse amplitude modulation, part I—principles," *Proc. IEE*, **105**, Part B, 449—462 (1958).
[9] T. H. Crowley, Unpublished work (1956).
[10] C. A. Desoer, "A network containing a periodically operated switch solved by successive approximations," *BSTJ*, **36**, No. 6, 1403 (1957).
[11] M. R. Aaron, Unpublished work (1959).
[12] P. E. Fleischer. Unpublished work (1966).
[13] M. L. Liou, P. H. McDonald, and W. Thelen, "Computer optimization of active and passive switched low-pass filters for PCM," *Conference Proceedings of the 1970 Electronic Components Conference* (May, 1970).
[14] M. R. Aaron, "The use of least squares in system design," *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-3**, 224—231 (Dec., 1956).
[15] G. Doetsch, *Guide to the Applications of Laplace Transforms*, D. Van Nostrand, New York (1961).
[16] E. Peterson and L. W. Hussey, "Equivalent modulator circuits," *BSTJ*, **18**, 32 (1939).
[17] R. S. Caruthers, "Copper oxide modulators in carrier telephone systems," *BSTJ*, **18**, 315-337 (April, 1939).
[18] V. Belevitch, "Linear theory of bridge and ring modulators," *Elec. Commun.*, **25**, 62 (1948).
[19] D. G. Tucker, "Rectifier modulators with frequency selective terminations," *Proc. IEEE*, **96**, Part III, 422 (1949).
[20] D. G. Tucker, *Modulators and Frequency Changers*, MacDonald, London (1953).
[21] D. G. Tucker, "Input modulation (i.e. interchannel crosstalk) in constant resistance modulators for use in FDM systems," *Proc. IEE*, **114**, No. 10, 1385-1390 (Oct., 1967).
[22] A. Fettweis, "Theory of resonant-transfer circuits," *Network and*

Switching Theory, G. Biorci, Ed., Academic Press, New York (1968) pp. 382-446.

[23] C. G. Svala, E. Aro, and S. L. Junker, "A 4-wire solid state switching system: Time division switching network," *IEEE Trans. On Communication Technology*, 197-206 (Dec., 1964).

[24] T. E. Browne, D. J. Wadsworth, and R. K. York, "New time division switch units for no. 101 ESS," *BSTJ*, 443-476 (Feb., 1969).

[25] P. M. Thrasher, "A new method for frequency-division multiplexing, and its integration with time-division switching," *IBM Journal of Res. and Dev.*, 137-140 (March, 1965).

[26] K. M. Roehr, P. M. Thrasher, D. J. McAuliffe, "Filter performance in integrated switching and multiplexing," *IBM Journal of Res. and Dev.*, 282-291 (July, 1965).

[27] W. R. Bennett, "Time division multiplex systems," *BSTJ*, 20,199-221 (1941).

[28] C. G. Davis, "Experimental pulse code modulation system for short haul trunks," *BSTJ*, 41,1-24 (1962).

[29] H. H. Henning, "A 96-channel PCM channel bank," Conference Record 1969, *IEEE Int. Conf. on Communications*, 34-17-34-22 (1969).

[30] J. R. Gray and S. C. Kitsopoulous,"A precision sample and hold circuit with subnanosecond switching," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-11, No. 3 (Sept., 1964).

[31] Y. Sun and I. T. Frisch, "Analysis and synthesis of ac compensation filters," *IEEE Trans. CT*, CT-15, No. 4,341-349 (Dec., 1968).

[32] K. A. Ivey, "AC carrier control systems," John Wiley, New York, (1964), 349 p.

[33] L. A. Zadeh, "Frequency analysis of variable networks," *Proc. IRE*, 38, 291-299 (March, 1950).

[34] H. W. Bode, "Network analysis and feedback amplifier design," D. Van Nostrand, New York (1945).

[35] P. E. Fleischer, "Optimization techniques in system design," Chapter 6, *System Analysis by Digital Computer*, edited by F. F. Kuo and J. F. kaiser, John Wiley, New York (1966).

[36] See Chapter 7 of this book.

[37] Robert B. Leopold, "TASI-B, a system for restoration and expansion of overseas circuits," *Bell Labs Record*, 299-306 (Nov., 1970).

[38] P. J. May and T. M. Stump, "Synthesis of a resonant transfer filter as applied to a time division multiplex system," *AIEE Trans.*

Communications and Electronics, 79, 615–620 (Nov., 1960).

[39] G. B. Thomas, "Synthesis of input and output networks for a resonant transfer gate," *IRE International Convention Record*, Part 4,236-243 (1961).

[40] A. J. Gibbs, "Design of a resonant transfer filter," *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-13, No. 4,392-398 (Dec., 1966).

[41] M. R. Aaron and S. K. Mitra "Design of active R-C switched filter for PCM applications," *Kyoto International Conference on Circuits and System Theory Digest*, 1, 14-15 (1970).

[42] M. L. Liou, "Exact analysis of linear circuits containing periodically operated switches—with applications," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-19, No. 2, 146-154 (1972).

[43] R. A. Friedenson, "Active filters make it small in the D3 channel bank," *Bell Labs Record*, 105-110 (Apr., 1973).

11 *N*-通路滤波器

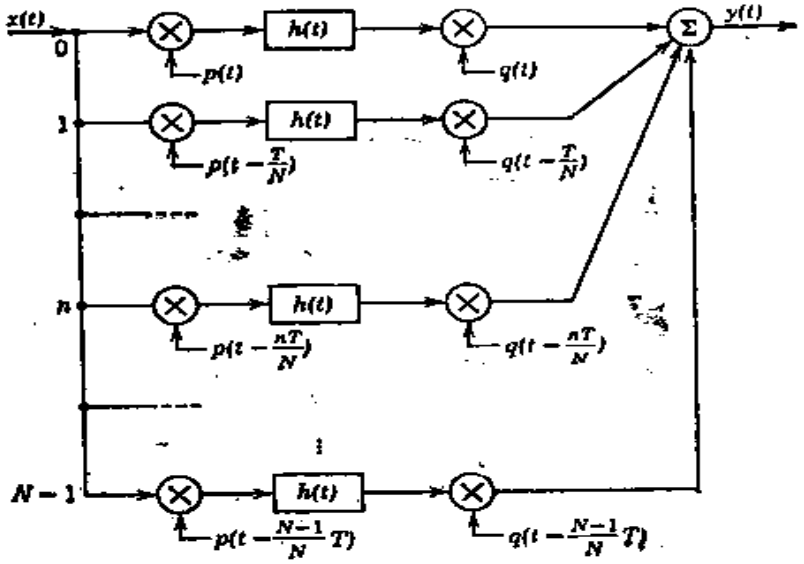
L. E. 弗兰克斯(L. E. Franks)
马萨诸塞大学
阿默斯特(Amherst)，马萨诸塞州

采用随时间而周期变化的电路元件，对只用固定参数元件的滤波器实现提供某些有吸引力的选择。基本优点是：在电感器或分布参数元件太笨重或太昂贵以获得很低损耗的频率范围内运用的滤波器，可以用一种时变和固定电阻器及电容器的组合来等效地实现。尽管这种电路含有内部时变元件，它都可以被设计来显示出不随时间而变化的端子性能。往往伴随这类实现的另一优点是：可以使滤波器性能容易用电子设备来调节。这是由控制（为时变元件提供周期信号的）振荡器的相位、频率和谐波含量参数来完成的。利用控制这些参数的数字电路所提供的精密性及易于调节，远远超过用可变电感器或延迟线所获得的。数字滤波器所享有的许多"程序控制性"特征，事实上可以用周期可变元件适当设计的模拟滤波器来达到。

相对地说，时变滤波器也没有用高 Q 谐振器元件实现的有源 RC 网络所具有的那种严重灵敏度问题。这些固有优点与制造集成电路和薄膜电路技术方面的新近进展对于使用时变元件来实现滤波器成微型电路结构的研究给出了一种新的促进。

11.1 预备知识

N 通路滤波器[1]是一种用时变元件以乘法器或调制器形式实现多种多样滤波性能的广义结构。图 11-1 所示的基本结构由 N 个(为了分析方便，用 n 从 0 到 $N-1$ 标明的)并联分路组成，每个分路都包含有在输入和输出都加调制器的非时变滤波器。除在相继分路中调制函数的相位作均匀参差外，分路结构是相同的。应用这种特殊结构，在与所用路数成比例的一个带宽范围内可得到非时变的滤波。相当简单的分路网络就可得到高选择性的带通滤波器或者多通带（梳形）滤波器，而后者的实现一般总是需要质量高的延迟线。对于某些应用来说将需要大量调制器，但在另一方面，通常对这些应用的需要又



$p(t) = p(t+T)$；$q(t) = q(t+T)$

图 11-1 N通路结构

可以用简单“通断”调制或采样开关来满足。因此对于调制来说，通常并不要求高度精密的乘法器电路的实现。

作为推导N通路滤波器响应特性的准备，我们首先介绍在N通路结构中表示一个单路的时变网络的分析。用时域方法推导对应于信号的一般线性运算的输入-输出关系，往往比通常用来表征不随时间而变化的运算的频域方法为简单。假定产生线性运算的网络在无输入条件下并没有输出(零起始条件)，那么对输入信号$x(t)$的响应$y(t)$，就可以一般地表示为关于$x(t)$的积分变换。

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t,t_1)\cdot x(t_1)dt_1 \qquad (11.1)$$

式中$w(t,t_1)$为网络的冲激响应。如果把冲激施加在瞬间τ，也就是如果$x(t)=\delta(t-\tau)$，那么响应就是$y(t)=w(t,\tau)$。对于实际上可实现的网络来说，在瞬间t的输出必须不取决于未来的输入值，因此对于所有$t<\tau$ $w(t,\tau)=0$。为此，(11.1)式的上限可以用t代换。如果网络还是非时变的，那么冲激响应就必须只是差值变量$t-\tau$的函数。

这里有意义的运算是相乘，接着是非时变的运算，再跟上另一相乘，如图11-2所示。可由观察而得到这个单通路结构的冲激响应。在瞬间τ所施加的单位冲激在非时变网络的输入端简单的由因数$p(\tau)$来定标。非时变网络的响应为$p(\tau)\cdot h(t-\tau)$，并在输出端被乘以$q(t)$。因此，分路的冲激响应为

$$w(t,\tau)=p(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot q(t). \qquad (11.2)$$

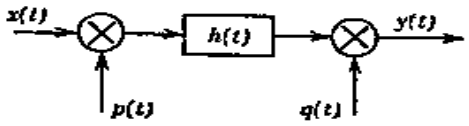


图 11-2 具有输入和输出乘法器（调制器）的单通路时变网络。

在这里讨论的应用中，调制函数 $p(t)$和 $q(t)$ 都具有周期为 T 的周期性。可以把这些函数表示为它们的傅里叶级数形式

$$p(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}P_m e^{j(2\pi mt/T)}=p(t+T)$$

$$q(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}Q_l e^{j(2\pi lt/T)}=q(t+T). \qquad (11.3)$$

这种类型时变网络的某些重要特征可由检查指数形式输入 e^{st}(其中 s 为任意复频率) 的响应而得到。当 $x(t)=e^{st}$ 时，并利用差值变量 $\sigma=t-\tau$，

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-\infty}^{t}p(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot q(t)e^{st}d\tau\\&=\sum_l\sum_m Q_l P_m e^{j[2\pi(l+m)t/T]}\cdot e^{st}\int_0^{\infty}h(\sigma)e^{-s\sigma-j(2\pi m\sigma/T)}d\sigma\\&=\left[\sum_l\sum_m P_m Q_l H\left(s+j\frac{2\pi m}{T}\right)e^{j[2\pi(l+m)t/T]}\right]e^{st}\end{aligned} \qquad (11.4)$$

式中 $H(s)$为函数 $h(t)$的拉普拉斯变换。对于非时变网络来说，这个响应总是和 e^{st} 成比例的，但此时在响应中有附加成分，那就是 e^{st}的“影象”。如果 $s=j2\pi f$，那么在频率 $f+(l+m)/T$ 就有影象成分。任何一个影象的强度，都取决于傅里叶系数 P_m和 Q_l的大小，以及转移函数 $H(s)$在频率 $f+m/T$ 的大小。N通路滤波器的基本运行原理是：在合并多路情况下的响应时，可以使N足够大来把影象在任何所需频带范围内都消除或“终止”。结果是，在这个频带范围内滤波工作是非时变的。而且，结果转移函数具有一种对许多类型滤波运算的实现提供统一方法的形式，与只使用固定参数元件时所必须使用的方法

大不相同。

11.2 N 通路结构的响应特性

再参考图 11.1，各路的冲激响应直接从(11.2)得到，而总冲激响应则由计算整个 n 的总和来得到。

$$w(t,\tau)=h(t-\tau)\cdot\sum_{n=0}^{N-1}p\left(\tau-\frac{nT}{N}\right)\cdot q\left(t-\frac{nT}{N}\right). \quad (11.5)$$

涉及整个 n 总和的因数计算，由于使用 (11.3) 中 $p(t)$ 和 $q(t)$ 的傅里叶级数表示法而容易了。

$$\sum_{n=0}^{N-1}p\left(\tau-\frac{nT}{N}\right)\cdot q\left(t-\frac{nT}{N}\right)$$

$$=\sum_{l}\sum_{m}P_mQ_le^{j(2\pi/T)(m\tau+lt)}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j(2\pi n/N)(l+m)}. \quad (11.6)$$

(11.6)中整个 n 总和包含几何级数，因此可以把它表示成闭合形式。

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j(2\pi n/N)(l+m)}=\frac{1-e^{-j2\pi(l+m)}}{1-e^{-j(2\pi/N)(l+m)}}$$

$$=N \text{ 当 } l+m=kN \text{ 时}$$
$$=0 \text{ 当 } l+m\neq kN \text{ 时} \quad (11.7)$$

其中 k 为任何整数。以 $l+m=kN$ 代替(11.6) 中的 m，则冲激响应成为

$$w(t,\tau)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi kN/T)\tau}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} NP_{kN-l}Q_l \cdot e^{j(2\pi l/T)(t-\tau)} \cdot h(t-\tau)\Big]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi kN/T)\tau} \cdot w_k(t-\tau). \qquad (11.8)$$

(11.8)大括号中的因数是$(t-\tau)$的函数，因此它对应于非时变的滤波运算。其余因数则只取决于τ，根据(11.2)，它们表示输入调制器。用这种方法，我们已得出数学上关于N通路滤波器的等效结构，如图 11-3 所示[2]。我们注意到一种类似的等效结构，这种结构包含非时变网络连同单频输出调制器的并联组合，可以由于使用$l+m=kN$来消除(11.6)中的标志l而得到。

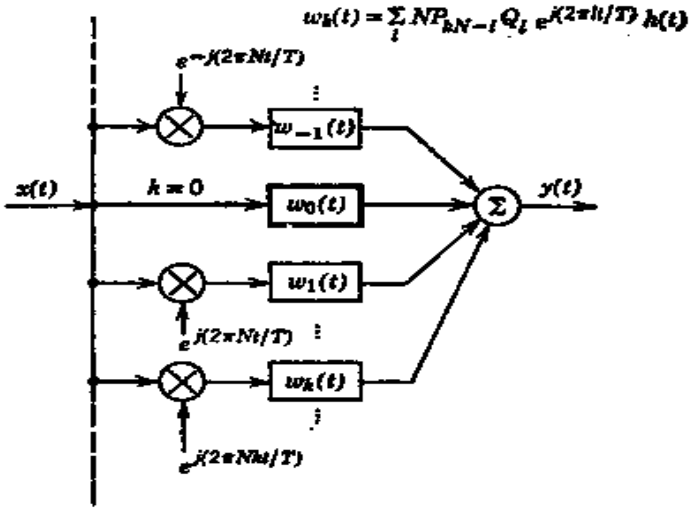


图 11-3　包含单频输入调制器的等效结构

检查这两种等效结构中的任何一个都易于看出，使运算为非时变所需要的是什么。如果，而且只有当可以把图 11.3 中除$k=0$外经过所有分路的传输都抑制，才得到非时变特性。

这种抑制可能按下列两种方法中的任何一种而得到：(1) 有限带宽的调制函数，或(2)有限带宽的输入和输出信号。对于第一种情况来说，如果对所有 l 都有 $P_l=Q_l=0$ 以致 $|l|\geqslant N/2$，那么任何 $k\neq 0$ 的 $P_{kN-l}\cdot Q_l=0$。这意味着 $k\neq 0$ 时 $w_k(t)=0$，而信号发送则只通过非时变的 $k=0$ 分路才会出现。另一方面，如果 $x(t)$ 不包括大于 $N/2\,T$ 的频率，那么由 $k\neq 0$ 分路所产生的影象，将整个出现在大于 $N/2\,T$ 的频率。因而我们看出，如果 N 通路结构的前面和后面都有理想低通滤波器，其截止频率为 $f_c=N/2\,T$，那么整个结构就等效于一个在频带 $|f|\leqslant N/2\,T$ 范围内以 $k=0$ 为特征的非时变滤波器，不论调制函数的谐波含量如何。

假定结合这些频带限制中的一种或另一种，我们只关心以冲激响应函数

$$w_0(t)=h(t)\cdot c(t) \tag{11.9}$$

为特征的 $k=0$ 分路的响应特性，式中 $h(t)$ 为各路中滤波器的冲激响应，$c(t)$ 为一周期函数并给定为

$$c(t)=N\sum_{l=-\infty}^{\infty}P_{-l}Q_l e^{j(2\pi l/T)t}, \tag{11.10}$$

即与调制函数有关的一种函数，而其傅里叶系数为 $NP_{-l}Q_l$。在已知响应特性的综合中，要特别指出在选择调制函数时有某种程度的灵活性，因为 $c(t)$ 仅取决于 $p(t)$ 和 $q(t)$ 的对应傅里叶系数的双双乘积。在某种情况下，这种灵活性可以用来将已知特性所需要的分路网络数减少一半[3]。

虽然(11.10)对于表示 N 通路滤波器响应的特征是一有用的表达式，但仍容易说明

$$c(t)=\frac{N}{T}\int_0^T p(\sigma)\cdot q(t+\sigma)\,d\sigma \tag{11.11}$$

为冲激响应中关于周期因子的等效表达式。$c(t)$的这个补充表达式用来得到一种关于N通路滤波器转移特性的闭合式关系。

转移函数

考虑$x(t)=e^{st}$形式的输入信号，我们得到$y(t)=W_0(s)\cdot e^{st}$形式的响应，其中转移函数$W_0(s)$为$w_0(t)$的拉普拉斯变换。

$$W_0(s)=\int_0^\infty h(t)\cdot c(t)\cdot e^{-st}dt$$

$$=N\sum_{l=-\infty}^{\infty}P_{-l}Q_lH(s-j(2\pi l/T)). \qquad (11.12)$$

该转移函数由分路网络转移函数的频率位移型式的和组成。如果分路网络为带宽小于$1/2T$的低通滤波器，那么N通路转移函数就有一种等间隔通带的多通带特性，各通带都具有由于$c(t)$的对应傅里叶系数所给定的不同增益系数。这种特征用图

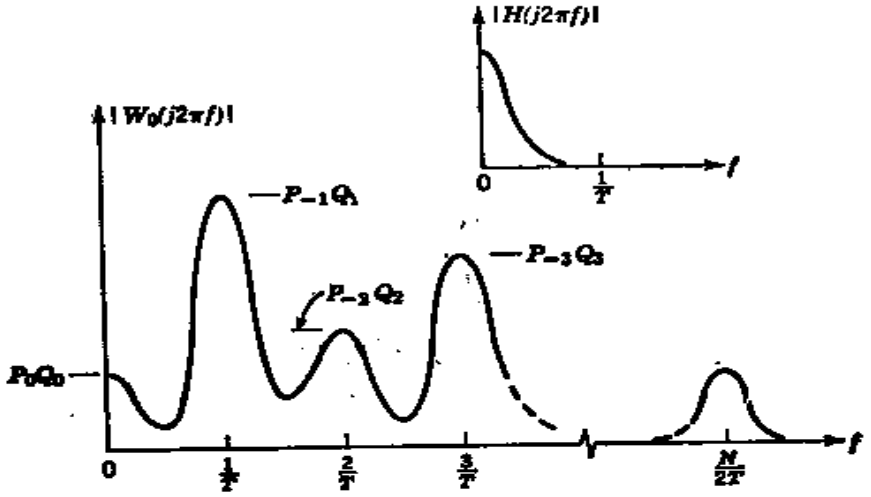


图 11-4 N通路滤波器的多通带增益·频率特性

形示于图 11-4 中。

$W_0(s)$的闭合形表达式

如果 $H(s)$ 为一相当于有限阶分路网络的有理函数，那么我们可以为 $W_0(s)$导出另一种闭合形式的表达式。首先考虑 $H(s)$相当于一阶网络在 $s=s_i$ 有单极点的情况。冲激响应具有形式

$$h(t)=e^{s_i t} \qquad \text{当 } t\geqslant 0. \tag{11.13}$$

因此

$$W_0(s)=\int_0^\infty c(t)\cdot e^{(s_i-s)t}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T c(\tau+kT)\cdot e^{(s_i-s)(\tau+kT)}d\tau. \tag{11.14}$$

利用 $c(t)$的周期性，可以把(11.14)再写为

$$W_0(t)=\int_0^T c(\tau)e^{-(s-s_i)\tau}d\tau\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{(s_i-s)kT}, \tag{11.15}$$

并计算几何级数的总和，得到

$$W_0(s)=\frac{D(s-s_i)}{1-e^{(s_i-s)T}}$$

其中

$$D(s)=\int_0^T c(t)\cdot e^{-st}dt \tag{11.16}$$

这是根据(11.11)中表示 $c(t)$的一种闭合形表达式。函数 $D(s)$是在时间间隔 $0\leqslant t<T$ 内相当于 $c(t)$的一个周期的有限持续时间函数的拉普拉斯变换。照这样，$D(s)$没有极点，而 $W_0(s)$的仅有极点、则来自 $1-e^{(s_i-s)T}$ 的零点。这些极点位于 $s=s_i+j(2\pi l/T)$，其中 $l=0$，±1，±2，$\cdots$。

现由于M阶分路网络具有M个不同的极点，我们假定可以把$H(s)$表示为两个M次多项式之比，因而

$$h(t)=K_0\delta(t)+\sum_{i=1}^{M}K_i e^{s_i t} \quad \text{当 } t\geqslant 0 \qquad (11.17)$$

式中s_i为分母多项式的根。现在分别讨论各项，得到

$$W_0(s)=K_0 c(0)+\sum_{i=1}^{M}\frac{K_i\cdot D(s-s_i)}{1-e^{(s_i-s)T}}. \qquad (11.18)$$

对于多阶极点类似的表达式可以得到(参看习题 11.3)。在s平面上的极点图，由具有每隔$2\pi/T$作重现的各s_i的垂直弦线组成，如图 11-5 所示。$W_0(s)$的零点图一般不是同样形式的，

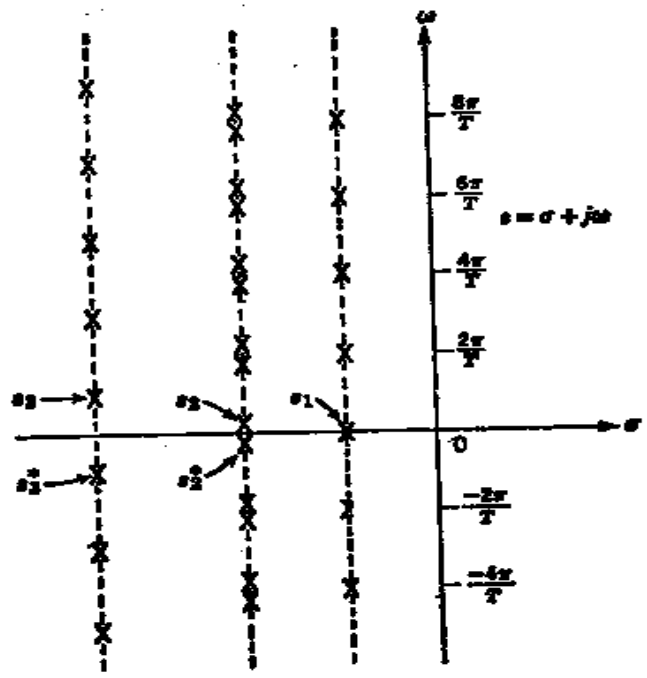


图 11-5　在s_1、s_2、s_2^*、s_3、s_3^*具有极点的分路网络函数的 W_0(s)的极点图

除非 $D(s)$碰巧有一周期性形式。周期性 $D(s)$的某些特例在下节中考虑。

11.3 调制函数的特殊类型

交变调制

某些有趣的设计特点，是由利用每半周期具有交替极性的重复波形所组成的调制函数而引起的。这些类型调制函数，显示出有一些对称，可以把它表示为

$$p(t)=-p\left(t-\frac{T}{2}\right) \tag{11.19}$$

并用图解说明于图 11-6 中。满足(11.19)的周期函数的傅里叶级数表示式，只包含奇次谐波，即偶数 m 的 $P_m=0$。

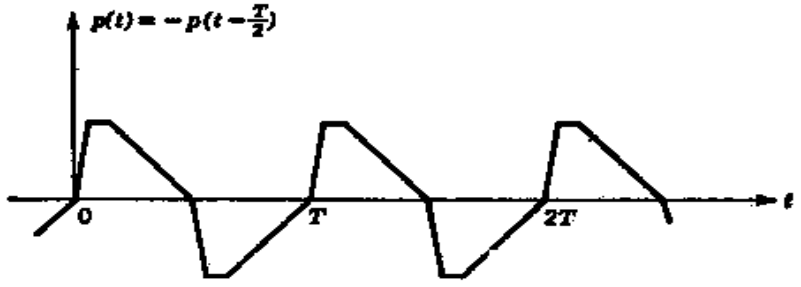


图 11-6 交变调制的例子

现在假定 N 通路滤波器有偶数分路，而且输入和输出调制函数二者都满足(11.19)的对称条件。于是我们有

$$p\left(t-\left[n+\frac{N}{2}\right]\frac{T}{N}\right)=-p\left(t-\frac{nT}{N}\right)$$

$$q\left(t-\left[n+\frac{N}{2}\right]\frac{T}{N}\right)=-q\left(t-\frac{nT}{N}\right),\quad 0\leqslant n\leqslant\frac{N}{2}-1 \tag{11.20}$$

因此通过第 n 分路和第 $(n+N/2)$分路的传输是相同的。结果是除增益系数 2 外，可以把图 11.1 中较低的 $N/2$ 个分路都消除，而不影响转移函数或者有效的频带。分路数的这种显著减少，只能在那些所需转移特性不需要以基本调制频率的偶数倍为中心的 $H(s)$ 的位移型式时实现。森（Sun）把这种类型的 N 通路滤波器称为正交 N 通路滤波器[4]。

正弦调制

在前节中注意到了，如果调制函数中的最高谐波成分有了一低于 $N/2T$ 的频率，那么 N 通路滤波器就呈现非时变的端子特性，而不必要在输入端和输出端加上频带限制滤波器。这种结果的最经常应用在于利用单频（正弦波）调制函数来影响个别的低通到带通变换。这种变换要求 $N \geqslant 3$，但我们清楚地认识到正弦曲线产生一种交变调制的形式。因此我们可以使 $N=4$，并实现只具有两个实际分路和一个在各路调制函数中的 $\pi/2$ 相位差的变换。从而当 $|l| \neq 1$ 和 $c_1 = 4\ P_{-1}Q_1$ 时，如果 $P_1 = Q_1 = 0$，那么由两路滤波器所产生的低通到带通变换的结果就以转移函数

$$W_0(s) = \frac{c_1}{2} H\left(s - j\frac{2\pi}{T}\right) + \frac{c_1^*}{2} H\left(s + j\frac{2\pi}{T}\right) \quad (11.21)$$

为特征，或等效地以冲激响应

$$w_0(t) = |c_1| h(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) \quad (11.22)$$

为特征，其中

$$c_1 = |c_1| e^{j\phi}.$$

(11.21) 式所示的变换，为高选择性带通滤波器的实现提供一种有吸引力的途径[5-9]。窄带宽低通函数 $H(s)$ 可由 RC 无源或有源网络准确地实现，并可把所得到的通带形状简单地

通过合适的调制频率来位移到任何所需中心频率。这还提供一种方便的可调谐性特点，因为通带形状与中心频率无关，这个中心频率可通过控制产生调制函数的标准振荡器来平调或电调。通带形状和中心频率的这种独立性的结果，有可能实现具有高精度的极窄带滤波器特性。等效 LC 实现总是需要昂贵的高 Q 电感器。类似的转移特性可以用无电感的有源带通滤波器来得到，但其稳定度和对元件值变化的灵敏度则有严格限制。N 通路带通滤波器的某些设计情况在下节讨论。更详细的讨论由格拉泽(Glases)等人提供了[3]。

阶梯调制

N 通路滤波器实现中的实际限制是需要精密乘法器元件，因而可能导致一种不经济的结构。需要精密度，不过不全是为了转移函数的精确实现，而更主要的是为了提供分路特性中的均匀性，使影象成分在所需频带范围内有效地消去。从另一方面来说，如果可能利用具有逐段恒定性质的调制函数来实现所需特性，那么好乘法器元件的实现可能是十分可行的。例如，如果不包含太多的调制级，乘法器就能采用数字式控制衰减器的形式。

涉及具有 R 恒定级波形的调制和在一个周期内按等间隔时间出现的不连续性，如图 11-7 所示那样，可以叫做**阶梯调制**。此时可能从以基本调制频率的整数倍定时的 R 状态移位寄存器为乘法器提供控制信号。

图 11-7 中波形的傅里叶级数展开给出[1]

$$P_m = \sum_{r=1}^{R} \frac{e^{j(m\pi/R)} \cdot \sin\frac{m\pi}{R}}{m\pi} \cdot e^{-j(2\pi/R)mr} p_r, \qquad (11.23)$$

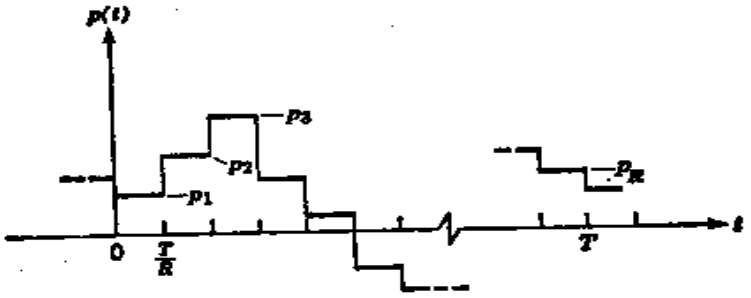


图 11-7　说明阶梯调制的典型波形

这导致递归关系

$$P_{m+kR}=\frac{m}{m+kR}P_m,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots. \tag{11.24}$$

对设计来说，通常是要求(11.23)中的反变换式，即用规定一套傅里叶系数来明确给出适当级集 p_r 的变换。最低阶傅里叶系数通常是会规定的，因为这些把传输控制在 N 通路滤波器的通带 $|f|\leqslant N/2T$ 范围内。在 $P_m=P^*_{-m}$ 的制约（因 $p(t)$ 为实数）和 $P_{R/2}=0$ 的附加条件（若 R 为偶数）的情况下，如果对 $|m|<R/2$ 来规定 P_m，则所需变换给定为

$$p_r=\sum_{|m|<R/2}^{m}\frac{e^{-j(m\pi/R)}\cdot\frac{m\pi}{R}}{\sin\frac{m\pi}{R}}\cdot e^{j(2\pi/R)mr}\cdot P_m,\quad r=1,2,\cdots R. \tag{11.25}$$

(11.25)的求导运算在参考文献[1]中给出。我们再度表明在设计调制函数方面存在灵活性，因为它不过是傅里叶系数的乘积 $P_{-i}Q_i$，这个乘积决定通带范围内的转移特性。阶梯调制的一种重要应用是获得宽带带通滤波器的可调谐性，而不需使用带宽限制调制。这是使 $P_{-i}Q_i=0$ 完成的；凡是由于所需调谐范

围而要求到的 l 值，$|l|\leqslant 1$[3]。如所料那样，结果是正弦函数的一种阶梯近似。

脉冲调制

提供最简单实现的阶梯调制的特例是只有两个级值的调制函数的调制。为了方便起见，我们将假定这两级值为(1,0)或(1,−1)。于是可以把调制在每个周期内用一个或一个以上矩形脉冲来表示。幸而，有很多N通路滤波器的有效应用可以用这种限制的调制形式来实现。可以把这种调制解释为选通运行，而且实现可以采用数字式控制固态开关的形式，或在低频应用情况下取机械开关的形式。在包括周期运行开关的某些电路中，除转移特性以外必须考虑到策动点特性。这些考虑在11.5节中讨论。

作为一个例子，假定输入和输出调制函数在每个周期内都包含一个窄矩形脉冲，如图11.8所示。此时周期函数 $c(t)$ 直接由(11.11)加以计算。这是脉冲的一种周期序列，在那里每个脉冲本质上都是 $p(t)$ 和 $q(t)$中矩形脉冲的卷积。注意到如果接通输入和输出调制的门孔间隔不同，那么由 $c(t)$组成的脉冲就总是梯形的而不是三角形的。

现以$H(s)$给定为部分分式形式，一旦按这种情况来计算函数 $D(s)$ 的值，我们就可对N通路滤波器直接从(11.18)计算转移函数 $W_0(s)$。重要的是区别在计算 $D(s)$ 方面的两种情况，因为这两种情况可以导致显著不同的结果：(情况1)接通任何分路的门不是同时打开的，即$|t_2-t_1|>d$，而(情况2)接通任何分路的门都是重合的，即 $t_2=t_1$。

情况 1，$|t_2-t_1|>d$。此时，$D(s)$ 为 $0\leqslant t<T$ 间隔内单个三角形脉冲的拉普拉斯变换。假定 $t_2>t_1$，

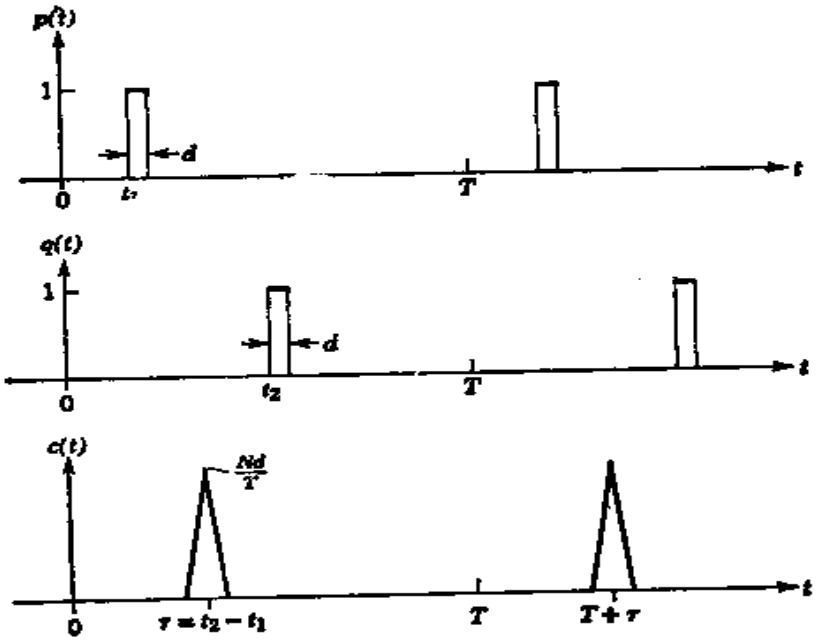


图 11-8　矩形脉冲调制函数和所得到的 c(t)。参量 τ 表示与输入门孔有关的输出门孔中的时滞

$$D(s)=\frac{d^2N}{T}\left[\frac{\sinh\frac{sd}{2}}{\frac{sd}{2}}\right]^2 \cdot e^{-s(t_2-t_1)} \qquad (11.26)$$

而且 $c(0)=0$。

如果 $t_2<t_1$，那么就用 $T+t_2-t_1$ 来替换上面的 t_2-t_1。

情况 2：$t_2=t_1$。此时，$c(t)$ 中的三角形脉冲中心在 $t=0$，因此 $D(s)$ 为分隔成两半三角形脉冲的拉普拉斯变换，如图 11-9 所示。我们可以写作

$$d(t)=f(t)+f(T-t)$$

$$D(s)=F(s)+F(-s)e^{-sT} \qquad (11.27)$$

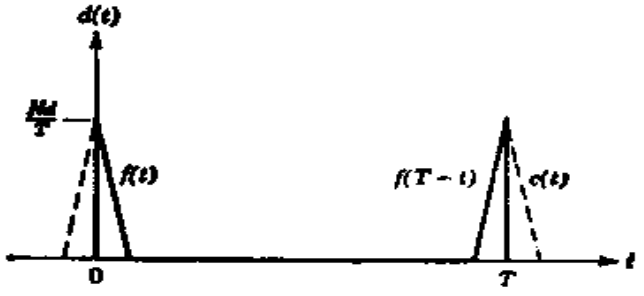


图 11-9 对重合门孔（情况 2）来说，脉冲对与 $D(s)$ 的计算有关。

式中 $$F(s)=\frac{Nd}{T}\left[\frac{1}{s}-\frac{1-e^{-sd}}{ds^2}\right].$$

和情况 1 大不相同，我们还有

$$c(0)=\frac{Nd}{T} \tag{11.28}$$

如果(11.18)中的 $K_0\neq 0$，这会对响应起作用。很明显，两种情况本质上是不同的。这将在 11.4 节中作为高通 $H(s)$ 函数的特殊情况，突出地来加以说明。对门孔的部分重叠，结果会成为两种情况的折中。

周期转移函数

N 通路滤波器特别有趣的特征是，在其工作频率范围内具有提供一种周期的或近似周期的转移函数的能力。这是以脉冲调制使门孔间隔 d 接近零（或至少小于 T/N）而完成的。此时可以把门考虑为采样门，而且有许多为采样数据滤波器所提出的分析方法例如 z 变换可以有利地加以利用。可是，和单路采样数据滤波器不同，N 通路滤波器有一种扩大到包括许多周期的频率范围的转移特性的响应，并与所使用的分路数成正比。

设(11.26)中的 d 接近零，对于情况 1 我们有

$$D(s)\cong\frac{d^2N}{T}\cdot e^{-s(t_2-t_1)} \tag{11.29}$$

而且因为 $c(0)=0$，(11.18)中的转移函数接近

$$W_0(s)=\frac{d^2N}{T}\cdot e^{-s(t_2-t_1)}\cdot\sum_{i=1}^{M}\frac{K_ie^{s_i(t_2-t_1)}}{1-e^{(s_i-s)T}}$$

$$=\frac{d^2N}{T}\cdot e^{-s(t_2-t_1)}\cdot W_0'(s) \tag{11.30}$$

倘若单独考虑恒定延迟因数 $e^{-s(t_2-t_1)}$，则因 $s=j2\pi f$，它是 f 的以 $1/T$ 为周期的函数。将(11.30)中的 $W_0'(s)$ 因数展开成为 e^{-sT} 的幂级数，我们得到

$$W_0'(s)=\sum_{k=0}^{\infty}h_ke^{-kTs} \tag{11.31}$$

式中 $$h_k=h(kT+t_2-t_1)=\sum_{i=1}^{M}K_ie^{s_i(kT+t_2-t_1)},$$

即，展开式中的系数是分路网络的冲激响应的适当样值。$\{h_k\}$ 序列的 z 变换定义为[10]

$$\mathscr{H}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}h_kz^{-k}. \tag{11.32}$$

比较(11.31)和(11.32)，我们看出：N 通路滤波器的转移函数应用变量 $z=e^{sT}$ 的变换与适当采样冲激响应 $h(t)$ 的 z 变换间有简单的关系。

$$W_0(s)=\frac{d^2N}{T}\cdot e^{-s(t_2-t_1)}\cdot\mathscr{H}(e^{sT}). \tag{11.33}$$

对于情况 2，对应的结果为

$$D(s)\cong\frac{Nd^2}{2T}[1+e^{-sT}] \tag{11.34}$$

因为 d 接近零。回想到情况 2 的 $c(0)=Nd/T$，并再按 $z=e^{sT}$ 的反幂展开，我们得到

$$W_0(s)=\frac{K_0Nd}{T}+\frac{Nd^2}{2T}\sum_{i=1}^{M}K_i\frac{1+e^{(s_i-s)T}}{1-e^{(s_i-s)T}}$$

$$=\frac{d^2N}{T}\left[\frac{K_0}{d}-\frac{h_0}{2}+\mathscr{H}_0(e^{sT})\right] \qquad (11.35)$$

式中

$$\mathscr{H}_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}h_kz^{-k} \qquad (11.36)$$

$$h_k=h(kT) \quad \text{当 } k\geqslant 1$$

$$h_0=h(0+).$$

因而，除附加的常数外，结果在形式上与 (11.33) 相似。(11.36)中的 $\mathscr{H}_0(z)$ 不同于 (11.33) 中的 $\mathscr{H}(z)$，因为$\{h_k\}$序列是在不同的瞬间由采样 $h(t)$ 而得到的。如果 $K_0=0$ 和 $h(0+)=0$，那么两种情况实际上就相同。

这些结果的实际意义是，为了获得有理 $\mathscr{H}(z)$ 来逼近规定的周期转移特性，已提出了各种方法。这些方法大部分已在有关数字滤波器[10]和分布元件滤波器的设计的工作（参看第 7 章和第 12 章）涉及了。

通带设计程序

如果所需周期转移函数具有一系列很窄通带的形式（梳形滤波器），那么利用方便的低通滤波器设计方法来获得所需通带形状是可能做得到的。明确说来，如果分路网络的衰减在 1/2 N 以上的所有频率都足够大，那么就可以把(11.12)中 $W_0(s)$ 的单独各项考虑为不相重叠的，而且每个通带都只不过是低通特性的移频型。另一方面，有许多情况这种方法不够准确，则必

须首先求出一个导致满足通带形状的有理 $\mathscr{H}(z)$。一找到恰当的 $\mathscr{H}(z)$，则为分路网络寻求适合的 $H(s)$问题就单纯了。这是可以做到的，例如使 $\mathscr{H}(z)$ 按变量 Z^{-1} 的部分分式展开。然后从这个展开式中的每个项，按照 (11.30) 或 (11.35) 来为 $H(s)$ 找到对应的极点位置 s_i 和留数 K_i。

幸而还可将滤波器设计中逼近问题的常用方法对寻求恰当的 $\mathscr{H}(z)$ 问题带来影响。通常这是由实行 z 变量的双线性变换来完成的，

$$w=u+jv=\frac{z-1}{z+1}=\tanh\frac{sT}{2}, \qquad (11.37)$$

因此把 $\mathscr{H}(z)$ 变换为函数 $G(w)$（而且是 w 的有理函数）。(11.37) 中所示的变换，把水平带 $|\mathrm{Im}(s)|\leqslant\pi/T$ 映射到整个 w 平面。而且，带的左半部分 $\mathrm{Re}(s)<0$ 对应于 w 平面的整个左半，因此 $G(w)$ 的左半平面极点总是会导致 $H(s)$ 的左半平面极点。为了在W平面中利用常用的逼近理论，我们必须首先"预矫正"所需通带增益相位特性，以适应由变换所产生的频率标度变弯，

$$v=\tan\pi Tf. \qquad (11.38)$$

注意在要求的是通带有一种近似矩形的增益特性的特殊情况下，这种预矫正只不过等于寻求 $|G(jv)|$ 特性的截止点，这个截止点通过(11.38)就相当于所需通带截止频率。

11.4 实际应用

梳形滤波器 I

N 通路滤波器的周期响应特性的有效应用之一，在于从非

周期性噪声干扰的背景中对周期信号的选择性滤波。如果分路网络是具有带宽小于 $1/2T$ 的低通滤波器，那么N通路滤波器响应就是一系列形成一梳形的等间隔通带，它对周期为T的信号几乎没有失真、但却显著地减小干扰噪声的功率。

例如，假定分路网络为单节 RC 低通滤波器，各有在 $s=-\alpha=-\frac{1}{RC}$的一个单极点。

$$H(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}. \tag{11.39}$$

那么，由(11.18)，N通路滤波器的转移函数为

$$W_0(s)=\frac{\alpha\cdot D(s+\alpha)}{1-e^{-(s+\alpha)T}}. \tag{11.40}$$

而且假定调制包含采样门宽 d 和输出门孔中的时滞$\tau=t_2-t_1>d$(图 11-8)。那么利用(11.40)和(11.26)，我们有

$$W_0(s)=\frac{\alpha d^2N}{T}\left[\frac{\sinh(s+\alpha)\frac{d}{2}}{(s+\alpha)\frac{d}{2}}\right]^2\frac{e^{-(s+\alpha)\tau}}{1-e^{-(s+\alpha)T}}. \tag{11.41}$$

当 $d=0.05T$ 和 $\alpha T=0.2$ 时所得到的增益频率响应示于图 11-10 中。如果 d 小到足以使 (11.40) 中的 $D(s+\alpha)$ 因数在 $|f|\leqslant N/2T$ 范围内本质上不变，那么转移函数接近周期函数，

$$W_0(s)=\frac{\alpha d^2N}{T}\cdot\frac{e^{-(s+\alpha)\tau}}{1-e^{-(s+\alpha)T}}. \tag{11.42}$$

由于假定噪声在信号频带 $|f|\leqslant N/2T$ 范围内有一恒定功率频谱密度K瓦/Hz，可以得到关于周期梳形滤波器特性的简单表达式。不经梳形滤波器，信号与噪声功率比为

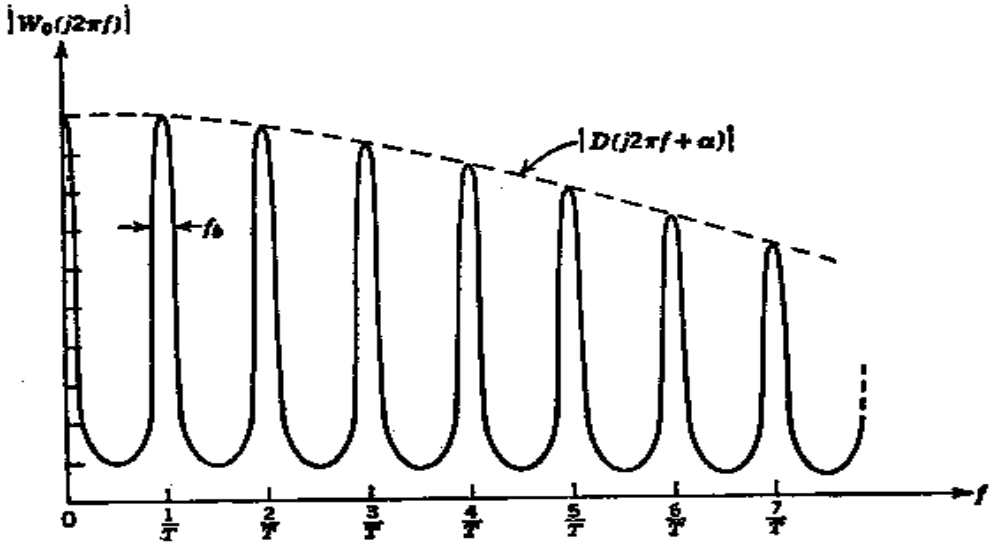


图 11-10　具有单极点低通分路网络和矩形脉冲调制的梳形滤波器的频率响应。这个曲线图的相关参数为 $\alpha T=0.2$ 和 $d=0.05\,T$

$$SNR_1=\frac{JT}{KN}$$

式中 J 是周期信号中的功率。设 $W_0'(s)$表示已在 $f=1/T$ 的倍数归一化为单位传输的 (11.42) 中的转移函数，那么利用梳形滤波器的信号与噪声比为

$$SNR_2=J\left[\int_{-N/2T}^{N/2T}|W_0'(j\,2\,\pi\,f)|^2K\,df\right]^{-1}.$$

由于$|W_0'(j\,2\,\pi\,f)|$的周期性质，我们可以把信噪改进因数 γ 表示为

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{SNR_1}{SNR_2}=T\int_{-1/2T}^{1/2T}|W_0'(j\,2\,\pi\,f)|^2df$$
$$=T\int_{-1/2T}^{1/2T}\frac{(1-e^{-\alpha T})^2df}{1+e^{-2\alpha T}-2\,e^{-\alpha T}\cdot\cos 2\,\pi\,Tf}.$$

计算这个积分，我们得到

$$\gamma=\coth\frac{\alpha T}{2}. \tag{11.43}$$

例如，为了在信噪比方面实现 10 dB 的改进，我们得到 $\gamma=10$，这就要求 $\alpha T\cong 0.2$。对于这个例子来说，在各个梳齿上的带宽（在 3 dB 点之间）很接近等于 RC 分路网络的两倍带宽，即 $f_s=1.0035\,\alpha/\pi$。αT 一增加，带宽 f_s 就相对地变大，因为有更多的 $H(j2\pi f)$ 的平移型的重叠。齿的实际带宽可以从下式关系确定

$$\cos\pi f_s T=2-\cos h\,\alpha T. \tag{11.44}$$

带宽和信噪改进因数对 αT 的依赖关系示于图 11-11 中。当 αT 接近 1.76 的时候，重叠是如此之大以致增益下降不超过 3

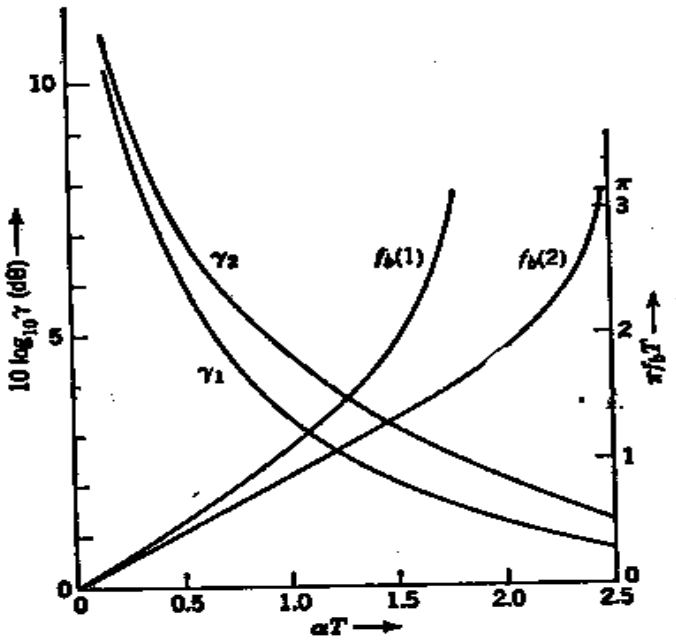


图 11-11　梳形滤波器的信噪比改进因数 γ 和齿带宽 f_s，作为分路网络函数中极点位置的函数。曲线图可与不相重叠门孔（情况 1）和重合门孔（情况 2）的结果相比

dB，而且不能确定齿带宽。对单极点分路网络来说，信噪改进因数 γ 在周期梳形特性中也等于最大与最小增益之比。

(11.42)的梳形特性，是等效于由更通用的(要求使用延迟线作宽带放大器的反馈环) 实现方法所得到的特性 [11]。图 11-12 所示的网络呈现出与在 N 通路梳形滤波器转移函数中周期因数一样的转移函数。

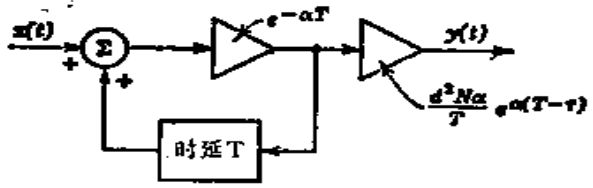


图 11-12 使用延迟线的梳形滤波器的等效电路（情况 1）

对情况 2（各路的门孔重合）和小 d 来说，我们有一种稍微不同的梳形特性，因为由(11.34)，

$$D(s)\cong\frac{Nd^2}{2T}(1+e^{-sT}),$$

从而

$$W_0(s)=\frac{\alpha Nd^2}{2T}\cdot\frac{1+e^{-(s+\alpha)T}}{1-e^{-(s+\alpha)T}}. \qquad (11.45)$$

这个特性实质上在齿间的区域内提供的衰减，比由具有同样 α 值的 (11.42) 所提供的更大。对应的信噪改进因数和齿带宽，也图示于图 11-11 中，以便与情况 1 结果相比较。

梳形滤波器 II

周期滤波特性的另一种实际应用是**梳形陷波滤波器**。这种滤波器，在除一系列集中于某些指定倍频的狭窄槽口外的频带内显示出一种本质上不变的增益特性。应用和前面所考虑的梳形 I 相反。在非周期信号和周期干扰掺杂的情况下，只要槽口

够窄，适当的梳形陷波滤波器完全可以消除干扰而不致使信号过度失真。具体应用是在活动目标指示器（MTI）雷达中，梳形陷波滤波器在这种场合抑制掉从静止目标周期性的反射信号[11]。在这种情况下，将槽口安置在倍于扫描天线的旋转速度的频率处。

梳形陷波滤波器的N通路实现之一，包括在输入端和输出端的窄采样门（像前例中一样）和作为分路网络的单极点RC高通滤波器。所需陷波特性严格地取决于时滞τ，对这种特殊的实现方法其输出门脉冲滞后输入门脉冲。

我们设

$$H(s)=\frac{s}{s+\alpha}=1-\frac{\alpha}{s+\alpha}, \tag{11.46}$$

对于这种情况来说所以(11.18)中的$K_0=1$和$K_1=-\alpha$。周期性的$c(t)$具有图11-8所示的形状，其中假定d是够小的，以便基本上得到周期性增益频率特性。于是可以写出

$$D(s)\cong A_1(\tau)+A_2(\tau)\cdot e^{-sT} \tag{11.47}$$

式中A_1和A_2表示在图11-13中阴影区域下的面积。因为$c(0)=(N/T)(d-|\tau|)$当$|\tau|\leqslant d$时，由(11.18)我们有

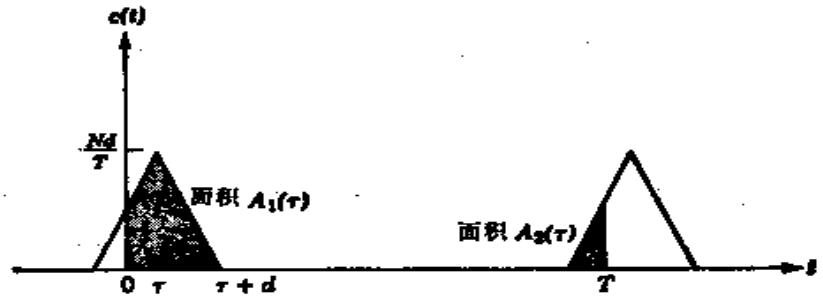


图 11-13 $D(s)$和$C(O)$对滞后时间τ的依赖关系的说明

$$W_0(s)=\frac{N}{T}(d-|\tau|)-\frac{\alpha A_1(\tau)+\alpha A_2(\tau)\cdot e^{-(s+\alpha)T}}{1-e^{-(s+\alpha)T}}$$

$$=\frac{\frac{N}{T}(d-|\tau|)-\alpha A_1(\tau)-\left[\frac{N}{T}(d-|\tau|)+\alpha A_2(\tau)\right]e^{-(s+\alpha)T}}{1-e^{-(s+\alpha)T}}.$$

(11.48)

现在如果调整 τ，使

$$\frac{\frac{N}{T}(d-|\tau|)+\alpha A_2(\tau)}{\frac{N}{T}(d-|\tau|)-\alpha A_1(\tau)}=e^{\alpha T}, \tag{11.49}$$

那么，利用比例常数 A，我们有

$$W_0(s)=A\cdot\frac{1-e^{-sT}}{1-e^{-(s+\alpha)T}}. \tag{11.50}$$

这个转移函数显示出传输中的所需零值使梳形陷波特性提供在槽口中心的完全抑制；也就是 $W_0(j2\pi f)=0$，当 $f=m/T$、m 为任何整数时。零极点图和增益频率特性说明于图 11-14 中。对于窄槽口 $\alpha\ll 2\pi/T$ 来说，槽口带宽（在 3 dB 点之间）大致为 α/π(Hz)。注意也可能以恰当的负 τ 值，即以输出门脉冲稍微导前输入门脉冲来获得这个结果。梳形陷波滤波器的这种实现方法的明显缺点，是在保持适当陷波特性所要求的 τ 值方面的高精度。事实上。如果 τ 作细微变化以使 $|\tau|>d$，则槽口完全消失，而且结果是利用低通分路滤波器所获得的第一型梳形滤波器。这是因为以 $|\tau|>d$、$c(O)=O$ 和 $D(s)\cong(Nd^2/T)e^{-sT}$，所以甚至在高通分路滤波器的情况下，我们得出

$$W_0(s)=-\frac{\alpha d^2N}{T}\cdot\frac{e^{-(s+\alpha)\tau}}{1-e^{-(s+\alpha)T}} \tag{11.51}$$

除极性颠倒外，这是与(11.42)所示的结果相同的。保留这个

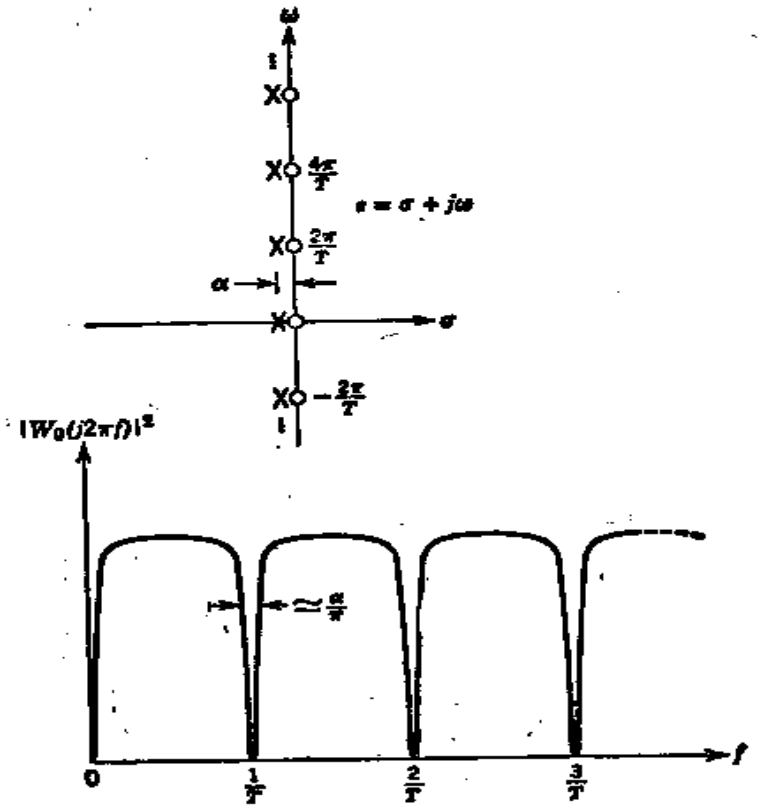


图 11-14　梳形陷波滤波器的零极点图和频率响应。

例子主要是为了说明存在某些情况，那时调制函数的相位对N通路滤波器的响应特性有显著影响的。对使用正弦调制函数的N通路滤波器来说，已由萨拉加(Saraga)[12]表明过同样的影响。梳形陷波滤波器不严格取决于输入和输出调制的相对相位的一种更实用的实现在 11.5 节提出。

带通滤波器

在 11.3 节讨论了使用正弦调制的单通带带通滤波器的实

现。这里讨论使用有两个级值的阶梯调制的一种较简单实现。在图 11-15 所示的电路中，使用矩形波输入和输出调制。可以把调制器实现为极性转换开关，或实现为包含四个二极管的常用平衡环形调制器。因为矩形波是一种交变调制的形式，我们可使$N=4$而实现只具有两路，并且在每路调制中只具有四分之一周期相位差的滤波器。假定这两路结构伴随有截止频率为$2/T$的入端和出端频带限制滤波器。因为矩形波没有直流或二次谐波成分，在频率范围$0 \leqslant f < 2/T$内只有一个(中心在$f=1/T$的)通带。

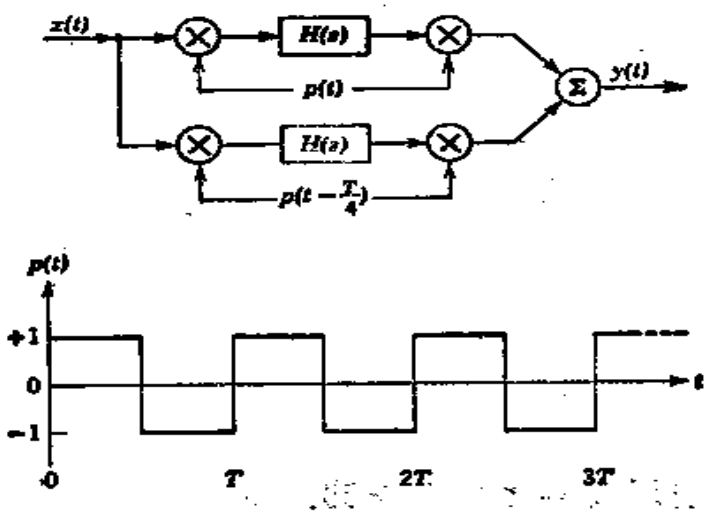


图 11-15　具有矩形波调制的两路带通滤波器

计算矩形波的基频傅里叶成分，我们得到电压转移系数

$$W_0(s)=\frac{8}{\pi^2}\left[H\left(s-j\frac{2\pi}{T}\right)+H\left(s+j\frac{2\pi}{T}\right)\right], \quad (11.52)$$

其中$H(s)$为分路滤波器的电压转移比。使用二阶低通有源分路网络的这种型式的实验性实现，由格拉泽(Glaser)等人报导了[3]。实测影象分量大致比信号电平低 37 dB。这个参考

文献还提出一种影象分量电平化为两路的转移函数中的失谐量的分析法。为了对高阶分路网络减小分路失谐的影响。已建议把整个特性实现为两路滤波器的并联组合 [3、12] 或级联组合 [13]，在两路滤波器中，每个只包括一阶或二阶分路网络以及可能不同的调制频率。

这里所叙述的带通滤波器，在有限频率范围内（通过改变矩形波调制函数的频率）是可调的。假定入端和出端频带限制滤波器在 f_0 Hz 有锐截止，那么对窄通带大致 2：1 的调谐范围就可以在频带限制滤波器所提供的影象干扰抑制情况下得到（$f_0/2<1/T<f_0$）。如果通带很狭窄因而分路网络本身提供影象干扰抑制，那么就可以把调谐范围向上扩展到 3 比 1（$f_0/3<1/T<f_0$）。为了在固定频带限制滤波器情况下得到较大的调谐范围，可以把阶梯调制中的更多级用来使高阶傅里叶系数消失 [3]。另一方法是保持两个级值的调制但是增加每周期的跃迁数目，而且配置过渡瞬间的位置，使调制函数呈现出所需谐波含量，这已是最近的研究对象了。已作出了确定一集合适的过渡瞬间位置（在一单周期内）的一般方法，而且已报导了实现 10 比 1 调谐范围的具体结果[14]。

11.5 应用周期运行开关的实现

转换网络

脉冲调制(利用级 0 和级 1)的最简单实现，是由与分路网络的输入端和输出端串联连接的周期运行开关提供的。N 通路滤波器于是取一系列 N 个相同二端对网络的形式，包括输入端和输出端的 N 极转动式开关在内，如图 11-16 所示。开关转

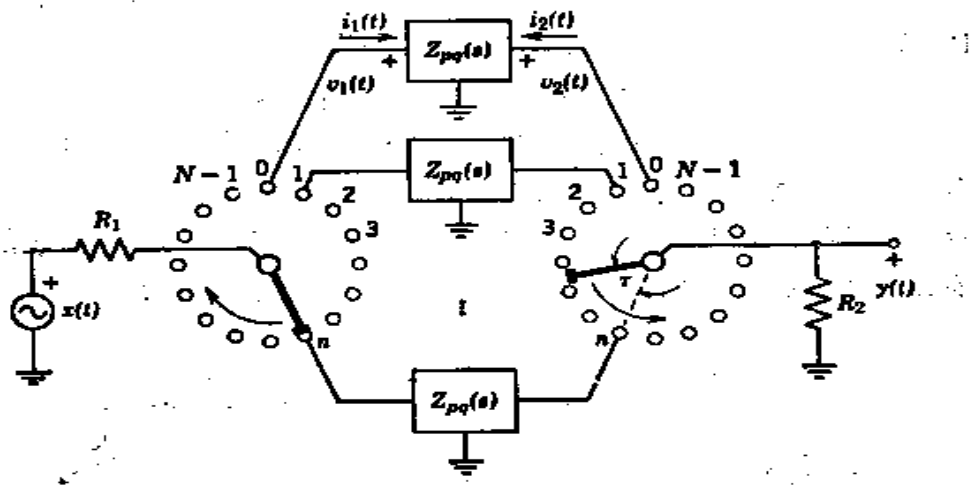


图 11-16 N 通路滤波器的转换型式的结构。$Z_{pq}(s)$函数为二端对分路网络的开路阻抗参数

子具有每秒 $1/T$ 转（rps）的恒定角速度。为此，把这种结构叫做转换网络。通常假定转子一次只连通一个分路。对高频应用来说，转动式开关当然总是由有电子控制的固态开关来实现的。除两路带通滤波器的早先几个型式外，利用每路的单电容器元件的N通路转换网络，就是N通路滤波器原理的第一个应用[15、16]。

如果在各路中都用有源元件以提供适当隔离，那么开关就对输入和输出信号提供脉冲调制，而且可以应用先前所讨论的转移函数分析而没有困难。可是，没有隔离元件就必须考虑到分路网络的策动点特性以及其转移特性，而且这种分析变得相当复杂。考虑图 11-16 中的一个单路。外部电路强加以下的状态制约。

$$R_1 i_1(t) = [x(t) - v_1(t)]p(t)$$
$$R_2 i_2(t) = -v_2(t)\cdot q(t) \qquad (11.53)$$

式中 $p(t)$和 $q(t)$分别为图11-17中所示矩形脉冲 $\gamma_1(t)$和 $\gamma_2(t)$的周期性再现。分路网络所加的额外端子制约，

$$v_1(t)=[z_{11}\otimes i_1](t)+[z_{12}\otimes i_2](t)$$
$$v_2(t)=[z_{21}\otimes i_1](t)+[z_{22}\otimes i_2](t) \qquad (11.54)$$

在(11.54)所示的卷积乘积中，$z_{pq}(t)$ 函数是开路策动点和转移电压响应(对外加在二端对的单位冲激电流)。这些函数的拉普拉斯变换就是常用的二端对网络的开路阻抗参数。

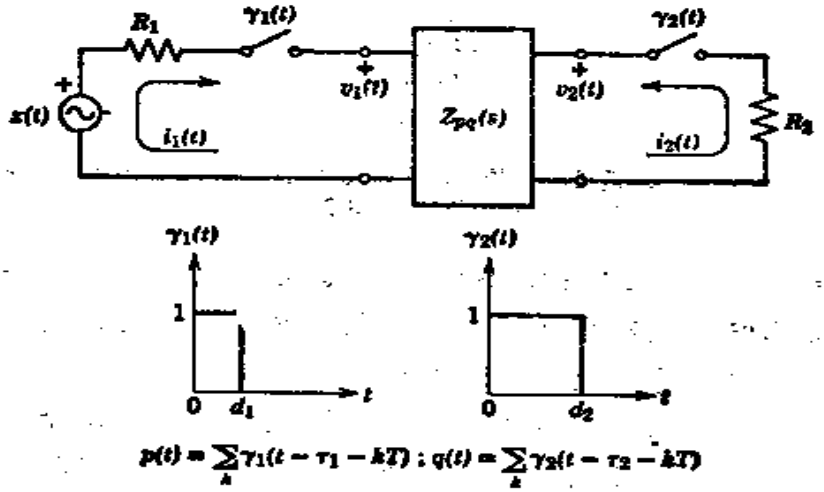


图 11-17 具有入端和出端采样开关的、二端对网络的响应分析的电路。函数 p (t) 和 q (t) 为表示开关闭合特征的周期性指示器函数

为了得到 R_2 中的输出电流和电源电压 $x(t)$之间的关系，我们需要(11.53)和(11.54)的联解。贝内特 (Bennett) [17]和其他人[18、19]已为包括周期运行开关的时变网络提出了分析方法。最近，这种方法已由于利用一种状态变量表示法而简化了。森(Sun)和弗里希 (Frisch)[20]应用了这种方法、特别是在N通路转换网络的分析方面。

窄脉冲近似

在特殊情况下，确实有导致转换网络的简化分析和设计的近似解法。这里将研究的情况是，入端和出端开关接触的停止时间 d_1 和 d_2 小于 T/N 时、形成的情况，因此输入和输出电流由一系列窄脉冲组成。导致(11.53)和(11.54)的一种简单解式的逼近法，是用矩形脉冲(其高度等于脉冲中点的电流值)来取代实际电流脉冲。当使 d_1 和 d_2 为较小时，逼近显然得到改进，而且计算结果通常是充分准确的，特别是在频率范围的较低部分。开关本质上要提供一种信号采样运行，而这类滤波器通常叫做采样数据滤波器。同样的分析方法已应用于谐振转移回路[21、22](并参看第 10 章)。

最后结果的导出虽然是直接了当的，但是有点冗长，这里将只介绍其所含步骤的概要。再参考图 11-17，我们写出

$$i_q(t)=\frac{1}{T}\gamma_q(t-\tau_q)\otimes j_q(t);q=1.2 \qquad (11.55)$$

式中

$$j_q(t)=i_q\left(t+\frac{1}{2}d_q+\tau_q\right)\left[T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right].$$

(11.55)的拉普拉斯变换为

$$I_q(s)=\frac{1}{T}\Gamma_q(s)\cdot e^{-s\tau_q}J_q(s) \qquad (11.56)$$

式中

$$J_q(s)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}I_q\left(s-j\frac{2\pi l}{T}\right)\cdot e^{[s-j(2\pi l/T)](d_q/2+\tau_q)}.$$

现在可以把方程(11.54)表示为

$$V_p(s)=\frac{1}{T}\sum_{q=1}^{2}Z'_{pq}(s)\cdot J_q(s)\cdot e^{-s\tau_q};\ p=1、2 \quad (11.57)$$

式中 $$Z'_{pq}(s)=\Gamma_q(s)\cdot Z_{pq}(s),$$

这些加撇号的开路阻抗参数，只不过表示单位矩形电流脉冲而不是电流冲激的二端对响应。下一步是取(11.53)的拉普拉斯变换，并以(11.57)代入。通过表明$J_q(s)$的周期性质，即$J_q[s-j(2\pi l/T)]=J_q(s)$，结果就相当地简化了。结果的一对联立方程包括了未知量$J_1(s)$和$J_2(s)$。消去$J_1(s)$就给出$J_2(s)$的方程，从而得到$I_2(s)$。

$$I_2(s)=$$

$$=\frac{-\frac{1}{d_1}\Gamma_2(s)\tilde{Z}_{21}(s)\sum_{l=-\infty}^{\infty}X\left(s-j\frac{2\pi l}{T}\right)e^{sd_1/2}e^{-j(2\pi l/T)(d_1/2+\tau_1)}}{\left[\frac{R_1T}{d_1}+\tilde{Z}_{11}(s)\right]\left[\frac{R_2T}{d_2}+\tilde{Z}_{22}(s)\right]-[\tilde{Z}_{12}(s)][\tilde{Z}_{21}(s)]} \quad (11.58)$$

其中还定义了另一集开路阻抗参数。

$$\tilde{Z}_{pq}(s)=\frac{e^{sd_p/2}}{d_p}\cdot\sum_{l=-\infty}^{\infty}Z'_{pq}\left(s-j\frac{2\pi l}{T}\right)\cdot e^{j(2\pi l/T)(\tau_q-\tau_p-d_p/2)}. \quad (11.59)$$

这些函数是与费蒂韦斯(Fettweis)[22]在谐振转移回路的分析中所使用的脉冲阻抗函数很相似的。对N通路滤波器的分析来说，第n路的特征是

$$\tau_1=\frac{nT}{N},\quad \tau_2=\frac{nT}{N}+\tau;n=0、1、2、\cdots、N-1 \quad (11.60)$$

因此参数τ表示相对于入端转换器的出端转换器中滞后的特征。要着重指出，$\tilde{Z}_{pq}(s)$参数将随τ而定，但它们与路数n无关。

在图 11-16 内 R_2 中的总电流成为不相重叠的脉冲流通，对每个 n 值都以(11.58)的表达形式给定。计算全部 n 的总数并只保留结果中的 $l=0$ 项可得到输出电压，这是因为如前所述我们将应用频带限制约束于 $x(t)$和 $y(t)$。最后结果是一个在频带 $|f|\leqslant N/2T$ 范围内由下式所给定的转移函数

$$W_0(s)=\frac{\left[\frac{Nd_2}{Td_1}\Gamma_2(s)e^{sd_1/2}\right][\tilde{Z}_{21}(s)]\left[\frac{R_2T}{d_2}\right]}{\left[\frac{R_1T}{d_1}+\tilde{Z}_{11}(s)\right]\left[\frac{R_2T}{d_2}+\tilde{Z}_{22}(s)\right]-[\tilde{Z}_{12}(s)][\tilde{Z}_{21}(s)]} \tag{11.61}$$

把转移函数有意表达成(11.61)中所示的特殊形式，是因为我们认识这种形式为所考虑到的包括电源和负载电阻在内的二端对网络的总电压转移比的形式。因而除(11.61)分子中的第一个因子外，这个电压转移比等效于一个其开路阻抗参数为 $\tilde{Z}_{pq}(s)$并运行在 R_1T/d_1 和 R_2T/d_2 的电源和负载电阻之间的非时变二端对网络的电压转移比。等效电路示于图 11-18 中。电阻乘法因数 T/d_1和 T/d_2 通常是很大的，而且这在微型电路制造中往往是一个优点[23]。由(11.59)，有趣的是：即使分路网络是互易的[$Z_{12}(s)=Z_{21}(s)$]，例如无源 RC网络的情况，由 $\tilde{Z}_{pq}(s)$所表征的等效网络将是非互易的，除非 $d_1=d_2$和 $\tau=0$。换句话说，图 11-18 中的等效电路只有当各路的入端开关和

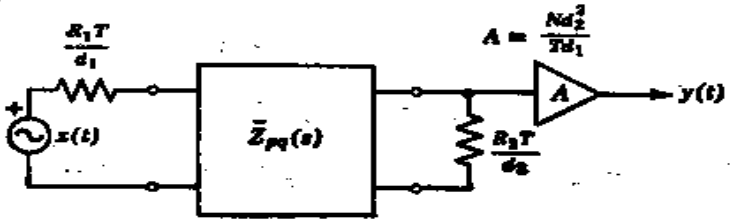


图 11-18　N通路转换网络的等效非时变电路

出端开关同时接触才是互易的。

因为停止时间 d_1 和 d_2 接近零，(11.61)的转移函数显示出指望的周期性增益频率特性。如果把分路网络的开路阻抗参数 $Z_{pq}(s)$ 表示成部分分式，那么可以用来达到(11.18)的基本上相同的方法来得到参数的简单闭合形表达式。这种表达式可以从一般关系直接得到：

$$\tilde{Z}(s)=\frac{e^{-st_0}}{T}\cdot\sum_{l=-\infty}^{\infty}Z\left(s-j\frac{2\pi l}{T}\right)e^{[s-j(2\pi l/T)]t_1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}z(kT+t_1)e^{-s(t_0+kT)}. \qquad (11.62)$$

利用 t_0 和 t_1 的恰当数值以及一相当于 $Z(s)$ 的部分分式展开中某一项的 $z(t)$，可以把所得到的几何级数加起来按闭合形式给出 $\tilde{Z}(s)$。

转换电容器组

11.4 节所叙述的梳形滤波器特性，可以利用由单个电容器组成的分路网络的并联或者串联按转换网络的形式实现[15、16、24]。在某种情况下，仅仅需要一个转动式开关。例如，利用各路中的并联电容器并使 $d_1=d_2=d$ 和 $\tau=0$，转换网络就可以由于有一个转动式开关和一个在转动式开关保持接触期间每 T/N 秒起动的单刀的出端开关而等效地实现。大略地把这示于图 11-19 中。此时，分路网络的参数为

$$Z_{pq}(s)=\frac{1}{Cs},\ p,q=1,2. \qquad (11.63)$$

利用(11.62)并使 d 接近零，则 $\tilde{Z}_{pq}(s)$ 参数成为

$$\tilde{Z}_{pq}(s)=\frac{T}{2C}\coth\frac{sT}{2},\ p、q=1、2. \qquad (11.64)$$

我们清楚地认识到（11.64）中的表达式为理想延迟线的策动点阻抗，延迟线具有相当于$T/2$的延迟长度、$R_0=T/2C$的特性阻抗和终端开路。因而对于小d来说，图11-19中结构的等效电路，只不过是延迟线和适当电源和负载电阻的并联，以及增益换算因数，如图11-20所示。利用比例常数A，则电压

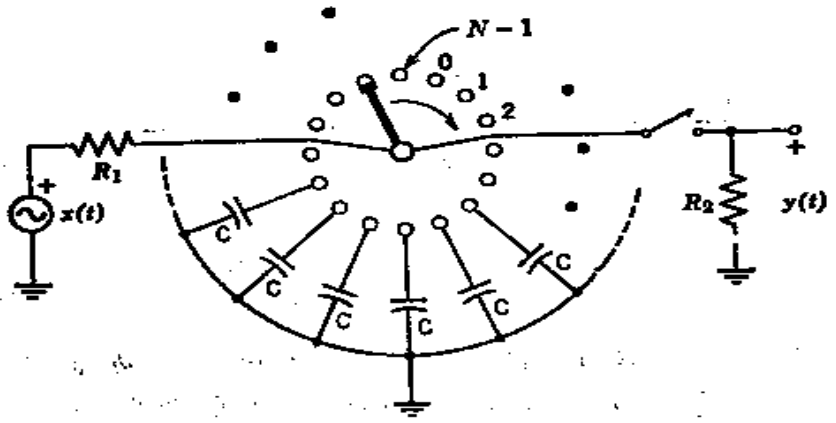


图 11-19　转换电容器组梳形滤波器。出端开关以转动式开关的N倍旋转率的速度运行

转移函数具有形式

$$A\cdot\frac{1+e^{-sT}}{1-e^{-(s+\alpha)T}}$$

其中

$$e^{-\alpha T}=\frac{1-\dfrac{(R_1+R_2)d}{2R_1R_2C}}{1+\dfrac{(R_1+R_2)d}{2R_1R_2C}}. \tag{11.65}$$

这种特性是和对应的I型梳形滤波器的（11.45）的特性很相似的，除传输零值发生在增益频率特性中的$\frac{1}{2}T$的奇数倍外。在α小的时候，齿带宽大致给定为

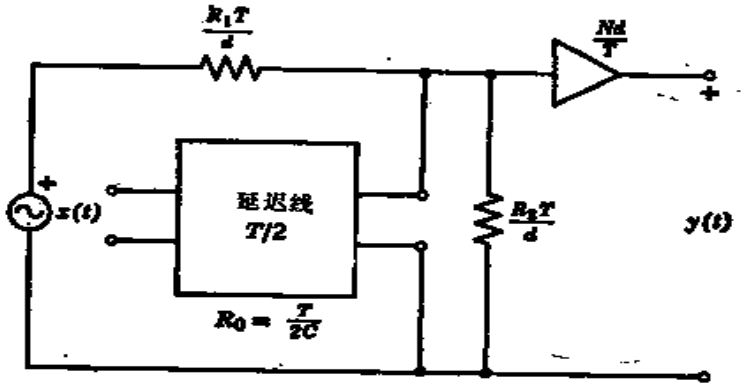


图 11-20　利用终端开路延迟线的梳形滤波器的等效电路。R_0为延迟线的特性阻抗

$$f_d\cong\frac{\alpha}{\pi}\cong\frac{d}{\pi T}\cdot\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}. \tag{11.66}$$

用并联电阻所表示的电容器损耗的影响可很容易地结合一起[1](参看习题 11.7)。这种电路用固态开关(通常用$N=4$)来获得单通带带通滤波器的实现，也已叙述过了[25、27]。在这类情况下，是利用宽带通型的频带限制滤波器来把$f=0$的通带消除掉。

11.4 节所叙述的梳形陷波滤波器，可以用串联电容器分路网络按转换网络形式来实现。此时，只需要一个转动式开关如图 11-21 所示。这又相当于$d_1=d_2=d$和$r=0$的情况。对分析来说，我们使分路网络包括一并联电阻r，使开路阻抗参数是有限的。在最后表达式中，我们可使$r\to\infty$。

以
$$Z_{11}(s)=r+\frac{1}{sC}$$

$$Z_{12}(s)=Z_{21}(s)=Z_{22}(s)=r, \tag{11.67}$$

并使d接近零，我们得到

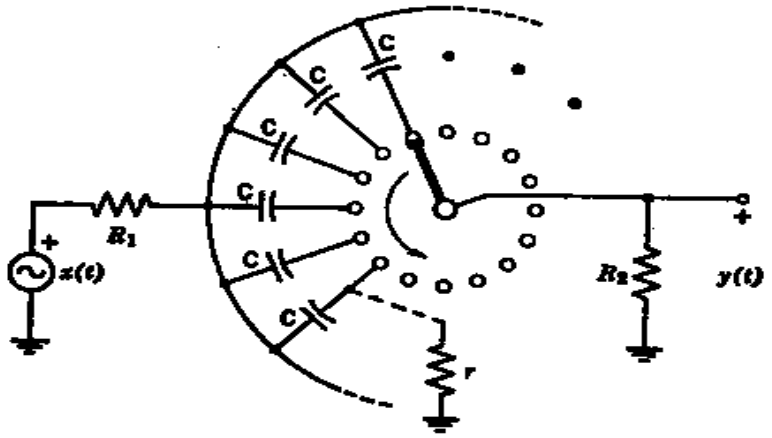


图 11-21 转换电容器组梳形陷波滤波器

$$\tilde{Z}_{11}(s)=\frac{rT}{d}+\frac{T}{2C}\coth\frac{sT}{2}$$

$$\tilde{Z}_{12}(s)=\tilde{Z}_{21}(s)=\tilde{Z}_{22}(s)=\frac{rT}{d} \tag{11.68}$$

因此(11.61)的电压转移函数成为

$$W_0(s)=\frac{\left[\frac{Nd}{T}\right]\left[\frac{rT}{d}\right]\left[\frac{R_2T}{d}\right]}{\left[\frac{R_1T}{d}+\frac{rT}{d}+\frac{T}{2C}\coth\frac{sT}{2}\right]\left[\frac{R_2T}{d}+\frac{rT}{d}\right]-\left[\frac{rT}{d}\right]^2} \tag{11.69}$$

现在使(11.69)中的 $r\to\infty$，我们得到

$$W_0(s)=\frac{\left[\frac{Nd}{T}\right]\left[\frac{R_2T}{d}\right]}{\frac{R_1T}{d}+\frac{T}{2C}\coth\frac{sT}{2}+\frac{R_2T}{d}}. \tag{11.70}$$

把(11.70)解释为梯形网络的电压转移比，我们看出图 11-22 所示的等效电路包括串接的开路延迟线，还可以把电压转移函数表示为

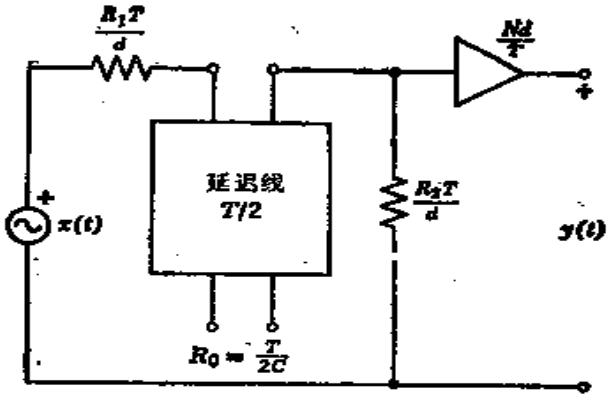


图 11-22　利用终端开路延迟线的梳形陷波滤波器的等效电路

$$W_0(s)=A\cdot\frac{1-e^{-sT}}{1-e^{-(s+\alpha)T}}$$

其中

$$e^{-\alpha T}=\frac{R_1+R_2-\dfrac{d}{2C}}{R_1+R_2+\dfrac{d}{2C}}. \tag{11.71}$$

对于小 α 来说，这就是在 $1/T$ 的倍数处具有窄槽口的所需梳形陷波特性。槽口宽度大致为

$$f_d\cong\frac{\alpha}{\pi}\cong\frac{d}{\pi T}\cdot\frac{1}{(R_1+R_2)C}. \tag{11.72}$$

由于单转换器结构，陷波特性不严格取决于输入和输出调制的定相，这是不像 11.4 节所叙述的 II 型梳形滤波器那样的。

11.6　摘　　要

概括 N 通路滤波器的响应特性的最简单方法是指出，系统的冲激响应、给定为一在频带 $|f|\leqslant N/2T$ 范围内有效

的

$$w_0(t)=c(t)\cdot h(t)$$

的有限带宽型式。因数 $c(t)$ 为时间的周期函数，具有由于周期性输入和输出调制函数所完全决定的周期 T。第二个因数 $h(t)$ 为必须能够在 N 通路当中的每路都准确复现的一个非时变网络的冲激响应。如果分路网络为一有限阶系统，那么就有一（包含 $H(s)$ 的部分分式展开的）转移函数 $W_0(s)$ 和函数 $D(s)$（$D(s)$是 $c(t)$ 函数的一个周期的拉普拉斯变换）的简单闭合形表达式。这个表达式对决定零、极点图和总转移函数的留数是特别有用的。

由于 $c(t)$ 的周期性，转移函数 $W_0(s)$ 由一系列中心在 $c(t)$ 中谐波频率处的 $H(s)$ 的频率位移项组成。这种特点对要求高质量电感器或延迟线的滤波特性的实现提供有吸引力的抉择。N通路滤波器实现的必然优点是：在微型电路结构中实现的适用性，还有滤波器响应的精密电子可调的可能性。后面这个特点，是由改变调制波形的参数而不是由改变电路元件值来得到。

N通路滤波器的近来研究已集中在关于单通带带通滤波器实现的可能性上。人们希望进一步的研究会更向着唯一有可能利用N通路结构来提供多通带滤波。对一些信号处理应用来说，在信号参数的最佳估计要求周期地时变滤波工作的地方，大概就可以有效地使用N通路结构。已经注意到N通路结构的稍微广义型式可作为一种典型结构来表示任何有限阶周期变化的线性系统[28]。周期变化处理以同时提供带通滤波和频率平移的某些特殊应用，已经广泛地探讨过了[29、30]。这些应用包括具有不同周期的输入和输出调制函数的N通路结构，特别在产生频分复用系统中的单边带调幅信号方面。

值得进一步研究的另外领域是连同N通路结构一起的数字滤波技术的利用。格拉泽(Glaser)[31]已考虑一种结构，在那里分路滤波工作完全由运行在时分复用型式中的单个数字滤波器提供的。这种方法的显著优点是：通过单个数字滤波器的应用，可以避免所存在的不同分路网络响应的问题。

习　题

11.1　试导出类似于图 11.3 所示的等效结构，这种结构包含有非时变网络跟着是单频调制器的诸分路的并联组合。

11.2　试确定在时间间隔 $0 \leqslant t < T$ 内、包含最少跃变数的一对阶梯调制函数 $p(t)$和 $q(t)$，当 $l=0,2,3,4,5,6$ 时，它们将使$|P_{-l}Q_l|=1$和$P_{-l}Q_l=0$。

11.3　在获得(11.18)关于 $W_0(s)$的闭合形表达式过程中，假定 $H(s)$ 包括形式

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

的一项。试证明在 $W_0(s)$中的对应项给定为

$$\frac{TD(s+\alpha)e^{-(s+\alpha)T}}{[1-e^{-(s+\alpha)T}]^2}-\frac{D'(s+\alpha)}{1-e^{-(s+\alpha)T}}$$

其中 $D'(s)$表示 $D(s)$对 s 的导数。

(提示：利用关系

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\beta^k=\frac{\beta}{(1-\beta)^2}\text{当}|\beta|<1\text{时。})$$

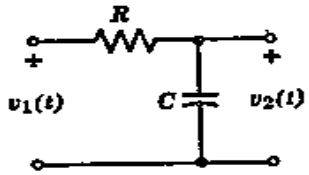
11.4　试提供在(11.35)的求导运算中未列出的步骤。

11.5　试求一对简单调制函数 $p(t)$和 $q(t)$，它们会提供一种仅仅在 $1/T$ 的奇数倍才有齿的梳形滤波特性。

11.6　对(11.48)中所给定的转移函数 $W_0(s)$，试作图表示传输零点在 s 平面内的轨迹、当 τ 在$|\tau| \leqslant T/2$ 范围内变化时。

11.7 在图 11-19 所示的转换电容器梳形滤波器中，假定电容器损耗由与各电容器并联的电阻 R 来表示。试表明图 11-20 中的等效延迟线电路要改用终端接有适当电阻的延迟线。

11.8 在图 11-16 所示的 N 通路转换网络中，假定二端对分路网络为单节 RC 低通滤波器，如下所示。



设 $d_1=d_2=d\to 0$，并使出端转换器滞后入端转换器达 $\tau=T/2$。试导出对应的 $\tilde{Z}_{p,q}(s)$ 参数、转移函数 $W_0(s)$，并提供一个具有同样电压转移比的延迟线等效网络。

[1]11.9 试证明(11.11)中 $c(t)$ 的积分表达式，使我们得到一具有由 NP_{-i} Q_i 给定的傅里叶系数的周期函数。

[1]11.10 想要实现一种滤波器，除任意延迟因数之外，其转移函数都与

$$\cos 6\pi x+\cos 2\pi x+j(\sin 6\pi x+\sin 2\pi x)/\cos 6\pi x-1.5\cos 4\pi x$$
$$+\cos 2\pi x-0.25+j(\sin 6\pi x-1.5\sin 4\pi x+\sin 2\pi x)$$

成比例，其中 $x=f/f_0$。利用会紧密匹试设计一个脉冲调制的 N 通路滤波器，它能精确符合这种特性达 $10f_0$ 的频率以上，并为分路网络规定全部调制参数和转移函数 $H(s)$。

参 考 文 献

[1] L. E. Franks and I. W. Sandberg, "An alternative approach to the realization of network transfer functions: the N-path filter," Bell System Tech. J., 39, No. 5,1321-1359 (Sept., 1960).

[2] V. Cizek, "Analysis of a filter with N channels," *Proceedings of the Third Colloquim on Microwave Communication, Budapest* (April, 1966).

[3] A. B. Glaser, C. C. Halkias, and H. E. Meadows, "A tuneable, bandwidthadjustable solid-state filter," *J. Franklin Inst.*, 288, No. 2, 83-93 (Aug., 1969).

[4] Y. Sun, "Network functions of quadrature N-path filters," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-17, No. 4,594-600 (Nov., 1970).

[5] N. F. Barber, "Narrow band-pass filter using modulation," *Wireless*

Engineer, **24**, No. 5,132-134 (May, 1947).
[6] G. B. Madella, "Single-phase and polyphase filtering devices using modulation," *Wireless Engineer*, **24**, No. 10,310-311 (Oct., 1947).
[7] I. F. Mac Diarmid and D. G. Tucker, "Polyphase modulation as a solution of certain filtration problems in telecommunication," *Proc. IEE*, Pt. III, 97, 349-358 (Sept., 1950).
[8] H. B. Paris, Jr. "Utilization of the quadrature functions as a unique approach to electronic filter design," *IRE Intern. Conv. Record*, Pt. 9,204-216 (1960).
[9] G. Rigby, "An integrated selective amplifier using frequency translation.," *IEEE-Journal on Solid-State Circuits*, **SS-1**, 39-44 (Sept., 1966).
[10] B. Gold and C. M. Rader, *Digital Processing of Signals*, Mc Graw-Hill, New York, 1969.
[11] H. Urkowitz, "Analysis and synthesis of delay line periodic filters," *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-4**, No. 2,41-53 (June, 1957).
[12] W. Saraga, "Realizability conditions and associated invariance relations for N-path networks with sinusoidal carrier oscillations," 1969 *IEEE International Symposium on Circuit Theory*, (Dec., 1969).
[13] G. Szentirmai,"Active switched bandpass filters," 1969 *IEEE International Symposium on Circuit Theory*, San Francisco, Calif. (Dec., 1969).
[14] L. E. Franks and L. D. Dann, "Implementation of N-path filters using polarity-reversal modulation," 1970 *Canadian Symposium on Communications*, Montreal, *Canada* (*Nov.*, 1970).
[15] W. R. Lepage, C. R. Cahn, and J. S. Brown, "Analysis of a comb filter using synchronously commutated capacitors," *AIEE Trans. Comm.* and Elect., 72, 63-68 (March, 1953).
[16] B. D. Smith, "Analysis of commutated networks," *IRE Trans. Aeronautical* Electronics, **AE-10**, 21-26 (Dec., 1953).
[17] W. R. Bennett, "Steady-state transmission through networks containing periodically-operated switches," *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-2**, No. 1, 17-21 (March, 1955).
[18] C. A. Desoer, "Transmission through a network containing periodically operated switches," *Wescon Convention Record*, Pt. 2,34-41 (1958).
[19] A. Fettweis, "Steady-state analysis of circuits containing a periodically operated switch," *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-6**, No. 3, 252-260 (Sept., 1959).
[20] Y. Sun and I. T. Frisch, "A general theory of commutated net-

works," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-16, No. 4,502-508 (Nov., 1969).

[21] C. A. Desoer, "A network containing a periodically operated switch solved by successive approximations," *Bell System Tech J.*, 36, 1403 (Nov.,1957).

[22] A. Fettweis, "Theory of resonant-transfer circuits," *Network and Switching Theory*, G. Biorci, Ed., Academic Press, New York, 1968.

[23] Y. Sun and I. T. Frisch, "Resistance multiplication in integrated circuits by means of switching," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-15, 184-192 (Sept., 1968).

[24] R. Fischl, "Analysis of a commutated network," *IEEE Trans. Aerospace and Navigutional Electronics*, ANE-10, 114-123 (June, 1963).

[25] L. E. Franks and F. J. Witt, "Solid-state sampled-data bandpass filters," *Proceedings* 1960 *Solid State Circuits Conference*, Philadelphia, Pa.

[26] J. Thompson, "RC digital filters for micro-circuit bandpass amplifiers," *Electronic Equipment Engineering*, 12, 44-49 (March, 1964).

[27] W. R. Harden, "Digital filters with *IC's* boost *Q* without inductors," *Electronics* (July, 1967).

[28] H. E. Meadows, L. M. Silverman, and L. E. Franks, "A canonical network for periodically variable linear systems," *Fourth Allerton Conference on Circuit and System Theory*, 647-657 (1966).

[29] D. K. Weaver, "A third method of generation and detection of single-sideband signals," *Proc. IRE*, 44, 1703-1705 (Dec., 1956).

[30] S. Darlington, "Some circuits for single-sideband modulation," *Proceedings Third princeton Conference on Information Sciences and Systems* (1969).

[31] A. B. Glaser, "Digital time-division multiplexed *N*-path system," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-17, No. 4,600-604 (Nov., 1970).

12 数字滤波器

罗杰 M. 戈尔登(Roger M. Golden)
技术服务公司
圣莫尼卡(Santa Monica),加利福尼亚州

前几章中所提出的理论、设计和综合方法，其目的是要使用模拟电路元件来导致滤波器的最后实现。最熟悉的这类元器件为：电阻器、电容器、电感器以及一些特殊器件如运算放大器、压电元器件和机械换能器等。在复杂的设计程序中，常常利用数字计算机来迅速而准确地实行设计步骤（及其中必要的迭代）。不过，数字计算机本身可以用来作数字化连续波形的滤波。在许多应用上，为了实行这样的滤波工作，专用数字硬件可能会更经济些。这意味着：由象用在数字计算机构造中的加法器、乘法器、移位寄存器、存储器件等等那样的一些标准部件来构成信号波滤波器是可能的。

本章目的在于说明怎样把迄今已提出的设计方法容易地用于数字滤波器的设计和综合中去。

这里所考虑的数字滤波器设计，将涉及能逼近连续滤波器的频率特性或时间特性的数字处理结构的实现问题。只要确定了设计参数，便可以由软件（即数字计算机算法或程序）来实现滤波器，或者可以把滤波器实现成硬件形式。实现数字滤波

器的方法取决于与其结合的系统。通常有两种截然不同的实现方法：频域加权和时域加权。第一种方法可用在进行时间波形频谱分析的系统例如离散（快速）傅里叶变换信息处理机中。对于这类系统，滤波器函数可能由复权重存储表组成。这些权重表示滤波器的复频响应，而这些响应是在频谱分析仪产生对应值的那些频率计算的。这些权重可以由连续或数字滤波器转移函数来确定。

第二种实现方法是用于处理表示时间波形采样型式的数字序列。滤波器产生一个输出序列，它是通过滤波器的数字转移函数与输入序列相联系。输出序列是由输入序列和滤波器的系统函数序列的卷积得来的。

在所考虑的设计方法中，假定输入采样值序列在时间上是均匀分隔的。换句话说，输入序列是同步采样的（例如，对连续信号每隔 100 微秒均匀采样所得出的序列）。采样过程和 Z 变换的数学方法，连同所引出的一些结论，都在以下几节中讨论。

12.1 采样过程和 z 变换

论及采样数据理论的课本所取的通常方法[1]是应用冲激或 Δ 函数调制来引入连续信号采样的概念。因而由一冲激振幅调制器 $m(t)$ 调制连续信号 $g(t)$ 所得出的输出信号 $0(t)$，就是

$$0(t)=m(t)\cdot g(t). \tag{12.1}$$

数学上，把冲激调制函数表示为

$$m(t)=T\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \tag{12.2}$$

式中T表示单位采样时间间隔。

把T因子引入在总和之前，这样就使得样值点之间的积分信号将大致等于整个时间间隔T内的积分连续信号，因而保存了信号中的功率。其次考虑在以下论述中有用的$m(t)$的性质。

采样过程

用$m(t)$来调制连续函数将得出该连续函数在采样时间间隔nT的诸样值。这个结果是由于$x\neq 0$时$\delta(x)=0$这一事实得出的。因而

$$m(t)\cdot g(t)=T\sum_{n=0}^{\infty} g(t)\cdot\delta(t-nT)=T\sum_{n=0}^{\infty} g(nT)\cdot\delta(t-nT)=g^*(t), \tag{12.3}$$

*表示$g(t)$为采样函数。

$m(t)$的拉普拉斯变换

(12.2)的拉普拉斯变换是

$$\mathscr{L}[m(t)]=M(s)=T\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-snT)$$

$$=T\sum_{n=0}^{\infty}[\exp(-sT)]^n. \tag{12.4}$$

方程(12.4)可按闭合形式写成

$$M(s)=\frac{T}{1-\exp(-sT)}. \tag{12.5}$$

变量$\exp(-sT)$可看成为单位采样时间间隔延迟。这个函数定义一新变量z为

$$z\equiv\exp(sT).$$

利用以上性质，即可进行标准 z 变换的讨论。

把连续滤波器转移函数数字化

连续滤波器转移函数的数字化是用 $m(t)$ 对滤波器的冲激响应采样来达到的。因而利用（12.3）采样冲激响应为

$$h^*(t)=h(t)\cdot m(t)=T\sum_{n=0}^{\infty}h(nT)\cdot\delta(t-nT). \quad (12.6)$$

可以把这个过程看作是如图 12-1 所画出的那样把一组同步采

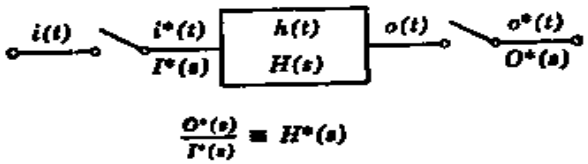


图 12-1 连续滤波器转移函数的数字化

样开关置于连续滤波器的输入和输出端而成。因此，标准 z 变换[2]可由求出 $h^*(t)$ 的拉普拉斯变换来获得，那就是

$$\mathscr{L}[h^*(t)]=H^*(s)=T\sum_{n=0}^{\infty}h(nT)\cdot\exp(-snT) \quad (12.7\,a)$$

或

$$H(z^{-1})=T\sum_{n=0}^{\infty}h(nT)\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n z^{-n} \quad (12.7\,b)$$

其中

$$A_n=T\cdot h(nT).$$

由（12.7 b)所定义的数字滤波器表示一无限长的抽头延迟线，其抽头权重等于冲激响应的采样值。对连续滤波器的实际实现来说，可以把 $h(t)$ 假定为具有有限持续时间，因此仅有有限个抽头数 比方说 $N+1$。因而（12.7 b）变成

$$H(z^{-1})=\sum_{n=0}^{N}A_n z^{-n} \tag{12.8}$$

因此可实现成如图 12-2 所示。

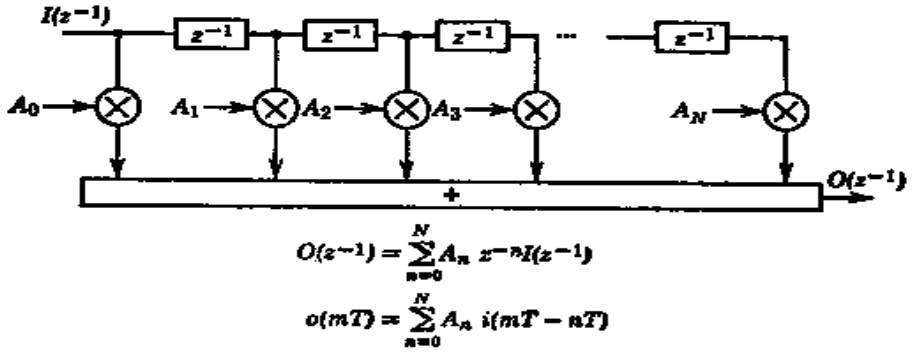


图 12-2 抽头延迟线数字滤波器(对连续滤波器逼近)的方框图

图 12-3 形象地表明连续滤波器的冲激响应和数字滤波器的冲激响应之间的关系。因为连续响应的采样值与数字滤波器的冲激响应值相同，故这种变换方式被说成是冲激不变的。

采样信号值按采样率经由滤波器或延迟线传播。在每一采样或时钟脉冲时间，把在以前的时钟脉冲时间所存储在延迟中

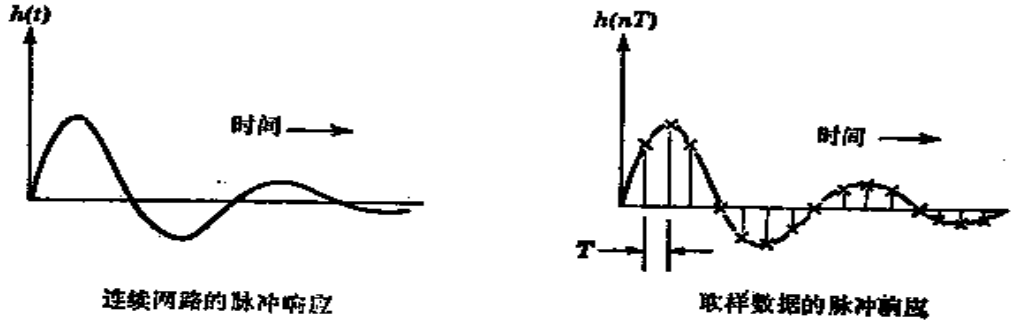


图 12-3 连续滤波器冲激响应和数字滤波器冲激响应的比较

的样值乘适当的系数加权，而且加在一起以产生输出样值。输入和输出之间的转移函数关系是

$$O(z^{-1})=\sum_{n=0}^{N}A_n z^{-n}\cdot I(z^{-1}). \tag{12.9}$$

依据实际输入和输出的样值，我们可以把第m个采样时间间隔处的输出写出为

$$O(mT)=\sum_{n=0}^{N}A_n\cdot i(mT-nT), \tag{12.10}$$

这就是联系输入和输出的差分方程。z变换往往被用来把具有常系数的线性差分方程改变为代数方程。因而，z变换对差分方程实行的运算，与拉普拉斯变换对微分方程所作的相似。

通常把这种型式的滤波器叫做横向或非递归的结构。横向是由于其对输入信号的横向性质；非递归则因为输出与过去输出值没有递推关系，而是只与输入的前N个值有关。而且，这种实现方式显示出输入的有限存储。显示输入无限存储的有限递归数字滤波器，也可以由（12.6）式推出。这种方式表示了对方程中所给出的无限求和的闭合形表达式。

闭合形式或递归实现

导出图 12-2 中所示非递归数字滤波器所遵循的方法是求出（12.6）式的拉普拉斯变换。同样的这种方法也可导出闭合形式或递归结构，这时不是把$h(t)$和$m(t)$合併，而是取两个时间函数乘积的拉普拉斯变换。因而，对（12.6）式的拉普拉斯变换得出复卷积

$$\mathscr{L}[h^*(t)]=H^*(s)=\mathscr{L}[h(t)\cdot m(t)]$$
$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty}H(s-\omega)\cdot M(\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{c_2-j\infty}^{c_2+j\infty}H(\omega)\cdot M(s-\omega)d\omega. \quad (12.11)$$

把（12.5）代入上式得到

$$H^*(s)=\frac{T}{2\pi j}\int_{c_2-j\infty}^{c_2+j\infty}\frac{H(s-\omega)d\omega}{1-\exp(-sT)}$$

$$=\frac{T}{2\pi j}\int_{c_2-j\infty}^{c_2+j\infty}\frac{H(\omega)d\omega}{1-\exp(-sT+\omega T)}. \quad (12.12)$$

(12.12) 中的积分表示复平面内的线积分。积分的计算由向左或向右闭合围线的围线积分法来求得。如果把滤波器转移函数 $H(\omega)$ 按部分分式展开为

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{NP}\frac{R_n}{\omega+\alpha_n}, \quad (12.13)$$

积分是容计的，其中

$\mathscr{R}_n=H(-\alpha_n)$ 的留数。

把（12.13）代入（12.12），并把围线向左边闭合，从而包围了 $H(\omega)$ 的 NP 个极点，得到

$$H^*(s)=T\sum_{n=1}^{NP}\frac{\mathscr{R}_n}{1-\exp(-\alpha_nT)\exp(-sT)} \quad (12.14\,a)$$

或以 z^{-1} 代 $\exp(-sT)$，

$$H(z^{-1})=T\sum_{n=1}^{NP}\frac{\mathscr{R}_n}{1-z^{-1}\exp(-\alpha_nT)}. \quad (12.14\,b)$$

式（12.14 b）在连续域或 s 平面内的和离散（采样数据）域或 z 平面内的一阶滤波器转移函数之间，建立起一种 z 变换关系，一次项的变换对为

$$\frac{\mathscr{R}_r}{s+\alpha}\Longleftrightarrow\frac{A_0}{B_1z^{-1}+1}$$

式中 $A_0=\mathscr{R}_rT$

$$B_1=-\exp(-\alpha T).$$

除了还要把由复共轭对得出的共轭项结合来组成二次函数外，复共轭根也是按同样方式进行处理。因而，s 平面内极点的复共轭对按照下列关系变换

$$\frac{\mathscr{R}_r+j\mathscr{R}_i}{s+\alpha-j\beta}+\frac{\mathscr{R}_r-j\mathscr{R}_i}{s+\alpha+j\beta}\Longleftrightarrow\frac{A_1z^{-1}+A_0}{B_2z^{-2}+B_1z^{-1}+1},$$

式中 $A_1=-2T\exp(-\alpha T)\cdot[\mathscr{R}_r\cos(\beta T)+\mathscr{R}_i\sin(\beta T)]$,

$A_0=2T\mathscr{R}_r$,

$B_2=\exp(-2\alpha T)$,

$B_1=-2\exp(-\alpha T)\cdot\cos(\beta T)$.

因此，如果把原函数首先表示为部分分式展开，通过 z 变换就可易于把高阶连续滤波器函数数字化。然后把展开式中的各项按照它们是形成一次项还是二次项来数字化。于是，全部数字滤波器函数由一次项和二次项所组成，其中每一项的输出和该输出的过去样值之间显示出一种递归关系。求出以上一阶或者二阶转移函数的逆 z 变换，这种递归关系就容易证明了。由这个函数，输入和输出间的关系为

$$(1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2})\cdot O(z^{-1})=(A_0+A_1z^{-1})\cdot I(z^{-1}). \quad (12.15)$$

取逆 z 变换，得到

$$O(mT)+B_1\cdot O[(m-1)T]+B_2\cdot O[(m-2)T]$$
$$=A_0\cdot i(mT)+A_1\cdot i[(m-1)T]. \quad (12.16)$$

因此，对于表示式为 z^{-1} 的 NA 阶多项式对 z^{-1} 的 NB 阶多项式之比的数字滤波器转移函数，其一般递推关系为

$$O(mT)=\sum_{n=0}^{NA}A_n\cdot i[(m-n)T]-\sum_{n=1}^{NB}B_n\cdot O[(m-n)T]. \quad (12.17)$$

式(12.17)是关于数字滤波器用输入、以及输入和输出的过去

样值来表示其输出样值的一般表示式。当B系数全部为零时，式(12.17)就退化成(12.10)。一次和二次项的实现，将在下面讨论。

数字滤波器标准部件

数字滤波器转移函数中的一次和二次项的一般表达式，分别为

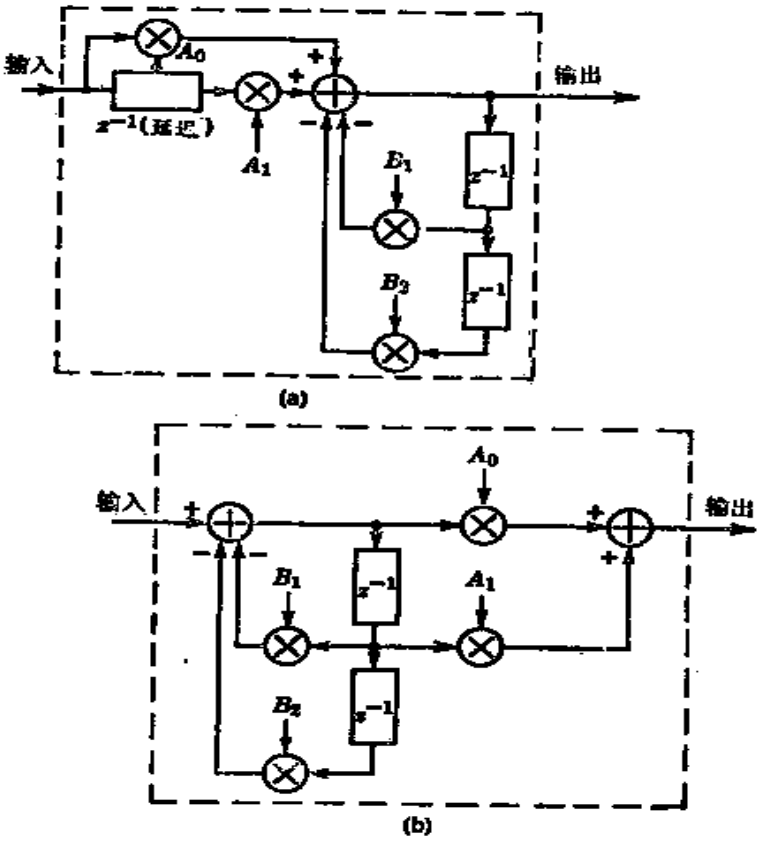


图 12-4 $(A_0+A_1z^{-1})/(1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2})$ 数字转移函数的实现方框图

$$\frac{A_0}{1+B_1z^{-1}} \quad \text{和} \quad \frac{A_0+A_1z^{-1}}{1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}}.$$

二次函数的两种可能实现[3]表示于图 12.4 中。把包含 A_1 和 B_2 的信号路径省略就可实现一次函数。把适当数目的一次和二次函数按并联结合如图 12-5 所示，即得出所需数字滤波器转移函数，也就是所需的综合实现。

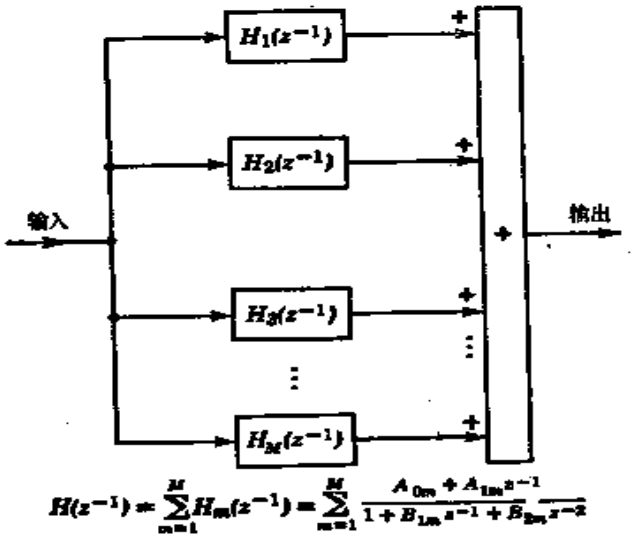


图 12-5　并联型递归数字滤波器的实现

例 12.1　用一简单例子来说明怎样应用 z 变换。考虑如图 12-6(a)所示的简单 RC 滤波器函数。这个滤波器的转移函数为

$$\frac{0(s)}{I(s)}=H(s)=\frac{1/CS}{1/CS+R}=\frac{1}{1+RCs}. \qquad (12.18)$$

这个函数的 z 变换为

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{1+RCs}\right]=H(z^{-1})=\mathscr{L}\left[\frac{1/RC}{1/RC+s}\right]$$

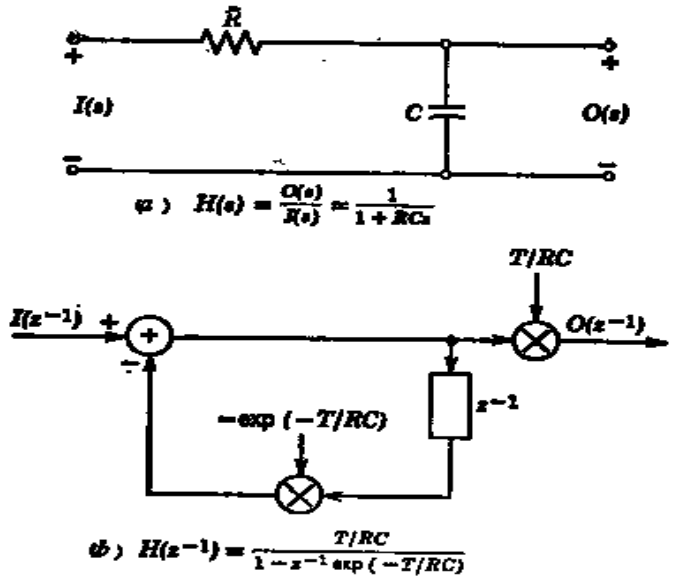


图 12-6 RC 低通滤波器

$$=\frac{T/RC}{1-z^{-1}\cdot\exp(-T/RC)}. \tag{12.19}$$

因而，常数为

$$A=T/RC$$

$$B=-\exp(-T/RC),$$

它实现为图 12-6(b)所示的一阶递归节的结构。为了要把这个函数的频带尽量限制在 $T/2$，$1/RC$ 必须小于 π/T，因此

$$\frac{1}{RC}\ll\frac{\pi}{T}\quad\text{或}\quad\frac{T}{RC}\ll\pi.$$

实际上，如果当 $\omega\geqslant\pi/T$ 时，$|H(j\omega)|\leqslant 0.01$，则可认为滤波器频带的限制是足够的，因而可以采用标准 z 变换的设计。三种分别对应于 1、10 及 100 Hz 截止频率 $(1/2\pi RC)$ 的 z 变换 RC 滤波器幅值响应的比较示于图 12.7(a)、(b)、(c)中。所用的采样频率为 2 kHz。这三种滤波器的系数分别为：

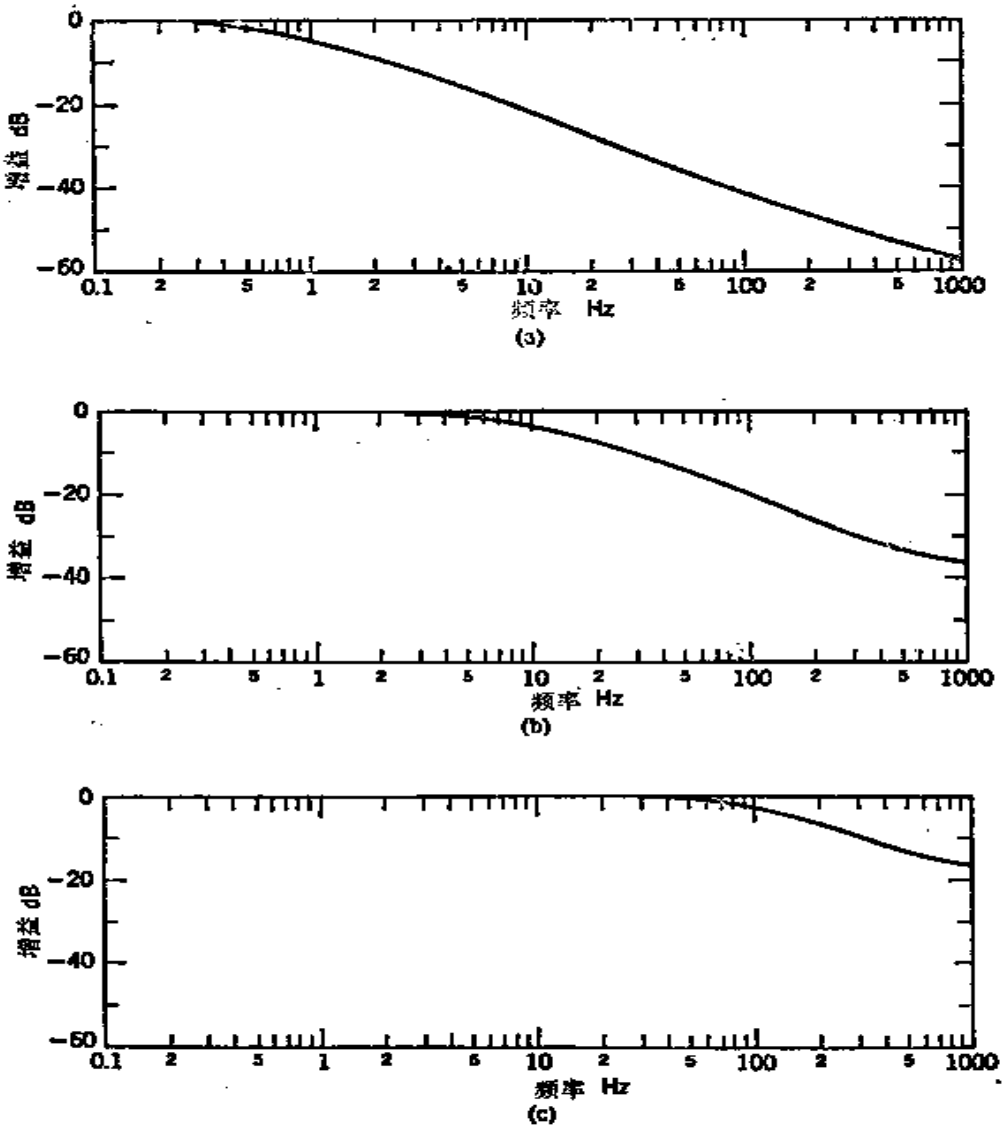


图 12-7　为 2 kHz 的采样频率和(a) 1 Hz、(b) 10 Hz 及 (c) 100 Hz 的截止频率而设计的三种数字 RC 滤波器的幅值频率响应

1 Hz　　10 Hz　　100 Hz

$A_0=3.1367\times10^{-3}$　$A_0=3.09283\times10^{-2}$　$A_0=2.69597\times10^{-1}$

$B_1=-0.99686$　$B_1=-0.96907$　$B_1=-0.73040$.

数字滤波器不存在入端阻抗水平和元件容差的问题。然而，滤波器系数实现的准确度和数字系统（滤波器是其中部件）中用来实行算术运算的位数，则是重要的[4、5]。系数量化对数字滤波器响应的影响，在 12.4 节中讨论。

必须看到：通过把标准 z 变换应用于连续滤波器转移函数所得出的数字滤波器，导致对连续滤波器的数字逼近。虽然时间响应基本上是一样的(由于变换的冲激不变性)，但频率响应将不同。这可以通过考察由 z 变换所引起的复平面映射、或者以向右而不是向左闭合的围线作 (12.12) 的计算来加以说明。s 平面与 z^{-1} 平面间的映射关系、通过考察 $j\omega$ 轴由 s 平面映射至 z^{-1} 平面来获得。因而，以 $z^{-1}=\exp(-sT)$，虚轴正好是 $\exp(-j\omega T)$，即 z^{-1} 平面中的单位圆。这个关系表示于图 2-8。因此，数字滤波器的频率响应是周期性的，具有等于 $2\pi/T$ 的周期。这也可从 (12.12)得到。围绕着 $1/[1-\exp$

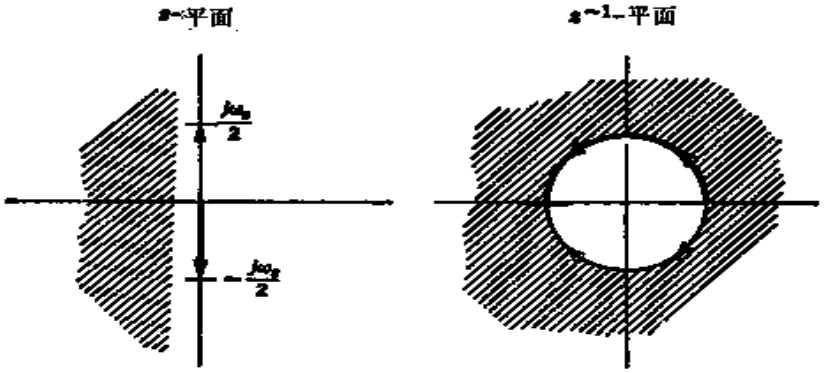


图 12-8　由连续 s 平面和离散 z^{-1} 平面之间的标准 z 变换所引起的映射关系

$(-sT+\omega T)$]的极点，把围线闭合到右边。这些极点位于

$$\exp(\pm j\,2\pi n)=\exp(-sT+\omega T) \quad 或$$

$$\omega_n=s\pm j\frac{2\pi n}{T} \qquad 当\ n=0、1、\cdots\cdots。$$

因此，每一极点处的留数就是

$$\mathscr{R}_n=H(\omega_n)=H\left(s\pm j\frac{2\pi n}{T}\right).$$

式(12.13)成为

$$H^*(s)=T\sum_{n=-\infty}^{\infty}H\left(s+j\frac{2\pi n}{T}\right). \qquad (12.20)$$

因而，采样滤波器函数的频率响应，等于连续函数的频率响应叠加上位移 $2\pi/T$ 的倍数所对应的响应。这些额外项的附加或折叠进来被称为频率响应的混叠现象[6]。如果当$|s|\geqslant j\pi/T$ 时 $H(s)\simeq 0$，那么在区域$-j\pi/T\leqslant s\leqslant j\pi/T$ 内，$H(s)$ 和 $H^*(s)$之间的差异可以忽略不计，因而数字滤波器和连续滤波器的频率响应基本相等。这个结果描绘于图 12-9 中。(在讨论数字滤波器频率特性的时候，主要关心的频带为 $-\pi/T\leqslant\omega$

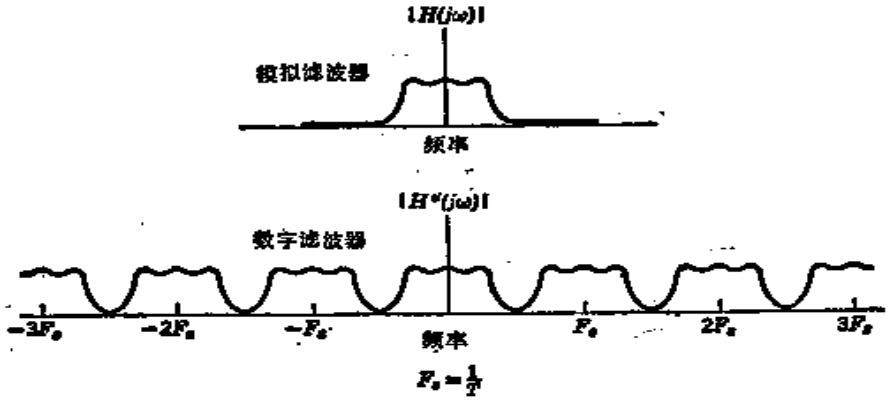


图 12-9　连续有限带宽低通滤波器和通过标准 z 变换求得的数字滤波器的频率响应的比较

$\leqslant \pi/T$——频率响应认为是周期性的。）

防护频带滤波器

一种将滤波器函数 $H(s)$ 乘以所谓[7]防护频带滤波器 $G(s)$ 的方法，有时对增大 $\omega \geqslant \pi/T$ 时 $H(j\omega)$ 的衰减是有用的。防护频带滤波器要选择得使在 $\omega \geqslant \pi/T$ 时，乘积 $G(j\omega) \cdot H(j\omega) \to 0$。这种方法的缺点是将得出比原连续滤波器设计的阶次为高的数字滤波器设计。但是它却提供了一种对本来不是频带受限的滤波器、应用标准 z 变换函数来实现的方法。以下的例子将说明用于带阻设计的方法。

例 12.2 如果不对要变换的带阻函数加以频带限制，对于数字带阻滤波器是不能应用标准 z 变换来设计的。现在要求设计一个 12 阶巴特沃思数字带阻滤波器，其阻带为 400 至 600 Hz，并在 2 kHz 的采样频率下运行。连续滤波器是由 6 阶低通原型用低通至带阻变换

$$s \to \frac{s(\omega_u - \omega_l)}{s^2 + \omega_u \omega_l}$$

来设计的，其中 $\omega_l = 2\pi \times 400$ 而 $\omega_u = 2\pi \times 600$。6 阶低通原型有复极点在

$$s_1 = -\alpha_1 \pm j\beta_1 = -0.9659 \pm j\ 0.2588$$
$$s_2 = -\alpha_2 \pm j\beta_2 = -0.7071 \pm j\ 0.7071$$
$$s_3 = -\alpha_3 \pm j\beta_3 = -0.2588 \pm j\ 0.0659.$$

防护频带滤波器阶次的决定要考虑两点。第一点是，带阻滤波器必须通过的最高频率。对这个例子，设为 800 Hz。第二点考虑是所需要的衰减，以防止在 2 kHz—600 Hz 周期性响应的叠混影响。在此频率下需要约 40 dB 的衰减，从而可决定巴特沃思防护频带滤波器的阶次 N 如下：

$$N=\frac{40}{20\log\left(\frac{1400}{800}\right)}=8.25.$$

因此，初次试验性设计要求使 12 阶带阻函数与 8 阶低通函数组合起来。这种组合的标准 z 变换将得出一个 20 阶的数字滤波器！滤波器系数给出于表 12-1 中。

表 12-1 对 12 阶连续带阻滤波器与 8 阶防护频带滤波器相结合的数字滤波器逼近的 z 变换系数*

节	A_0	A_1	B_1	B_2
1	3.0574	0.1263	−0.2109	0.5631
2	3.4686	−1.1815	0.0314	0.5275
3	0.6434	0.7462	−0.4148	0.5337
4	1.1387	−1.2040	0.2941	0.6015
5	−0.1158	0.2201	−0.5671	0.8771
6	−0.0329	−0.3526	0.5352	0.8236
7**	39.6822	−0.8972	−0.1500	0.0072
8	−42.3199	3.2615	−0.0430	0.0153
9	−7.9140	−5.1976	0.2455	0.0613
10	2.3924	0.3037	0.9550	0.3751

* 带阻 400—600 Hz。防护频带截止于 800 Hz。采样频率为 2 kHz。

** 7 到 10 项是属于防护频带滤波器的。

图 12-10(a)示原连续滤波器的幅值频率响应。20 阶的数字逼近响应示于图 12-10(b)中。在数字滤波器的阻带中，为了达到较大的抑制，就应把防护频带滤波器的阶次增加到 9。如果没有任何防护频带滤波器，连续带阻滤波器的标准 z 变换将得出一个如图 12-10(c)所示的其响应不合格的数字滤波器。但确实也有另一种供无频带限制设计(诸如带阻与高通)用的设计

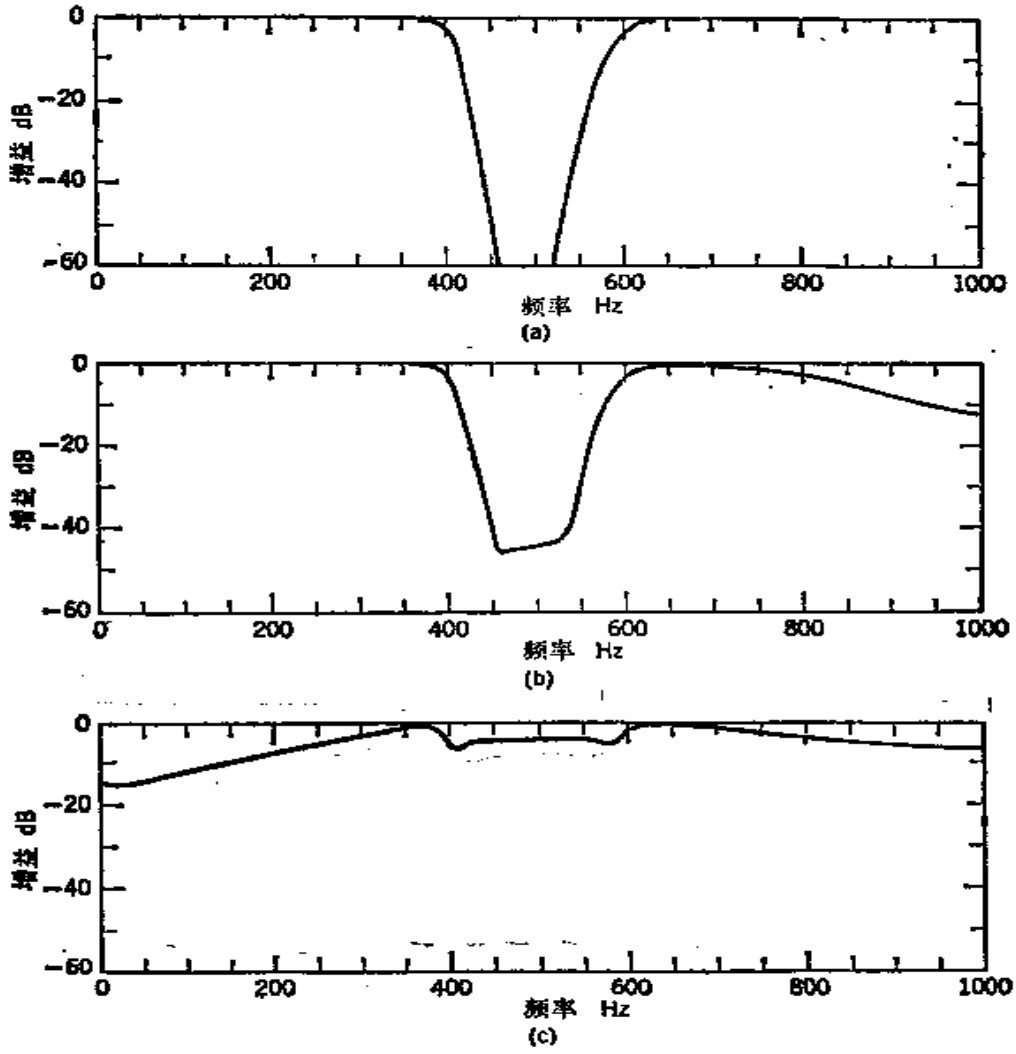


图 12-10 幅值频率响应：（a）具有 400 和 600 Hz 截止频率的连续12阶巴特沃思带阻滤波器，（b）12阶带阻与在 800 Hz 截止的 8 阶低通防护滤波器相组合的标准z变换，和(c) 单独带阻滤波器的标准 z 变换

方法，不需用防护频带滤波器。

互补滤波器

在许多事例中，可以从数字全通和带通函数或低通函数来综合数字带阻或高通滤波器。这是利用下列关系完成的

$$H_{bs}(z)=H_{ap}(z)\pm H_{bp}(z) \qquad (12.21)$$

式中 $H_{bs}(z)$＝所需带阻滤波器

$H_{ap}(z)$＝全通数字函数

$H_{bp}(z)$＝带通数字滤波器。

全通函数的选择、取决于带通滤波器在其通带内的相位特性。在许多事例中，作为初步逼近，可以把这种特性用线性相位函数表示*。这意味着可以用函数 $\exp(-s\tau)$来表示全通函数。函数的延迟 τ，要选择得逼近带通滤波器的延迟。只要能把 τ 表示为采样周期 T 的整数 N 倍，则在数字形式中、延迟函数就简单地变成

$$\exp(-s\tau)=\exp(-sNT)=z^{-N}.$$

如果带通函数是通过频率变换

$$s\to\frac{s^2+\omega_u\omega_l}{s(\omega_u-\omega_l)}=\frac{s^2+(2\pi)^2f_uf_l}{s\,2\pi(f_u-f_l)},$$

来设计，那么滤波器将在几何中心频率 $f_0=\sqrt{f_uf_l}$ 处有零相位。因而，为了能结合延迟函数和带通，以产生一个带阻滤波器，延迟函数的相位在 f_0 处应为 π 的倍数。（奇倍数总是要求利用(12.21)中的加号，而偶倍数则要求利用减号。）把这个条件应用到延迟函数 z^{-N} 在 f_0 的相位，给出

$$2\pi f_0NT=M\pi$$

---

* 全通函数的设计需要单独地广泛讨论，不能在此考虑。

或
$$\frac{f_s}{f_0}=\frac{2N}{M}.$$
因此，采样频率对频带中心频率之比应为两个整数之比。以下的例子将说明上述概念。

例 12.3 与例 12.2 中所述的那一带阻滤波器相类似，要求使用互补滤波器法。主要要求是：滤波器在 500 Hz 有最大衰减，而且有一个 200 Hz 的额定阻带宽度。这些要求决定了上、下截止频率之间的以下关系。

$$f_u f_l=(500)^2 \qquad f_u-f_l=200$$

因此 $f_l=409.9$ 和 $f_u=609.9$.

200 Hz 带宽滤波器在频带中心的延迟 [8] 大致为 6.14 msec。(有时需要调整滤波器的带宽，以使 $f_s\tau$ 在频带中心为某一特定值。注意到 τ 和滤波器的带宽成反比，则这种调整就易于做到。一旦调整好带宽，就可分别再计算上、下截止频率 f_u 和 f_l。对于这个例子，以上频率将用来作为原始计算的频率。)需要的 N 值为

$$N=6.14\times10^{-3}\times2000=12.28\simeq12.$$

核对 M 为一整数，给出

$$M=\frac{f_0}{f_s}\times 2N=\frac{500}{2000}\times2\times12=6,$$

因而应该使用(12.21)中的负号。所以设计需要两个步骤：

1. 利用频带变换和上面所给定的截止频率，把 6 阶归一化低通函数(参看例 12.2)变换成带通函数，而且

2. 求出连续带通函数的标准 z 变换。

这两个步骤的结果，恍是一个要与 12 单位的延迟相结合的数字带通滤波器。该数字滤波器的系数给出于表 12-2 中。图 12-11(a)和(b)示数字带通和互补带阻滤波器的幅值频率响

表 12-2　对连续 12 阶带通滤波器逼近的数字滤波器的 z 变换系数*

节	A_0	A_1	B_1	B_2
1	0.5022	−1.1743	−0.1627	0.5627
2	1.1559	1.0262	0.0784	0.5279
3	−0.8193	0.2558	−0.3636	0.6829
4	−1.0953	−0.0872	0.3424	0.6022
5	0.1147	0.1270	−0.5110	0.8766
6	0.1418	−0.1907	0.5892	0.8241

* 截止频率为 409.9 和 609.9 Hz。

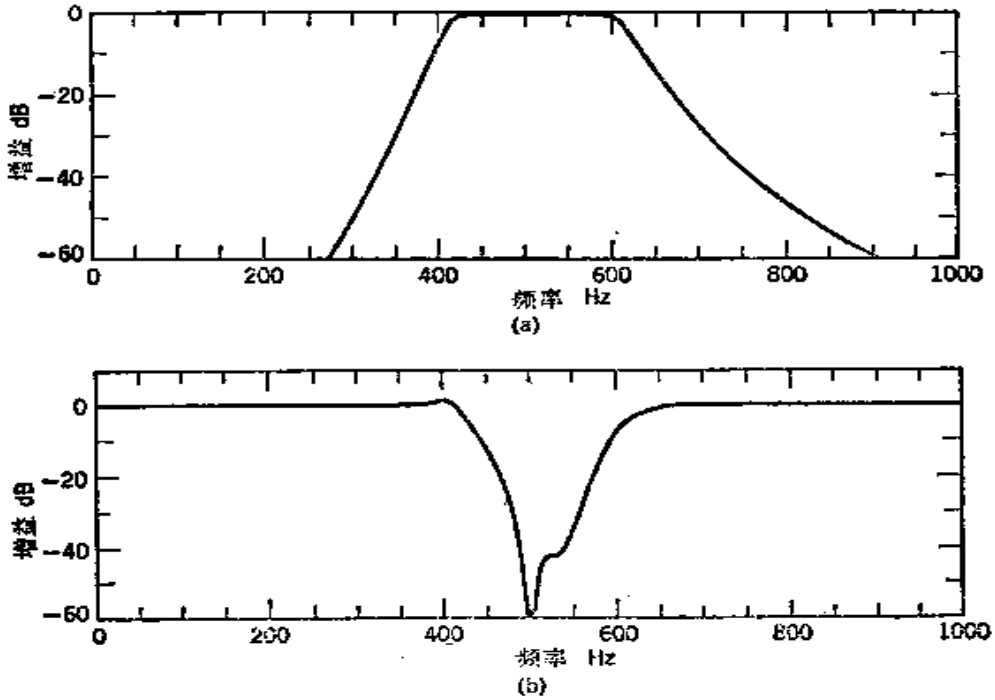


图 12-11　数字带通和互补带阻滤波器的幅值频率响应：(a) 具有截止频率为 409.9 和 609.9 Hz 的 12 阶巴特沃思带通，(b) 从 z^{-12} 减去 (a) 所形成的互补带阻

应。由此可见滤波器的确在 500 Hz 达到最大衰减(最小增益)。在 12.6 节中将可看出，怎样利用互补滤波器来得出格外好的结果。

现实的考虑

实际上，标准 z 变换最适合于寻求低通和带通滤波器的数字形式。特别适用于从全极点低通原型例如巴特沃思型、贝塞尔型、过渡型和切比雪夫 I 型设计所导出的连续滤波器的设计。对于带阻和高通滤波器，如果不采用防护频带滤波器或者互补滤波器的话，可以用双线性 z 变换或匹配 z 变换来设计具有所需频率特性的数字滤波器[9、10]。

12.2 双线性 z 变换

许多滤波器函数的设计指标，需要实现频域中的给定响应特性，但是它不要求任何特殊的冲激或阶跃响应特性。频率响应的指标，仅允许利用不同的数字化变换——双线性 z 变换。这种变换可用来实现其通带和阻带幅度要求比较恒定的数字滤波器。

由
$$s=\frac{2}{T}\tanh\left(\frac{s_1T}{2}\right)=\frac{2}{T}\left(\frac{1-\exp(-s_1T)}{1+\exp(-s_1T)}\right)=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \tag{12.22}$$

给出的双线性 z 变换，把全部复 s 平面映射至 s_1 平面内以界线

$$s_{1l}=\frac{j\pi(2n-1)}{T} \quad 和 \quad s_{1u}=\frac{j\pi(2n+1)}{T}$$

为界限的无数水平条形区域内。这种映射变换说明于图 12-12

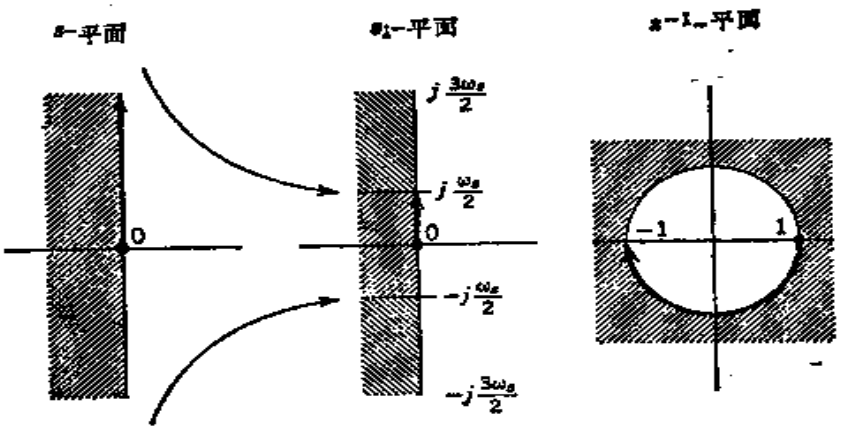


图 12-12　在连续 s、s_1平面和离散 z^{-1}平面之间，用双线性 z 变换所导致的映射关系

中。因此，可以把这种双线性 z 变换看作一种频带限制变换。这种代数变换把左半 s 平面唯一地映射至 z^{-1}平面上的单位圆外。这种变换可用于 $H(s)$的有理分式形式或者部分分式展开。在用于部分分式形式的时候，对一阶和二阶极点所导致的几项分别为

$$\frac{R_r}{s+\alpha} \Longleftrightarrow \frac{(1+z^{-1})A_0}{1+B_1z^{-1}} \tag{12.23}$$

其中　$A_0=\dfrac{R_rT}{2(1+\alpha T/2)}$　　$B_1=-\dfrac{(1-\alpha T/2)}{(1+\alpha T/2)}$

和

$$\frac{R_r+jR_i}{s+\alpha-j\beta}+\frac{R_r-jR_i}{s+\alpha+j\beta} \Longleftrightarrow \frac{(1+z^{-1})(A_0+A_1z^{-1})}{1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}} \tag{12.24}$$

其中

$$A_0=\frac{T[R_r(1+\alpha T/2)-R_i(\beta T/2)]}{d}$$

$$B_1=\frac{-2[1-(\alpha T/2)^2-(\beta T/2)^2]}{d}$$

$$A_1=\frac{-T[R_r(1-\alpha T/2)+R_i(\beta T/2)]}{d}$$

$$B_2=\frac{[(1-\alpha T/2)^2+(\beta T/2)^2]}{d}$$

$$d=(1+\alpha T/2)^2+(\beta T/2)^2.$$

因为双线性 z 形式在特征上是代数形式的，故可以把它直接用于表示转移函数的有理分式的各个项。因而实因子的变换按照

$$s+\alpha \Longleftrightarrow C_0\frac{(1+B_1z^{-1})}{(1+z^{-1})} \tag{12.25}$$

式中 $C_0=(2/T)(1+\alpha T/2)$ $B_1=-\left(\frac{1-\alpha T/2}{1+\alpha T/2}\right)$

而复因子则成为

$$(s+\alpha)^2+\beta^2\Longleftrightarrow C_1\frac{(1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2})}{(1+z^{-1})^2} \tag{12.26}$$

式中 $C_1=(2/T)^2d$

而 B_1、B_2 和 d 与(12.24)中的定义同。

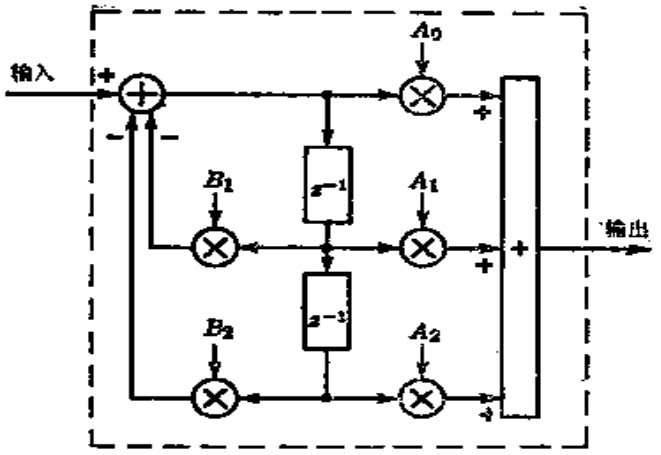
利用以上分别由有理分式和部分分式展开所导出的关系，可得出串联型

$$\mathscr{H}(z^{-1})=\frac{\prod_{m=1}^{M}(A_{0m}+A_{1m}z^{-1}+A_{2m}z^{-2})}{\prod_{n=1}^{N}(1+B_{1n}z^{-1}+B_{2n}z^{-2})}, \tag{12.27}$$

或并联型

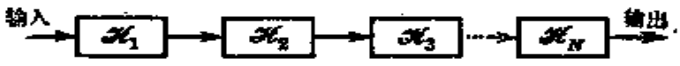
$$\mathscr{H}(z^{-1})=(1+z^{-1})\sum_{n=1}^{N}\frac{A_{0n}+A_{1n}z^{-1}}{1+B_{1n}z^{-1}+B_{2n}z^{-2}}. \tag{12.28}$$

由(12.28) 所给出的并联型实现，本质上同图 12-4 和 12-5 所示的一样，只是在图 12-5 所示的输入或输出线中多串了 $(1+z^{-1})$一项。由(12.27)所给出的几项的实现，则表示于图 12-13



$$\mathcal{H}(z^{-1})=\frac{A_0+A_1z^{-1}+A_2z^{-2}}{1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}}$$

(a)



$$\mathcal{H}(z^{-1})=\prod_{n=1}^{N}\mathcal{H}_n(z^{-1})$$

(b)

图 12-13　数字滤波器串联实现的方框图

(a)中。把分子和分母项配对，以便减少总的存储或记忆单元数。把需要的节数级联，则导致如图 12-13(b) 中所示的串联实现。

双线性 z 变换特别适合于邻接通带和阻带中具有比较平坦幅值特性的滤波器。不过，在设计具有关键(截止)频率大于采样频率 10%的滤波器时，必须加以注意。这是由于双线性 z 变换会引起的频率标度的非线性弯曲。z^{-1} 平面中的频率与 s 平面中的频率有下列关系

$$f_aT=\frac{1}{\pi}\tan\pi f_dT. \tag{12.29}$$

图 12-14 中画出了表示这个关系的草图。对于频率标度弯曲的校正，可以把所需数字滤波器的关键频率在应用一种频带变换以前就预弯曲来达到。结果所得预弯曲连续滤波器函数将通过双线性 z 变换来变换成所需数字函数。以下例子将说明引用双线性 z 变换时有关预弯曲的应用。

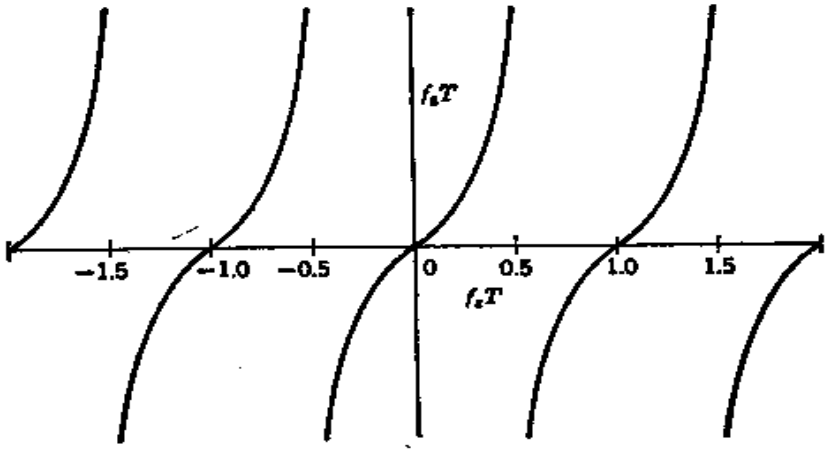


图 12-14　在 s 平面和由双线性 z 型所导致的 z^{-1} 平面之间的频率标度对应关系

例 12.4　例 12.2 中所述带阻滤波器可以通过双线性 z 变换来实现。然而，把双线性 z 变换应用到连续带阻滤波器，它的关键频率必须从数字滤波器所需截止频率来决定。应用 (12.29)，给出

$$f_l=\frac{2000}{\pi}\tan(\pi\,400/2000)=462.63$$

和

$$f_u=\frac{2000}{\pi}\tan(\pi\,600/2000)=876.23.$$

把这些频率用于阻带频率变换中，以决定需要的连续滤波器转

表 12-3　400 Hz 到 600 Hz 的并联型数字带阻滤波器在 2 kHz 采样频率的双线性 z 变换系数*

节	A_0	A_1	B_1	B_2
1	−1.6837	−0.4971	−0.1345	0.5251
2	−1.6837	0.4971	0.1345	0.5251
3	−0.1034	−0.7434	−0.3768	0.6425
4	−0.1034	−0.7434	0.3768	0.6425
5	0.2042	−0.1730	−0.5580	0.8579
6	0.2042	0.1730	0.5580	0.8579

* 与滤波器并联的常数项＝3.4553。

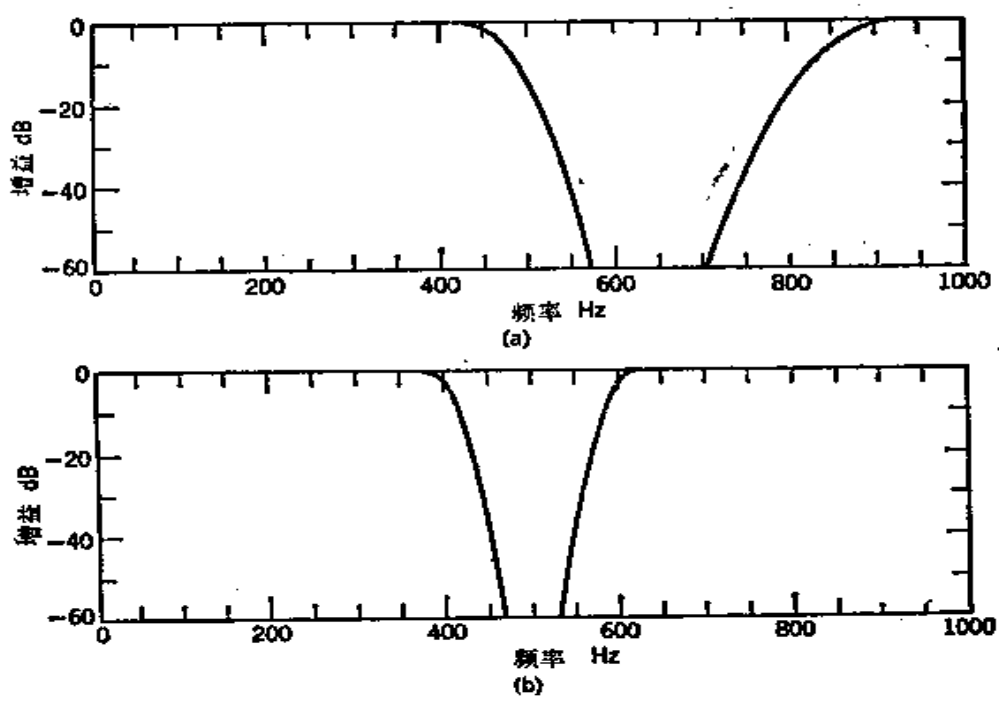


图 12-15　幅值频率响应：(a) 具有 462.53 Hz 和 876.23 Hz 截止频率的连续带阻滤波器，和 (b) 把双线性 z 变换应用于 (a) 所导出的、具有 400 Hz 和 600 Hz 截止频率的数字带阻滤波器。

移函数。应用(12.23)和(12.24)变换对所给出的变换，使我们得到并联型的所需数字带阻设计。如同(12.28)所给出的这种型式，已简化成适当的分数形式加上一常数(参看习题12.6)。数字带阻滤波器的系数给出于表12-3中。图12-15(a)示具有462.53 Hz和876.23 Hz截止频率的预弯曲连续滤波器的幅值响应　对应的双线性z变换设计的响应示于图12-15(b)中。截止频率为400 Hz和600 Hz的给定值。

由双线性z变换引起的频率标度弯曲，会导致具有频率响应特性与所需对应连续滤波器大不相同的数字滤波器。特别对宽带设计来说更是这样。而且，这种数字滤波器的时间响应特性，在双线性z变换下不是像在标准z变换下那样冲激不变的。(这在数字雷达和声纳系统中可能是灾难性的，因在这些场合下，波形保持对整个系统的满意运行是必不可少的。)为了实现满意的数字设计，幸而匹配z变换可以用来作为代替标准z变换和双线性z变换的另一种方案。

12.3　匹配z变换

使连续滤波器函数数字化的另一种方法，是用与连续滤波器的极点和零点相对应或匹配的极点和零点去构成数字转移函数。该变换关系为

$$s\to\exp(sT)=z. \tag{12.30}$$

因此，在$s=\alpha_n$的极点应映射为在$\exp(-\alpha_nT)$的极点，从而使我们在连续函数零、极点和数字函数零、极点之间得到匹配。在数字滤波器函数中对应于$s+\alpha_n$的因子为$z-\exp(-\alpha_nT)$，或依据z^{-1}则为$1-z^{-1}\exp(-\alpha_nT)$。因而实极点和零点按照下列关系变换

$$s+\alpha \leftrightarrow 1-z^{-1}\exp(-\alpha T)=1+B_1z^{-1} \qquad (12.31)$$

而复极点和零点则给出

$$(s+\alpha)^2+\beta^2 \leftrightarrow 1-2\,z^{-1}\exp(-\alpha T)\cos\beta T + z^{-2}\exp(-2\,\alpha T)=1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}, \qquad (12.32)$$

把匹配 z 变换应用于按有理分式形式表示的连续函数，给出数字滤波器函数，

$$H(z^{-1})=K\frac{\prod_{m=1}^{M}[1-z^{-1}\exp(-x_mT)]}{\prod_{n=1}^{N}[1-z^{-1}\exp(-\alpha_nT)]} =K\frac{\prod_{m=1}^{M}[1+z^{-1}A_m]}{\prod_{n=1}^{N}[1+z^{-1}B_n]}, \qquad (12.33)$$

式中 K 是选来以调整通带插入增益。

这个函数的极点同那些由标准 z 变换所导出的极点一样，而零点通常是不同的。匹配 z 变换直接导致串联（或级联）实现。然而，通过寻求上述 $H(z^{-1})$ 的部分分式展开，也可找到并联形式。

因为匹配 z 导出函数和标准 z 导出函数零点位置的不同，故可以把匹配 z 变换用于无带限函数，以得到满意的数字滤波器设计*。这将在以下的例子中说明。

例 12.5 用标准 z 变换来设计例 12.2、12.3 和 12.4 中所讨论的同一带阻滤波器。因为匹配 z 变换滤波器的极点，同样是标准 z 变换所决定的极点，故表 12-1 中所给定的前六个 B_1 和 B_2 系数，也是这个设计的 B_1 和 B_2 系数。连续带阻滤波器的分子，具有 $(s^2+\beta^2)^6$ 的形式。按照 (12.32)，这一项将变换为 $(1-2\,z^{-1}\cos\beta T+z^{-2})^6$。对于这个滤波器来说，$\beta$ 为

* 在匹配 z 变换的情况下，如果连续滤波器在 s 平面的 $j\omega$（虚）轴上有一零点，则这个零点被变换至 z 平面中的单位圆上。因此，保存了传输零点。在标准 z 变换情况下就不是这样。

3.0780×10^3，所以$-2\cos\beta T$为-0.06346。因而，六个级联数字节中各节的分子，都由多项式$(z^{-2}-0.06346\,z^{-1}+1)$组成。滤波器的结构示于图 12-13 中。（系数$A_2$和$A_0$为一，因而，对应的信号通路不需要乘数。）对于在频带中心 0 dB 插入损耗的正常化增益K为 0.29706。图 12-16 (a) 表明匹配 z 变换数字滤波器的幅值频率响应，而为了比较起见，图 12-16 (b) 则表明原连续带阻滤波器的响应。（这和图 12-10 (a) 是一样的）。

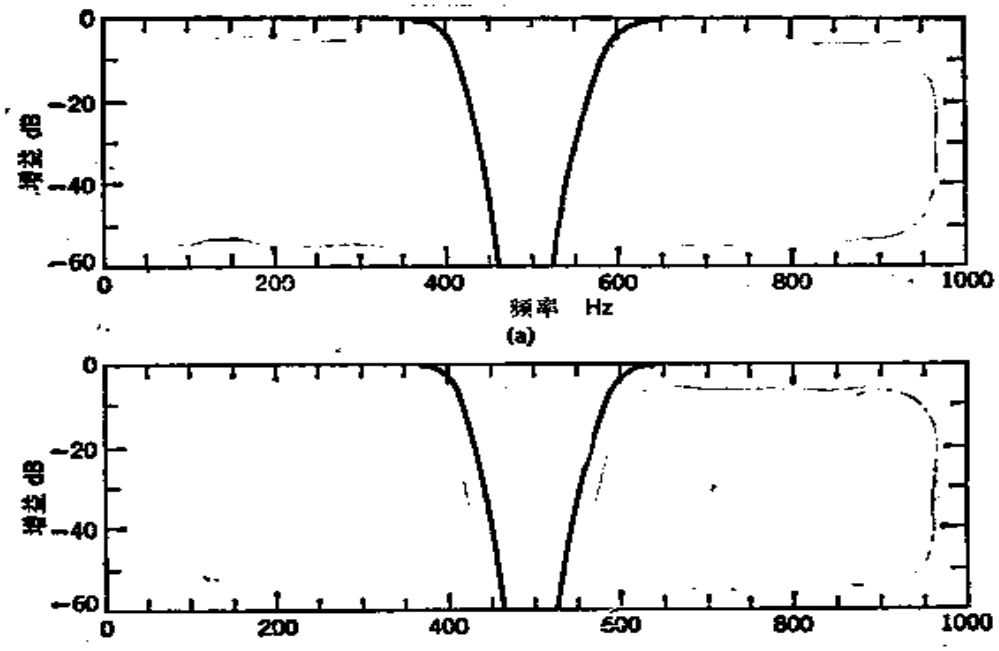


图 12-16　12 阶数字带阻滤波器的幅值频率响应，(a)为对具有如 (b) 中所示响应的连续滤波器用匹配 z 变换而设计的。采样频率 2 kHz，截止频率为 400 和 600 Hz

附加零点的需要

对于全极点连续函数例如巴特沃思、贝塞尔、过渡的和切比雪夫 I 设计来说，为了要达到满意的设计有时需要在原点或半采样频率处引入附加零点*。这是通过以 $(1+z^{-1})^N$ 乘 $H(z^{-1})$ 来完成的，而 N 为在半采样频率 $1/2T$ 处所需要的零点的阶次。

对于一些简单的设计例如简单 RC 低通滤波器来说，匹配 z 变换使我们得到同标准 z 变换一样的结果。为了获得带阻和高通滤波器的满意的数字转换函数，匹配 z 变换是对双线性 z 变换的一种有用的替换方案。

12.4 递归数字滤波器系数的量化

在上述讨论中，已假定数字滤波器系数的实际计算具有足够的准确度，以获得所需数字滤波器的响应特性。借助于数字计算机所进行的计算将易于得出 10 至 16 位小数的准确度。通常，在以通用计算机模拟数字滤波器时，系数的准确度将不成为重点考虑的问题。(但在以高采样频率设计甚窄带滤波器时，准确度将成为要考虑的问题。) 然而，在以硬件实现数字滤波器时，系数的准确度却是一个主要要考虑的问题。实际硬件和经济上的考虑通常确定了可以用来表示数字滤波器系数的位数(字码长度)的上限，这种限制的结果是，在所需数字滤波器函数中，极点和零点的位置将由于系数量化而偏移。随滤波器带宽、所用采样频率和字码长度的转移，"量化"系数有可能导

* 附加零点主要是为了在接近实轴和单位圆处有复极点的带通和带阻设计的需要。其作用与函数在过低频率下采样时所引入的叠混误差相类似。

致一种不稳定的滤波器。这种不稳定性是在滤波器的极点移过单位圆的稳定界限时产生的。

量化对 $H(z^{-1})$ 的极点（因而对稳定性）的影响，可以由分别检查 z 平面内的一次和二次分母项 $1+B_1z^{-1}$ 和 $1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}$ 来加以研究。对于一次项来说，z 平面中的实根在

$$z_r=-B_1, \tag{12.34}$$

而对于二次项来说，其根通常是复值的，为

$$z_c=\frac{-B_1}{2}\pm j\sqrt{B_2-\left(\frac{B_1}{2}\right)^2}. \tag{12.35}$$

因而，对于一次项，如果 $|B_1|<1$，而对于二次项，如果 $|B_2|^{1/2}<1$ 或 $B_2<1$，稳定性是有保证的。(12.34) 的量化意味着选择截尾至 N 位的 B_k 量化值（$[B_k]$ 或 $[B_k]+\Delta$）。方括号表示一截尾值，而 Δ 则表示 2^{-N} 的最小量化增量。(12.35) 的量化导致对复极点的四个可能极点位置的选择取决于对量化系数 B_1 和 B_2 的选择。图 12-17 中所示的四个可能位置为

$$\begin{aligned}
p_1&=\frac{-[B_1]}{2}+j\sqrt{[B_2]-\left(\frac{[B_1]}{2}\right)^2}\\
p_2&=-\left(\frac{[B_1]+\Delta}{2}\right)+j\sqrt{[B_2]-\left(\frac{[B_1]+\Delta}{2}\right)^2}\\
p_3&=\frac{-[B_1]}{2}+j\sqrt{[B_2]+\Delta-\left(\frac{[B_1]}{2}\right)^2}\\
p_4&=-\left(\frac{[B_1]+\Delta}{2}\right)+j\sqrt{[B_2]+\Delta-\left(\frac{[B_1]+\Delta}{2}\right)^2}.
\end{aligned} \tag{12.36}*$$

---

* 式中原文有误，现已改正——译者

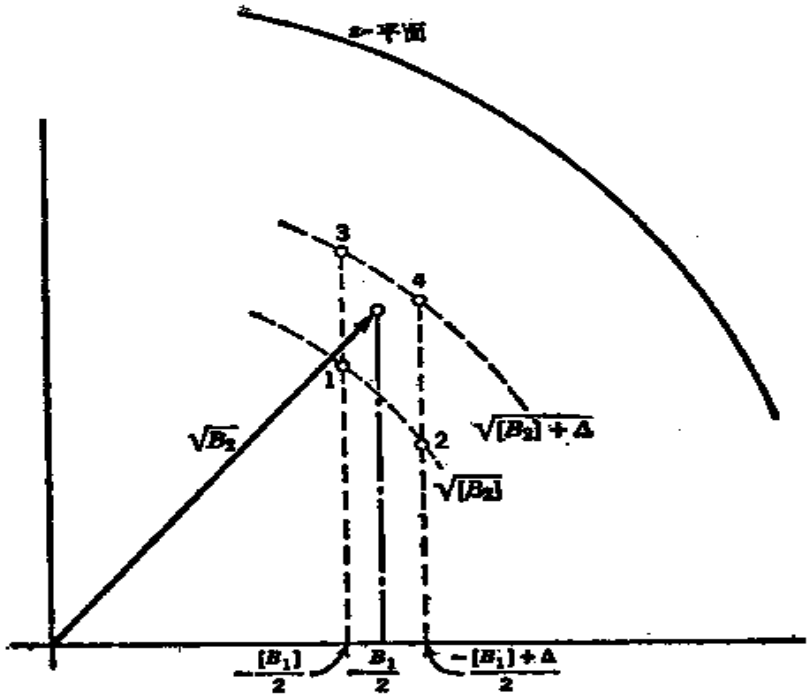


图 12-17 z 平面上的量化方根位置

在大多数情况下，所选择的量化极点位置，将总会是最接近实际极点的 p_k 值。然而，也可能有这种情况出现，这时选用另一个位置的极点可以改进量化逼近的程度。例如，量化可能得出一个最靠近实际极点的量化极点在单位圆上。这种情况发生于连续函数的极点，相对于用于数字化变换的采样周期具有较小的实部。也就是说，乘积 αT 比一小得多。关于采样频率（用来编排数字滤波器的位数）和极点位置 α 之间的关系将在下面考虑。

极点位置、采样频率和位数之间的相互关系

所考虑的转移函数具有形式

$$H(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}. \tag{12.37}$$

这个函数的标准 z 变换为

$$H(z^{-1})=\frac{\alpha T}{1-\exp(-\alpha T)z^{-1}}, \tag{12.38}$$

而双线性 z 变换则给出

$$H(z^{-1})=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}\left(\frac{1-\alpha T/2}{1+\alpha T/2}\right)}\cdot\left(\frac{\alpha T/2}{1+\alpha T/2}\right) \tag{12.39}$$

两函数都具有形式

$$H(z^{-1})=\frac{A_0+A_1z^{-1}}{1+B_1z^{-1}}. \tag{12.40}$$

当 $\alpha T\ll 1$，对于任何一个 z 型表示法的 B_1 都成为

$$B_1\approx-(1-\alpha T). \tag{12.41}$$

如果只用 N 位表示 B_1（不包括符号位），那么可加以准确表示的最小 αT、就是最小量化间隔 2^{-N}。因而，可以用 N 位表示的小于 1 的最大的 B_1 值为

$$B_1=-(1-2^{-N}), \tag{12.42}$$

知道 α 和 T，就决定了表示 B_1 所需要的最小位数。即

$$N=-\frac{\log_{10}(1+B_1)}{\log_{10}2}\simeq-\frac{\log_{10}\alpha T}{\log_{10}2}, \tag{12.43}$$

因此，三个参数 α、T 和 N 中任何两个的数值规定时就决定了第三个所需要的值。（对二阶极点来说，B_2 决定稳定性，因而，应该以 B_2 代(12.42)中的 B_1。）用几个例子可以帮助阐明选择各个变量的不同组合的结果。

例 12.6 如果 $|\alpha|=1$ 弧度/秒 和 $N=8$ 位，那么可能的最小 T 值（最高采样频率）为 $\simeq(2^{-N})/\alpha=2^{-8}=(1/256)$ 秒。然而，如果系统的采样间隔已经固定，那么所需要的位数、也

许不得不加以调整。如果 $T=1/1024$ 秒和 $|\alpha|=1$ 弧度/秒，那么所需要的最小位数（不包括符位）就由(12.43)给出为 $(\log_{10}1024)/(\log_{10}2)$，即正好为 10。把采样频率增加到 4096 Hz，就需要把位数增加到 12。另一方面，若只用 8 位、而且系统采样频率为 2048 Hz，那么可以实现的最低极点频率为 $\alpha=8.00$ 弧度/秒。由此可见，用来表示滤波器量化系数的位数，绝对地限制了可以在给定采样频率下能出现的最低极点频率。注意下述一点也是重要的：对固定的字码长度 N 来说，增大采样频率、也就增高了最低频率极点所能具有的频率值。

实际上用在数字滤波器的硬件实现中的量化位数，通常由经济上的考虑来决定。然而，数据率或采样间隔，则由存在于信号中的最高频率成分、或由表示在系统函数中的最高频率极点来决定。因此，需要的采样频率可决定对系数字码长度（即位数）的需要，这在经济上是不实用的，或者说与现有硬件是不相适应的。所以，在高数据率并且在较少于上述分析所决定的位数的情况下、实现轻阻尼的极点（小 α）是合乎需要的。这样的实现可以用对实际系统采样频率的分频、去设计函数来完成。结果将会减少表示滤波器系数所需要的位数，用以取代各滤波器节的额外记忆装置或存储器。

用有周期性零点的函数的较低数据率

考虑一具有轻阻尼极点的转移函数，以使极点位置和所用位数的组合、允许有 $f_1=1/T_1$ 的最大采样频率。如(12.38)式所给出的标准 z 变换为

$$H(z_1^{-1})=\frac{A}{1+B_1z_1^{-1}} \tag{12.44}$$

式中

$$z_1^{-1}\equiv\exp(-sT_1)$$

$$A=\alpha T_1$$

$$B_1=-\exp(-\alpha T_1).$$

不过，假定输入数据的带宽、需要的采样频率为 $f_2=1/T_2$，使

$$Mf_1=f_2 \text{ 或 } MT_2=T_1.$$

于是问题是要寻求一种按照 z_2 来表示 $H(z_1)$的方法，其中

$$z_1=z_2^M \text{ 或 } z_2^{-M}=z_1^{-1}$$

和 $z_2^{-1}\equiv\exp(-sT_2)$。

以 z_2^{-M} 直接代替 z_1^{-1} 本身就是不满意的，因为最后所得到的函数

$$H(z_2)=\frac{A}{1+B_1z_2^{-M}} \tag{12.45}$$

显示出具有周期等于低采样频率 $1/T_1$ 的周期性频率响应。

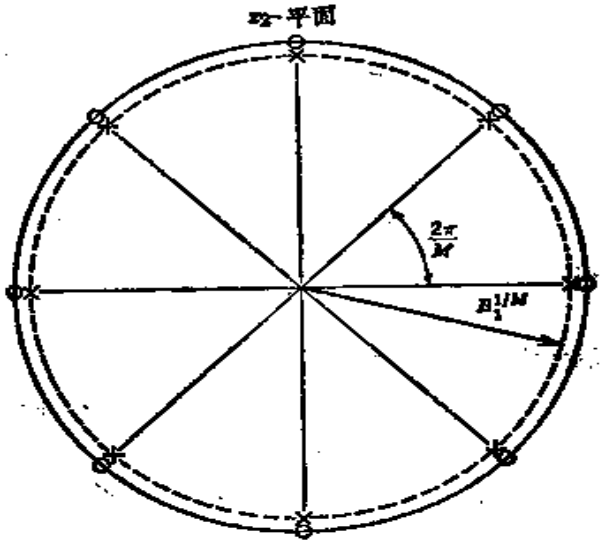


图 12-18　转移函数$H(z_2)=A/(1+B_1z_2^{-M})$的极点位置(X)和函数$H_0(z_2)=(1/M)(1-z_0^{-M})/(1-z_2^{-1})$的零点位置(O)

由观察可见，(12.45)中所给定的函数有M个极点(对应于$(-B_1)$的M个根)。这些是

$$z_2=|B_1|^{1/M}\cdot\exp\left[j\pi\left(\frac{2n+1}{M}\right)\right],\quad n=0,1,\cdots,M-1. \tag{12.46}$$

在$z_2=-B_1^{1/M}$的根，就是在(12.44)中以z_2替换z_1时应

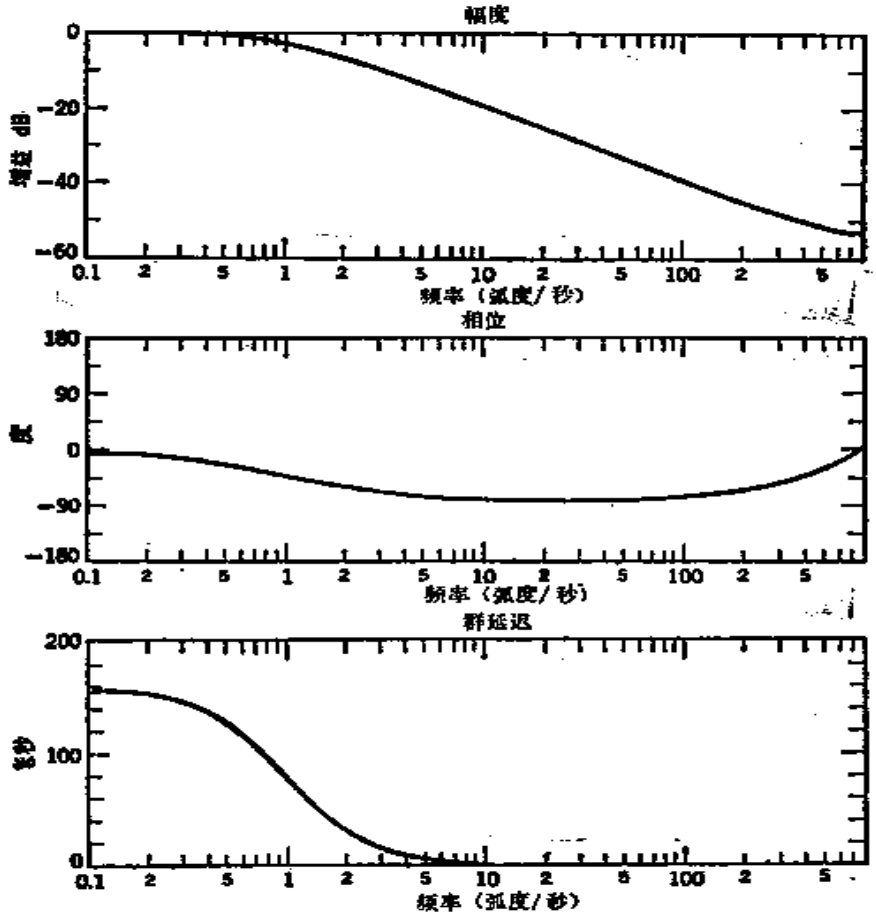


图 12-19　用48位和8位的系数准确度所实现的$H_1(z_1)=\alpha T_1/[1-z_1^{-1}\exp(-\alpha T_1)]$的频率响应。$\alpha=1,T_1=1/256$。(曲线是重合的。)

采用的值。不过，可用的位数防止了 $B_1^{1/M}$ 的准确表示法。

z_2 平面内所不需要的极点、可以用位于单位圆上与不希望要的极点相对立的零点来有效地予以抵消。把零点设置在单位圆上，避免了系数量化问题，因为方根值正好是一。持续时间为 T_1 的单位增益零阶保持函数的转移函数为

$$H_0(z_2)=\frac{(1-z_2^{-M})}{M(1-z_2^{-1})} \tag{12.47}$$

并在 $\exp(j2\pi n/M)$ 处有所需的零点，$n=1、2、\cdots、M-1$。

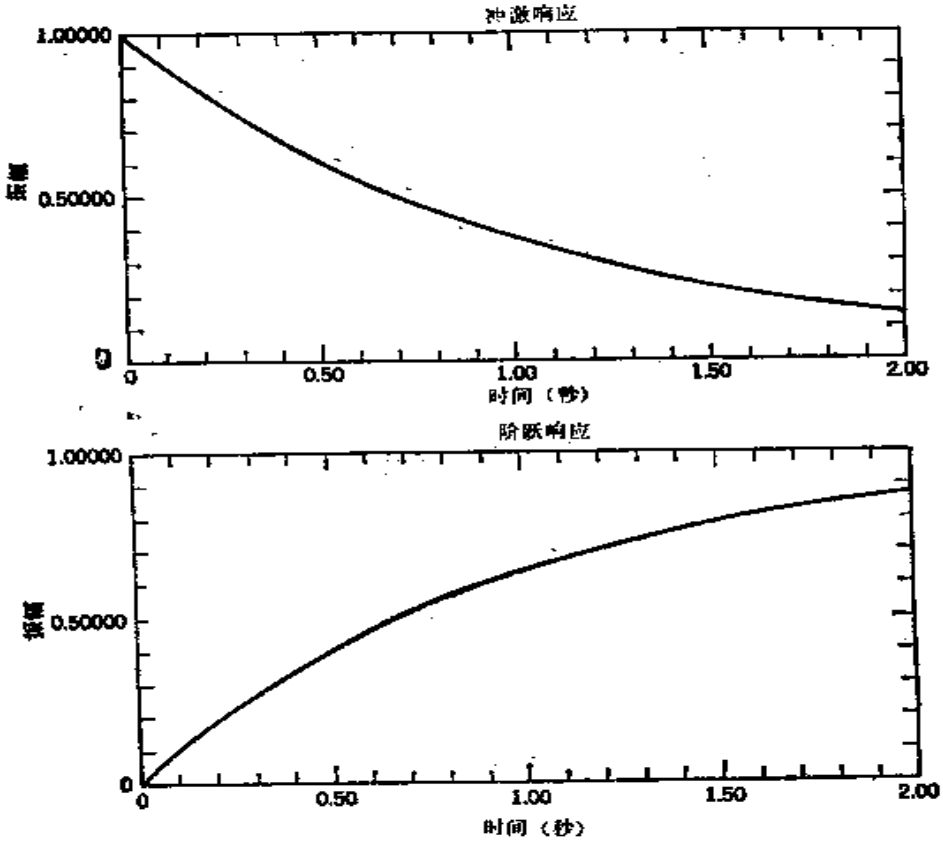


图 12-20　用 48 位和 8 位的系数准确度所实现的图 5.19 中 $H_1(z_1)$ 的冲激响应和阶跃时间响应。（曲线是重合的。）

将这个函数与(12.45)所给函数合併，得到

$$H_2(z_2)=\frac{(1-z_2^{-M})}{M(1-z_2^{-1})}\cdot\frac{A}{1+B_1z_2^{-M}},\qquad(12.48)$$

这就是所需要的转移函数。这个函数的极点和零点位置示于图12.18中。

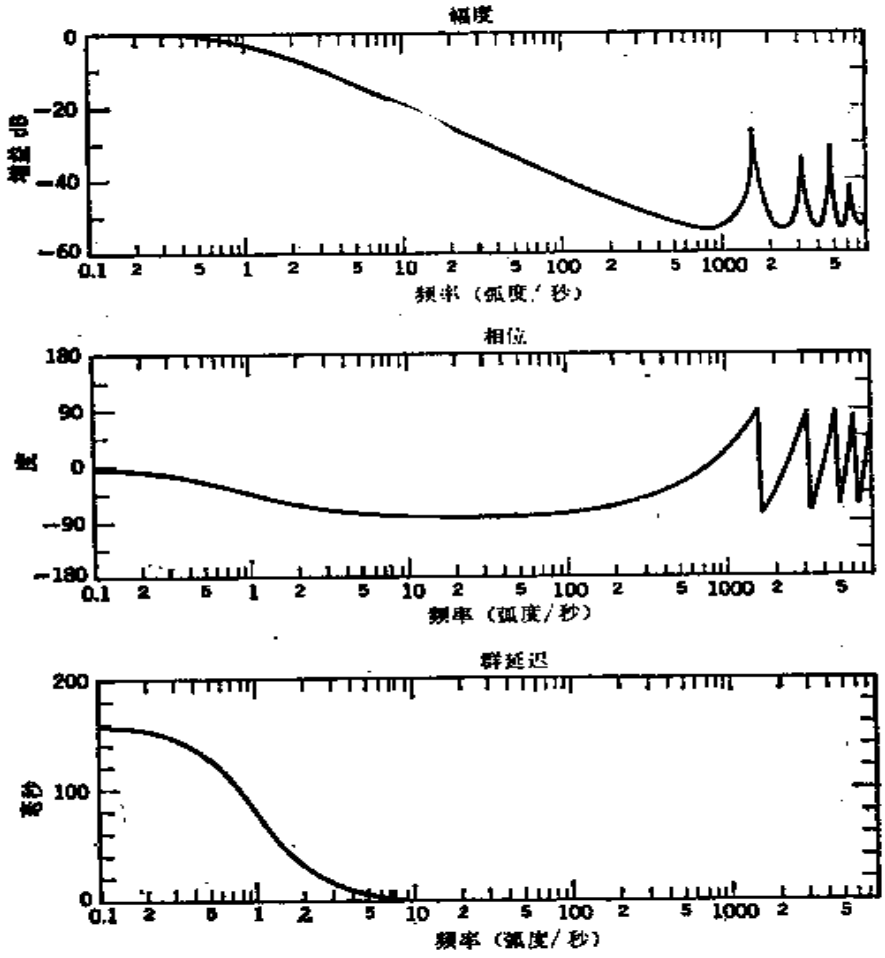


图 12-21　具有8位的系数准确度的 $H_1(z_2)=\alpha MT_2/[1-z_2^{-M}\exp(-\alpha MT_2)]$ 的频率响应。$\alpha=1$，$T_2=1/2560$，$M=10$。

例 12.7 作为一个例子，如果 $\alpha=1$ 弧度/秒和 $N=8$ 位（不包括符号位），可以使用的最大采样频率为 256 Hz。图 12.19 和 12.20 分别表示用 48 位系数准确度和 8 位准确度（符号加 1 位）所实现的函数的频率响应和时间响应。在描

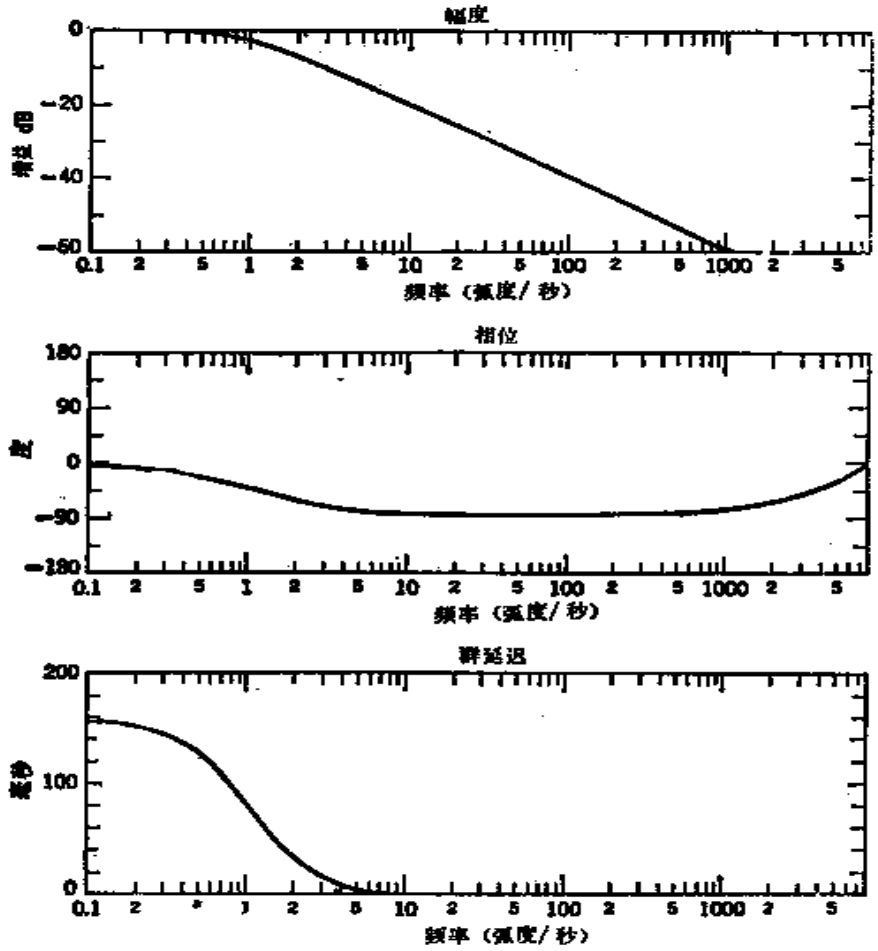


图 12-22 用 8 位的系数准确度所实现的 $H_{10}(z_2)=(1-z_2^{-M})/(1-z_2^{-1})\alpha T_2/[1-z_2^{-M}\exp(-\alpha MT_2)]$ 的频率响应。$\alpha=1, T_2=1/2560$，$M=10$。

绘器的准确度范围内，这些响应曲线是重合的。然而，如果全部系统必须运行在 2560 Hz，就需要附加 4 位或者采用 $M=10$ 的保持函数。图 12.21 示单独由 (12.45) 实现时的函数的响应，而图 12.22 和 12.23 则表明由 (12.48) 引入保持函数时的响应。由此可见，最后所得到的函数达到了所需要的特性。

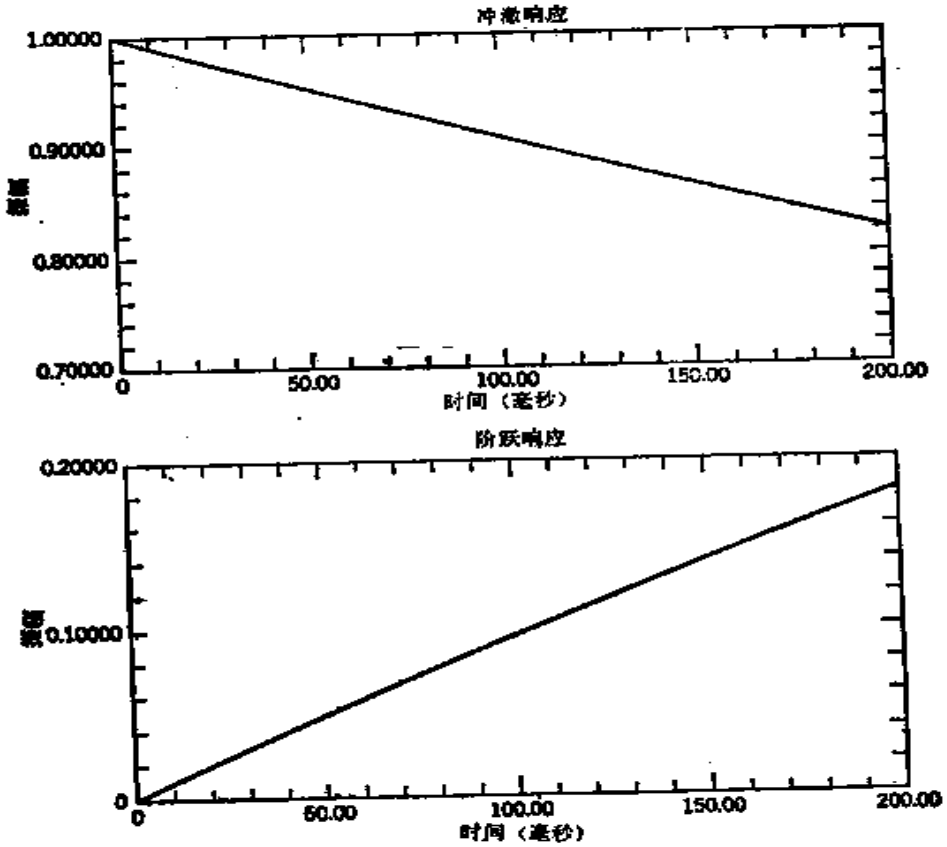


图 12-23　用 8 位的系数准确度所实现的图 12.22 中 $H_{10}(z_2)$ 的冲激响应和阶跃时间响应。

12.5 用傅里叶级数设计非递归数字滤波器

以上的讨论考虑了应用 z 变换于连续滤波器转移函数、进行递归数字滤波器的设计。但另有很多设计并不适于采用递归设计。特别是要求数字滤波器具有线性相位、且在 $-1/2T$ 与 $1/2T$ 之间的整个频带内、具有预定幅值特性时，例如在雷达接收机中那样，情况更是如此。

这样的滤波器，可以将所需要的幅值特性按照傅里叶余弦或正弦级数展开来设计[12、13]。所得到的傅里叶系数、就是以前示于图 12.2 中的非递归或横向滤波器的滤波器系数。

所用级数的形式、将取决于所需频率特性对零频率是奇函数还是偶函数。可以把偶函数写成

$$|H_e(j\omega)| = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\omega nT, \qquad (12.49\,a)$$

式中 ω 为角频率($2\pi f$)，幅值特性就以此计算，而 T 为采样间隔。

奇函数导致

$$|H_0(j\omega)| = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\omega nT. \qquad (12.49\,b)$$

如果把余弦和正弦项按复指数写成

$$\cos(\omega nT) = \frac{e^{j\omega nT} + e^{-j\omega nT}}{2} \qquad (12.50\,a)$$

$$\sin(\omega nT) = \frac{e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT}}{2j} \qquad (12.50\,b)$$

那么由 z 的定义，

$$\cos(\omega nT)=\frac{z^n+z^{-n}}{2} \qquad (12.50\,c)$$

$$\sin(\omega nT)=\frac{z^n-z^{-n}}{2j}. \qquad (12.50\,d)$$

因此，

$$|H_e(j\omega)|=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}(z^n+z^{-n}) \qquad (12.51\,a)$$

$$|H_0(j\omega)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{2j}(z^n-z^{-n}). \qquad (12.51\,b)$$

为了得到具有实系数的滤波器，把 j 从求和式中去掉。这样得到的滤波器、相对于由正弦级数所定义的理想函数有 90° 的相移，但幅值函数当然不会受影响。

上面给出的两种表示法中，由于 z^n 项（单位进程或预测算子）和无限和的存在，是实际上不能实现的。在实际情况下，可以把和数在 N 项后截去。因此，无限和简化为

$$|H_e(j\omega)|_N=A_0+\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n}{2}(z^n+z^{-n}) \qquad (12.52\,a)$$

$$|H_0(j\omega)|_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{B_n}{2}(z^n-z^{-n}). \qquad (12.52\,b)$$

现在可从上面的表达式中提出因子 Z^N，因此

$$|H_e(j\omega)|_N=Z^N\left[A_0Z^{-N}+\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n}{2}(Z^{n-N}+Z^{-(n+N)})\right], \qquad (12.53)$$

并对 $|H_0(j\omega)|$ 进行同样地处理。项 Z^N 具有单位幅值和线性相位，不会影响所需幅值特性的形状。丢掉这个项的后果，是会引入 $\exp(-jN\omega T)$ 的线性相移，或等效于 NT 秒或 N 个

样值的时延。注意数字滤波器的系数对于滤波器的中心点是对称的，而且延迟存储器的总数为2 N。这种对称性可把所需乘法器系数的实际数目减少一半，这种减少是由于把滤波器对其中心折叠而达到的。图 12-24 表示余弦结构的折叠编排。对正弦级数也形成同样的结构。

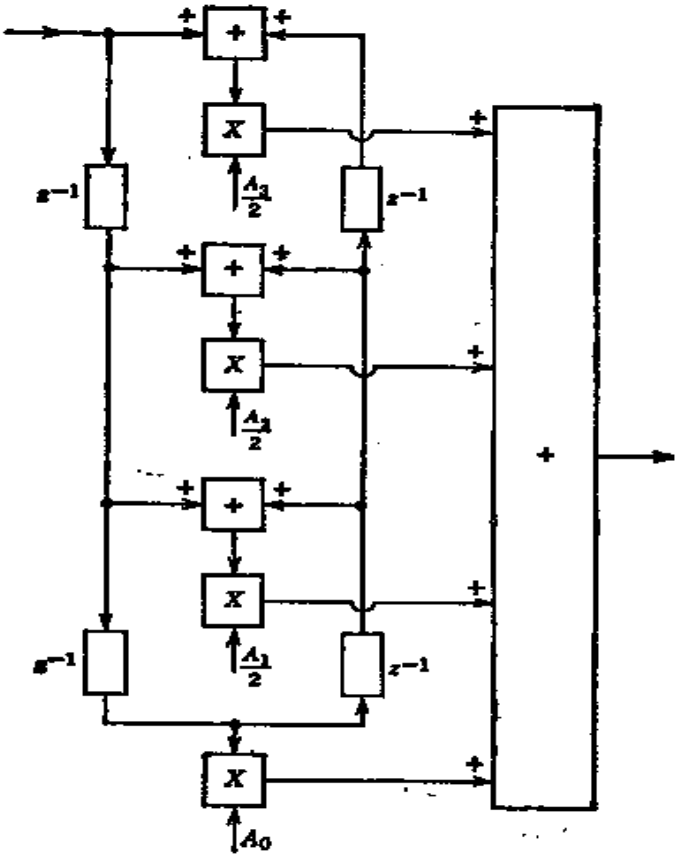


图 12-24　三项有限傅里叶余弦级数再加上常数项的、非递归滤波器表示法的方框图。

利用任何一种有限项数的实际结构，都会在频率响应中以纹波的形式引入截尾误差。而且，在通带与阻带之间具有突变式过渡的响应将呈现一种显著的吉布斯(Gibbs)现象，结果会产生麻烦。为了减小上述不希望有的影响，应对级数的系数另行加权。就滤波器来说，这相当于幅值响应的低通滤波或平滑。有几个函数可用来作平滑函数，但其中简单而有效的一种是归一化哈明窗(Hamming Window)，即

$$w_H(n)=1.0+(46/54)\cos\frac{2\pi n}{2N},\quad n=0,1,\cdots,N.$$

(12.54)

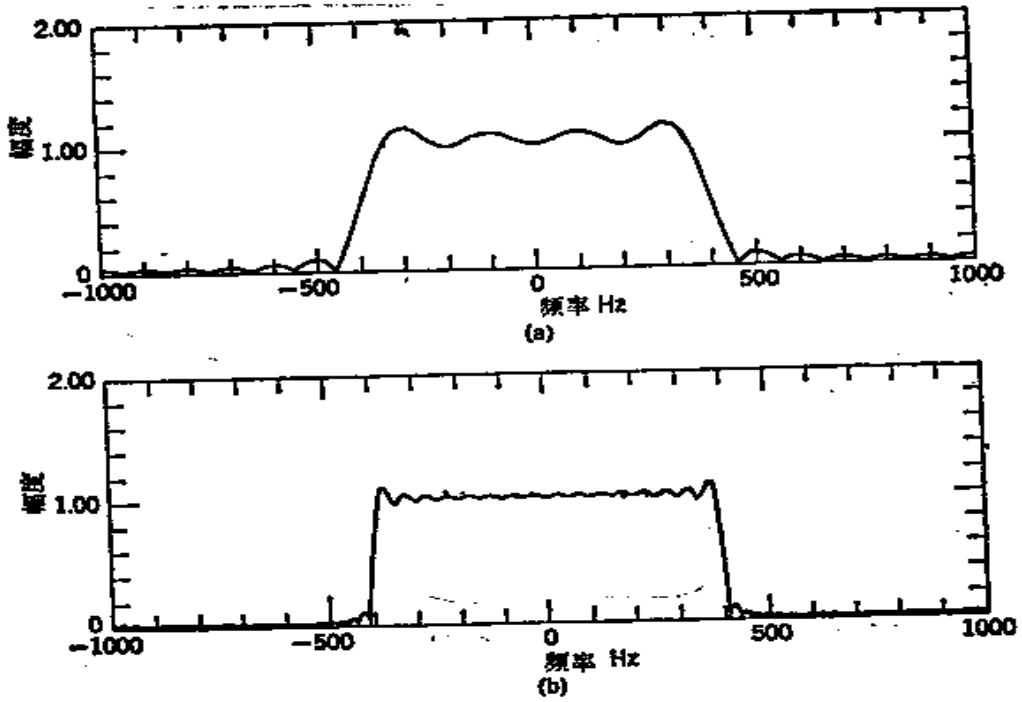


图 12-25 对具有 400 Hz 截止频率和 2 kHz 采样频率的横向余弦滤波器逼近的理想低通滤波器的幅值频率响应:(a) 11 项(21 抽头)，(b)41 项(81 抽头)。

因此，系数 A_n 应该由 $(1.0+46/54\cos\pi n/N)$ 来加权。

例 12.8 作为应用这种方法的一个例子，考虑对一理想低通滤波器的余弦级数逼近。这种函数及其级数逼近为

$$M(\omega)=U(\omega+\omega_u)-U(\omega-\omega_u)=A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\cos\frac{2\pi n\omega}{\omega_s} \tag{12.55}$$

$$A_0=\frac{2}{\omega_s}\int_0^{\omega_u}d\omega=\frac{2\omega_u}{\omega_s}$$

$$A_n=\frac{4}{\omega_s}\int_0^{\omega_u}\cos\frac{2\pi n\omega}{\omega_s}d\omega$$

$$=\frac{4}{\omega_s}\cdot\frac{\omega_s}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n\omega_u}{\omega_s}\right)=\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n\omega_u}{\omega_s}\right). \tag{12.56}$$

图 12.25 表明当 $n=10$ 和 40 而不对系数加权时这种函数的幅值响应。用 $w_H(n)$（如(12.54)中所定义的）对(12.56)所给出的系数加权的响应的影响示于图 12-26 中。

例 12.9 互补滤波器设计法是一种从低通设计得到高通非递归数字滤波器的理想方法。对例 12.8 所给低通的互补高通，按照(12.21)和(12.53)求出为

$$H_{高通}(z^{-1})=1-|H_c(j\omega)|$$

$$=\left\{1-\left[A_0+\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n}{2}(z^n+z^{-n})\right]\right\}z^{-N}. \tag{12.57}$$

因此，互补高通滤波器具有的系数就是低通滤波器系数的负数，但其常数或中心抽头的值为 1 减去低通的常数除外。例 12.8 的互补高通示于图 12-27 中。

具有任意幅值响应特性的数字滤波器的综合，通过利用离散或快速傅里叶变换(FFT)的计算法是有可能的[14、15]。因而，所需的幅值形状将会是对FFT程序的输入，而输出则会是由

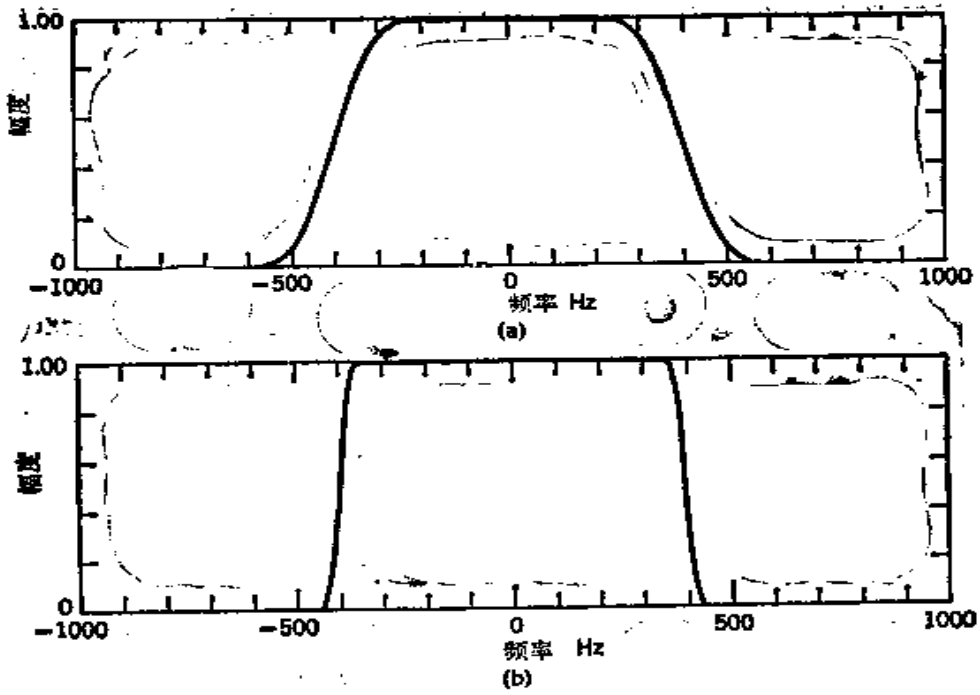


图 12-26　对系数用哈明加权的横向余弦滤波器逼近的理想低通滤波器的幅值频率响应：(a) 11 项 (21 抽头)，(b) 41 项(81 抽头)。

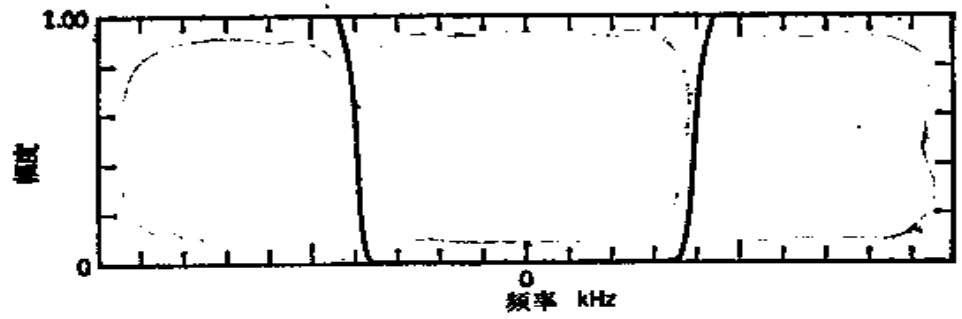


图 12-27　由图 12-26 b 所示低通设计而来的互补高通滤波器的幅值响应

滤波器的抽头权重所组成。所以可用窗（Window）函数加权（例如(12.54)所给定的哈明窗）来提供一种平滑的响应特性。上述傅里叶级数设计法可以推广为一种将滤波器函数按照正交三角函数和多项式展开的一般方法。这只要对所需非递归滤波器函数求得其按 $\exp(\pm j\omega T)=z^{\pm n}$ 的适当级数展开即可。

12.6 递归与非递归数字滤波器的数字计算机模拟和频率响应的计算

对递归和非递归数字滤波器所给方框图的硬件结构，包括对某种设计应用适当的数字电路的乘法器和延迟存储器的实现。因此，这个课题最好在关于数字和逻辑电路设计的课程中讨论。不过，在有的地方往往需要用计算机软件来实现数字设计，以完成信号分析和处理。因为计算机程序设计，如同工程师和科学工作者的计算尺一样，是很重要的工具。本节将表明：怎样把递归和非递归设计编成科学的程序语言——公式翻译程序（FORTRAN）。滤波器是按一般方式编成子程序的*。对这些子程序，必须提供一些包含有系数值与延迟存储以及输入采样序列值的数组，子程序将送出对应于输出样值的数据。为了要使滤波器的存储、在处理任何样值前为零，还包括有一预置开关参量。并联数字滤波器结构和串联结构的(FORTRAN)源程序、差不多是相同的。因此把它们编入称作 FILTER 的同一子程序内。用以下几页上给出的源程序、来实现图 12-28 所示的方框图。把注解散置在程序表内，以帮助弄清楚各程序段的目的。用来构成有限余弦级数设计的、对称横

* 这就是许多可能的软件实现中的一种。也可把滤波器软件实现为 FUNCTION 子程序或编制成一些其他语言程序[3、16]。

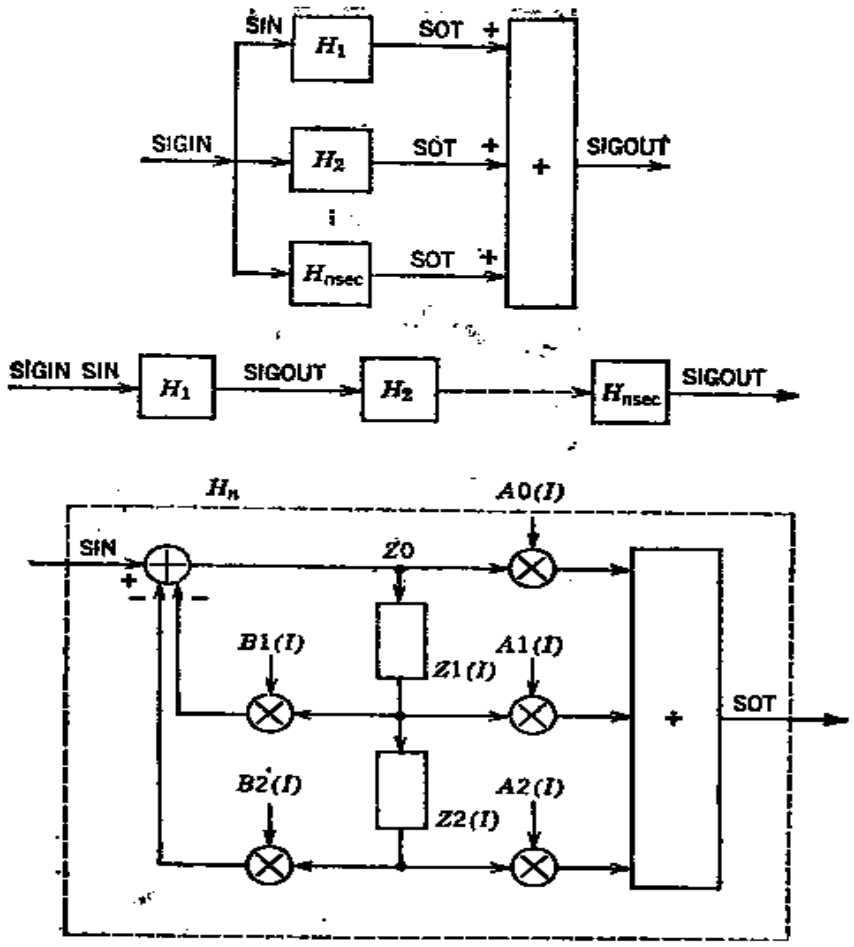


图 12-28　用于作并联或串联递归数字滤波器设计软件实现的方框图

向滤波器的软件实现，则由子程序 COFIL 给出如下。

```
      SUBROUTINE FILTER (SIGIN, NSEC, A 2, A 1, A 0, B 2,B 1,
                         Z 2, Z 1, ISOP, ISW, SIGOUT)
C     这个子程序以并联或串联形式实现
C     递归滤波器函数。子程序的形式参数为
```

```
C     ......
C          SIGIN     输入波形的当前值
C          NSEC      滤波器节数
C          A 2, A 1, A 0, B 2, B 1
C                    存放每节滤波器系数值、长度为 NSEC 的数组
C          Z 1, Z 2  表示每节所需要的延迟存储器，长度为 NSEC 的
                       数组
C          ISOP      串联或并联结构选择
C                    ISOP=1 表示串联实现
C                    ISOP=2 表示并联实现
C          ISW       预置开关。如果 ISW=0，就把滤波器延迟单元
C                    在开始处理之前置零。如果 ISW≠0，则利用存储
                       在 Z 2 和 Z 1 中的最后值继续处理
C          SIGOUT    计算的输出信号新值
      DIMENSION A 2(1), A 1(1), A 0(1), B 2(1), B 1(1), Z 2
        (1), Z 1(1)
      IF (ISW·NE·O) GO TO 10
C     延迟存储单元置零
      DO 11  I=1, NSEC
      Z 2(I)=0。
      Z 1(I)=0。
      11  CONTINUE
C     处理当前的输入样值
      10  CONTINUE
      SIN=SIGIN
      SIGOUT=0。
      DO 12  I=1, NSEC
      ZO=SIN-B 1(I) * Z 1(I)-B 2(I) * Z 2(I)
      SOT=AO(I) * ZO+A 1(I) * Z 1(I)+A 2(I) * Z 2(I)
      Z 2(I)=Z 1(I)
```

```
      Z1(I)=ZO
      IF (ISOP.GT.1) GO TO 14
C     对串联型
      SIN=SOT
      GO TO 12
      14 CONTINUE
C     对并联型
      SIGOUT=SIGOUT+SOT
      12 CONTINUE
C     如果是串联型则在 SIGOUT 中存储输出
      IF (ISOP.EQ.1) SIGOUT=SOT
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE COFIL (SIGIN, NTRMS, A, Z, ISW, SIGOUT)
C     这个子程序实现转移函数为
C     Z**(-N).(A(0)+SUM(.5*A(I)*(Z**(N)+Z**(-N))))
C     的对称横向滤波器功能
C     子程序的参数为……
C        SIGIN    输入信号的当前值
C        NTRMS    和式中的项数(A(0)除外)
C        A        存放系数或滤波器抽头权重的长度为(NTRMS+1)的
C                 数组
C        Z        为延迟线提供存储单元，长度为(2☆NTRMS)的数组
C        ISW      延迟线的预置开关。如果 ISW=0，就把数组在信
C                 号处理前将Z置零。如果 ISW≠0，则利用存储在
C                 Z中的最后值继续处理。通常只在第一次调用该子
C                 程序时取 ISW=0。
C        SIGOUT   输出信号的新值
      DIMENSION  A(1), Z(1)
```

```
      NVAL=2☆NTRMS
      IF(ISW·NE·0)    GO TO 10
C     延迟线输出置零
      DO 11    I=1, NVAL
      Z(I)=0。
   11    CONTINUE
C     信号处理由此开始
   10    CONTINUE
      M=NTRMS+1
C     计算延迟线末端抽头权重和A(0)的贡献值
      SIGOUT=A(1)☆Z(NTRMS)+.5☆A(M)☆(SIGIN
        +Z(NVAL))
C     计算其余抽头权重的贡献值
      MTM1=NTRMS-1
      K=NVAL
      DO 12    I=1, NTM1
      M=M-1
      K=K-1
      SIGOUT=SIGOUT+.5☆A(M)☆(Z(I)+Z(K))
   12    CONTINUE
C     更新延迟线
      K=NVAL+1
      DO 14    I=2,NVAL
      K=K-1
      J=K-1
      Z(K)=Z(J)
   14    CONTINUE
      Z(1)=SIGIN
      RETURN
      END
```

以上两例说明、怎样可以迅速实现数字滤波器设计，从而以之用于数字信号处理。递归或非递归滤波器的频率响应，可通过以 $\exp(-j\omega T)$ 代替 z^{-1} 而找到。一般二阶函数变为

$$\frac{A_2z^{-2}+A_1z^{-1}+A_0}{B_2z^{-2}+B_1z^{-1}+1}\rightarrow\frac{A_2e^{-j\omega T}+A_1+A_0e^{j\omega T}}{B_2e^{-j\omega T}+B_1+e^{j\omega T}}$$

利用复数运算，并联或串联结构的复响应分别为

$$H(W)=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_{2n}W^{-1}+A_{1n}+A_{0n}W}{B_{2n}W^{-1}+B_{1n}+W}\right), \tag{12.58}$$

其中 $$W=\exp(j\omega T)=\cos\omega T+j\sin\omega T$$

或 $$H(W)=\prod_{m=1}^{M}\left(\frac{A_{2m}W^{-1}+A_{1m}+A_{0m}W}{B_{2m}W^{-1}+B_{1m}+W}\right). \tag{12.59}$$

对称余弦滤波器或者反对称正弦滤波器的频率响应的计算，只不过分别为(12.52 a)和(12.52 b)的计算。这些是

$$|H_e(j\omega)|_N=|W^{-N}|\left|\left[A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\cos(\omega nT)\right]\right| \tag{12.60}$$

和 $$|H_0(j\omega)|_n=|jW^{-N}|\left|\sum_{n=1}^{n}B_n\sin(\omega nT)\right|. \tag{12.61}$$

对于一般结构的非递归滤波器来说，

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N}C_nz^{-n}, \tag{12.62}$$

响应可以最好地由如下的层套因子计算出来：

$$H(W)=C_0+W^{-1}(C_1+W^{-1}(C_2+W^{-1}(C_3+\cdots+W^{-1}C_N)))\cdots). \tag{12.63}$$

12.7 摘　　要

为了由连续滤波器转移函数设计递归数字滤波器，提出了三种数学变换，就是：标准 z 变换、双线性 z 变换和匹配 z 变换。在采样频率比滤波器通带的上限截止频率高的时候，所有三种 z 变换都得到同样的结果。各设计要求，原则上必须分

表 12-1　　数字滤波器设计方法的比较

标准 z 变换	双线性 z 变换	匹配 z 变换	傅里叶级数
得到并联实现	得到并联或串联实现	得到串联实现*	得到非递归或横向实现
需要滤波器转移函数的部分分式展开	需要预弯曲滤波器转移函数	需要滤波器转移函数的因子分解形式	需要频率响应的数学或实际表示法
保持冲激时间响应的形状	保持平坦幅值增益频率响应特性	保持频率响应特性的形状	有限存储因而有限时间响应。幅值为实际响应的有限傅里叶级数近似，因而相位为线性。
仅适合于有限带宽函数（低通和带通）	适合于所有滤波器类型、特别是宽频带滤波器	适合于所有类型，但可能需要在半采样频率插入附加零点	适合于所有类型，但可能需要许多项来完成带通或者带阻滤波器。
指数变换 $\frac{R}{s+a}\rightarrow\frac{RT}{1-z^{-1}\exp(-aT)}$	代数变换 $s+a\rightarrow\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}+a$	指数变换 $s+a\rightarrow 1-Z^{-1}\exp(-aT)$	需要傅里叶系数 $a_n=\frac{4}{\omega_s}\int_0^{\omega_s/2}H(\omega)\cdot\cos\frac{2\pi n\omega}{\omega_s}d\omega$ 或 $b_n=\frac{4}{\omega_s}\int_0^{\omega_s/2}H(\omega)\cdot\sin\frac{2\pi n\omega}{\omega_s}d\omega$

* 可能由寻求匹配 z 变换函数的部分分式展开而得到并联结构。

别计算，从而选择适宜的变换。

除三种变换以外，还注意到利用防护频带和互补滤波器，以及量化影响在递归设计中的考虑，也提出了利用傅里叶级数表示法的非递归滤波器的设计方法。一般说来，非递归设计对系数舍入的敏感、比递归设计小。可是，非递归设计、较递归设计通常需要较多的存储器和乘法运算(即较多的硬件)。

最后，为所讨论的递归和非递归设计，给出了关于软件实现的例子。还提出了两种设计方式的频率响应的计算。所介绍的设计方法的简单比较，给出于表 12-4 中。

习　　题

12.1 证明对任何巴特沃思设计的高通原型滤波器与低通原型都有下列关系：

$$H_{HI}(s)=s^N\cdot H_{LO}(s),$$

其中 N 为低通设计的阶次。(巴特沃思原型给定为

$$H_N(s)=1\Big/\prod_{n=1}^{N}(s+\alpha_n),\ \text{具有}|\alpha_n|=1\ \text{的复根。}\Big)$$

12.2 求 $1/(s+1)$的低通、带通、带阻和高通转移函数。带通、带阻和高通滤波器的标称下截止角频率为 ω_1，而低通、带通和带阻的上截止角频率则为 ω_2。

12.3 已知连续转移函数

$$H(s)=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2},$$

(a) 求 $H(s)$的标准 z 变换，并画出 $H(z^{-1})$的方框图。

(b) 求 $H(s)$的双线性 z 变换。(对 β 应使用什么样的近似预弯曲值?)假定 $\alpha\ll\beta$。

(c) 求 $H(s)$的匹配 z 变换，并指出怎样将数字函数归一化使之在 $\omega=\beta$ 时具有单位增益。

12.4 关于(12.19)，求 $\omega=\pi/T$ 时有 $H(z^{-1})\leqslant 0.1$ 的 RC 的最大值。

12.5 证明 $H(s)=a/(s+a)$的标准 z 变换和双线性 z 变换，在 $\omega_c\gg 1$的时候、对于小 ω 值是大致相等的。

12.6 由(12.23)和(12.24)所给出的双线性 z 变换对是假分数，它可以简化成真分数加上常数。试完成这种简化。

$$\left(\frac{(1+z^{-1})A_0}{1+B_1z^{-1}}=C_0+\frac{D_0}{1+z^{-1}}\qquad\text{和}\right.$$

$$\left.\frac{(1+z^{-1})(A_0+A_1z^{-1})}{1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}}=E_1+\frac{F_0+F_1z^{-1}}{1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}}\right)$$

$$C_0=?\qquad E_1=?$$

$$D_0=?\qquad F_0=?$$

$$F_1=?$$

12.7 关于(12.44)和(12.46)，证明，B_1 $1/M$ 基本上等于$(1-\alpha T_2)$。

12.8 由(12.54)所给出的哈明窗函数也可能用来作为低通数字滤波器函数。

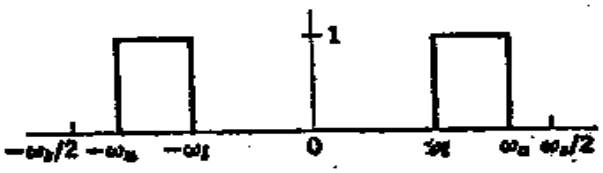
(a) 试求连续哈明窗函数的拉普拉斯变换，从而为这个函数(借助于标准 z 变换)确定递归数字滤波器表示法。

(b) 这个函数在 $\omega=0$ 的增益是什么?

(c) 画出仅用三个乘法器和数量 2 的任何次方(例如 1/4、1/2、2、4 等)以代替乘数 2^N 的函数的方框图。

12.9 试为 4 项傅里叶正弦级数的非递归数字滤波器实现，画一方框图。

12.10 下面所示的"理想"带通滤波器的频率幅度特性，



可以写成

$$M(\omega)=U(\omega+\omega_u)-U(\omega+\omega_l)+U(\omega-\omega_l)-U(\omega-\omega_u).$$

试对逼近这个响应的非递归(横向)数字滤波器求抽头权(即，系数)。

参 考 文 献

[1] E. I. Jury *Sampled-Data Control Systems*, John Wiley, New York, 1958.

[2] E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method*, John Wiley, New York, 1964.

[3] R. M. Golden, "Digital computer simulation of a sampled-data voice-excited vocoder," *J. Acoust. Soc. Am.*, 35, 1358-1366 (Sept., 1963).

[4] I. J. Sandberg, "Floating point roundoff accumulation in digital-filter realizations," *Bell System Tech. J.*, 46, No. 8,1775-1779(Oct., 1967).

[5] C. Weinstein and A. V. Oppenheim, "A comparison of roundoff noise in floating point and fixed point digital filter realizations," *Proc. IEEE*, 57,1181-1183 (June, 1969).

[6] R. B. Blackman and J. W. Tukey, *The Measurement of Power Spectra*, Dover Publications, New York, 1958.

[7] J. F. Kaiser, "Digital filters," *System Analysis by Digital Computer*, F. F. Kuo and J. F. Kaiser, Ed., John Wiley, New York, 1966, 218-285.

[8] R. M. Golden and J. F. Kaiser, "Root and delay parameters for normalized Bessel and Butterworth. low-pass transfer functions," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, AU-19, No. 1,64-71 (March, 1971).

[9] R. M. Golden and J. F. Kaiser, "Design of wideband sampled-data filters," *Bell System Tech J*, 43, Part 2, 1533-1546 (July, 1964).

[10] R. M. Golden, "Digital filter synthesis by sampled-data transformation," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, AU-16, No. 3,321-329 (Sept., 1968).

[11] R. M. Golden and S. A. White, "A holding technique to reduce number of bits in digital transfer functions," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, AU-16, No. 3,433-436 (Sept, 1968).

[12] H. Wayland, *Differential Equations*, D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1957, Chapters VI and VIII.

[13] A. Papoulis, *The Fourier Integral*, Mc Graw-Hill, New York, 1963

[14] J. W. Cooley and J. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," *Math. Comput.*, 19,297-301 (April, 1965).

[15] G. D. Bergland, "A guided tour of the fast Fourier transform," *IEEE spectrum*, 6, 41-52 (July, 1969).

[16] R. M. Golden "Digital computer simulation of sampled-data communication systems using the block diagram compiler: BLODIB", *Bell System Tech. J.*, 45,345-358 (March, 1966).

专业词汇、中英译名对照表

（按汉语拼音字母次序排列，括号内的数字表示所在章节）

A

AC补偿网络 AC compensation network (10.3)
艾希扎凯-瓦塔纳勃法 Ishizaki-Watanabe method (6.4)
鞍点 saddle point (6.1)
奥斯本-沃森法 Osborne-Watson method (6.4)

B

巴特沃思滤波器 Butterworth filters (2.1),(4.6),(7.4)
巴特利特定理 Bartlett's theorem (4.6)
把连续函数数字化 digitiging continuous functions (12.1)
班德勒-斯里尼法斯安-查雷兰布斯法
Bandler-Srinivasan-Charalambous method (6.4)
半正定矩阵 positive semidefinite matrixb (6.1)
半格形 half-lattice (4.3),(4.4)
伴随网络 adjoint network (6.9)
伴随网络法 adjoint network method (6.4),(6.9)
包迹延迟 envelope delay (1.1),(3.1)
贝塞尔多项式 Bessel polynomial. (2.2),(4.6)
贝塞尔滤波器 Bessel filter (2.2)
逼近［近似］ approximation (1.3),(6.2)
逼近函数 approximation function (6.2)

逼近理论 approximation theory (2.0)
变换器 inverters (5.2),(5.4),(5.5)
变量向量 variable vector (6.1)
标准 z 变换 standard z-transform (12.1)
标准部件(积木式部件) building blocks (9.3),(12.1)
表征 characterigation (1.1),(10.4)
并联型递归数字滤波器 recursive digital filter in parallel form (12.1)
病态 ill-conditioning (3.5)
波导变量器最优化 waveguide transformer optimization (6.4)
波阻抗 wave impedance (7.1)
波灵敏度 wave sensitivities (6.9)
薄膜集成电路 thin-film integrated circuits (9.7)
补偿函数 penalty function (6.3)
不可通约元素 noncommensurate elements (6.0)
不接地的电感模拟 floating inductance simulation (8.5)

C

C 式典型串列节的等效梯形 ladder equivalents of the C-type canonical tandem section (3.2)
参量滤波器 parametric filters (2.3), (4.2), (习题 3.13)
参数（参量）parameter (6.1)
参数(参量)向量 parameter vector (6.1)
策[驱]动点综合 driving point synthesis (7.1)
插入衰减法 insertion-loss method (4.0),(4.2)
插值法 interpolation methods (6.5)
成本函数 cost function (6.1)
乘积法 product method (3.5)

重建滤波器（参看信号分离滤波器） reconstruction filter (10.3)
抽头延迟线滤波器 tapped delay-line filter (12.1)
传输线 transmission-line (7.1)
传输线等效电路 transmission-line equivalent circuits (表7.4)
传输零点 transmission zeros (1.4),(4.4)
传播常数(机械的) propagation constants (mechanical) (5.3), (5.6)
串联型递归数字滤波器 recursive digital filters in series form (12.2)
差分方程 difference equation (12.1)
磁致伸缩 magnetostriction (5.1)
磁致伸缩换能器 magnetostritive transducers (5.1),(6.2),(5.3)
衰减极点 attenuation poles (5.5)

D

带阻[带除]滤波器 bandstop filter, band-elimination filters (1.2), (4.7)
带通滤波器 bandpass filter (1.2)
带通滤波器函数 bandpass filter functions (2.3)
带通滤波器最优化 bandpass filter optimization (6.4)
戴雷克托-罗勒法 Director-Rohrer method (6.9)
单位元素 U. E., unit element (7.1)
单位(矩)阵 identity matrix (7.3)
单位采样时间间隔 unit sampling interval (12.1)
单片机械滤波器 monolithic mechanical filters (5.1),(5.6)
单纯形法 simplex method (6.6)
单峰函数 unimodal function (6.1)
单端放大器 single amplifier (8.3)

导纳矩阵 admittance matrix (6.9)
导纳变换器 admittance inverter (7.4)
等式约束 equality constraints (6.1)
等波纹阻带滤波器衰减响应 equal ripple stopband filter loss response (2.1)
等波纹带通延迟 equal-ripple bandpass delay (2.3)
等波纹通带 equal-ripple passband (2.1)
等波纹通带滤波器 equal-ripple passband filter (2.1),(2.3)
等波纹通带滤波器衰减响应 equal-ripple passband filter loss response (2.1)
等波纹逼近 equal ripple approximation (2.2),(2.3)
等波纹群延迟逼近 equal-ripple group-delay approximation (2.2
等效 equivalence (4.2),(4.6)
等效电路 equivalent circuits (4.1),(5.2),(5.4),(5.5)
等效阻抗 equivalent impedance (10.4)
等效非时变网络 equivalent time-invariant network (10.4)
等效极点位置 equivalent pole positions (9.3)
等效质量 equivalent mass (5.2),(5.3),(5.5)
低通向带阻变换 lowpass-to-bandstop transformation (1.5)
低通向带通变换 lowpass-to-bandpass transformation (1.5),(4.6),(5.4),(11.3)
低通向高通变换 lowpass-to-highpass transformation (1.5),(8.1)
低通原型滤波器 lowpass proto-type filter (7.4)
低通衰减函数 lowpass loss functions (2.1)
低通滤波器 lowpass filter (1.2)
低通滤波器指标 lowpass filter specifications (2.1)
递归数字滤波器 recursive digital filters (12.1)
递变截面(或称锥形递变)线 tapered line (9.1),(9.2)
典型的串列节网络 canonical tandem realization (3.2)
典型的衰减指标 typical loss specification (1.2)

典型指标 typical specification (1.2)
电压放大器 voltage amplifier (8.1)
电压转移比 voltage-transfer ratio (8.3)
电压控制电压源 VCVS (voltage-controlled voltage source) (8.1), (9.3)
电压输出器 voltage follower (8.3)
电抗二端对网络 reactance two-port (1.4)
电抗变换 reactance transformation (1.5)
电抗梯形 reactance ladders (3.2)
电容比 capacitance ratio (4.1)-(4.4),(4.7)
电容矩阵 capacitance matrix (7.3)
电感矩阵 inductance matrix (7.3)
电感模拟 inductance sinulation (8.5)
电感器 inductors (3.3)
叠混(折叠)失真 foldover distortion (10.2)
定标 scaling (1.5)
对约束寻求变换 transformations for constraints (6.3),(习题 6.3)
对连续滤波器的数字近似(逼近) approximation to continuous filters (12.1)
对称 symmetric (3.2)
对称二端对网络 symmetric two-port (3.2)
对称矩阵 symetry matrix (6.2)
对称滤波器 antimetric filters (习题 3.3)
多级多路复用 multistage multiplex (10.3)
多级放大器 multi-amplifier (8.4)
多项式逼近 polynomial approximation (6.4),(习题 6.10)
多峰函数 multimodal function (6.1)
多通带滤波器 multiple-passband filters (11.2)
多路复用滤波器 multiplex-filter (10.3),(习题 10.12)

E

二阶目标函数 quadratic objective function (6.2),(6.6)

F

反切比雪夫滤波器 inverse Chebyshev filter (2.1)
反相式电压放大器 inverting type voltage amplifier (8.1)
反射系数 reflection coefficients (1.4),(3.1)
反射系数灵敏度 reflection coefficient sensitivity (6.9)
反射系数的零点 zeros of reflection coefficients (3.1)
反射零点 reflection zeros (1.4)
范数 norms (6.2),(6.7)
防护频带滤波器 guard band filter (12.1)
非对称带通滤波器 asymmetric bandpass filter (1.2)
非线性方程 nonlinear equations (6.2)
非线性规划 nonlinear programming (6.1)
非单值的 nonunique (6.1)
非递归余弦滤波器 nonrecursive cosine filter (12.5)
非递归数字滤波器 nonrecursive digital filter (12.1), (12.5), (12.6)
非理想运算放大器 nonideal operational amplifier (8.1)
菲亚库-梅科密克法（序列式无约束极小化方法 (SUMT)) Fiacoo-McCormick method (6.3),(6.4),(习题 6.9)
菲博纳西搜索 Fibonacci search (6.5)
费尔特凯勒方程 Feldtkeller equation (1.4), (2.1)
费尔特凯勒能量方程 Feldtkeller energy equation (3.1)
分布元件 distributed elements (1.1)

分布网络灵敏度 distributed network sensitivity (表 6.2)
分布网络最佳化 distributed network optimization (6.4),(6.8)
分布-集总-有源滤波器 distributed-lumped-active filter (DLA) (9.3)
弗莱彻-里夫斯法 Fletcher-Reeves method (6.7)
弗莱彻-鲍威尔-戴维敦法 Fletcher-Powell-Davidon method (6.7), (6.8)
幅值响应 magnitude response (12.1),(12.5)
福斯特形式 Foster form (4.2)
负电阻 negative resistances (8.6)
负电容器 negative capacitor (8.5)
负阻抗变换器 (NIC) negative impedance converters (9.3)
负梯度 negative gradient (6.5),(6.7)
复卷积 complex convolution (12.1)

G

杆颈机械滤波器 rod-neck mechanical filters (5.1),(5.4)
高通滤波器 highpass filter (1.2),(12.5),(习题 12.1)
格形[格形网络] lattices (3.2),(4.3)-(4.6)
格形网络设计 lattice network design (3.4)
共轭方向 conjugate directions (6.7)
共轭梯度法 conjugate gradient method (6.7)
关于参量约束的变换 transformations for parameter constraints (6.3)
广义巴特沃思函数 generalized Butterworth function (7.4)
广义切比雪夫函数 generalized Chebyshev function (7.4)
广义阻抗变换 generalized impedance converter function (8.5)
归一化 normalization (1.5)

规定函数 specified function (6.2)
指标 specification (6.2),(6.4)
硅集成电路 silicon integrated circuits (9.7)
过渡带 transition bands (1.2)

H

H的零点 zeros of H (3.1)
海赛矩阵 Hessian matrix (6.1),(6.7),(6.8)
海赛逆矩阵 inverse Hessian matrix (6.7)
哈明加权 Hamming weighting (12.5)
哈明窗 Hamming Window (12.5),(习题 12.8)
赫维茨多项式 Hurwitz polynomial (1.4)
横向电磁波滤波器 TEM (transverse electromagnatic) filters (7.0)
横向 $\overline{RC}$ 滤波器 transversal $\overline{RC}$ filter (9.5)
横向滤波器 transversal filter (12.1)
互补数字滤波器 complementary digital filters (12.1)
幻象零点 phantom zeros (8.3)
环形调制器 ring modulator (10.3)
换能器 transducers (5.2),(5.3)
换能器功率比 transducer power ratio (1.4)
换能器函数 transducer function (1.4),(3.1)
换能器损耗 transducer loss (2.1)
黄金分刈搜索 Golden Section search (6.5)
回转器 gyrators (9.3)
混合矩阵 hybrid matrix (6.9)
混合矩阵灵敏度 hybrid matrix sensitivity (6.9)
混淆[叠混] aliasing (10.2),(12.1)

J

机电回转器 electromechanical gyrator (5.2)
机电模拟 electromechanical analogies (5.2)
机电耦合系数 electromechanical coupling coefficient (5.3), (5.4)
机械示意图 mechamical schematic diagrams (5.2)
机械实物电路图 mechanical pictorial diagrams (5.2)
机械谐振器 mechanical resonators (5.6)
机械滤波器 mechanical filter (5.1),(5.7)
基本的低通和高通式节 basic lowpass and highpass type sections (3.3)
激励向量 excitation vector (6.9)
吉布斯现象 Gibbs phenomenon (12.5)
级联(链接)形式 cascade form (8.1)
极大极小逼近 minimax approximation (2.0), (6.2),(6.4),(6.6), (6.9)
极大极小最佳性 minimax optimality (6.4)
极点对Q pole-pair Q (8.1)
极点对Q灵敏度 pole-pair Q sensitivity (8.2)
极点频率 pole-frequency (8.1)
极点频率灵敏度 pole-frequency sensitivity (8.2)
集总元件 lumped elements (1.1)
几何对称带通滤波器 geometrically symmetric bandpass filter (1.2),(1.5)
计算机辅助设计 computer-aided design (6.0),(10.5)
计算机模拟 computer simulation (12.6)
寄生效应 parasitic effects (9.3)

寄生谐振 spurious resonance (4.7)
假(寄生)信号响应 spurious response (4.5),(4.7)
假最小值 false minimum (6.3),(6.6)
鉴别参数 discrimination parameter (2.1)
交变调制 alternation modulation (11.3)
阶跃响应 step response (1.4)
阶梯调制 staircase modulation (11.3)
节点导纳矩阵 nodal admittance matrix (6.9)
镜[影]象参数法 image-parameter method (4.0)
镜象参数滤波器 image-parameter filter (10.4)
局部极小 local minimum (6.1),(6.3)
具有 jω 轴零点的双二阶有源滤波器 biquadratic active filters with jω-axis zeros (8.3),(8.4)
具有有限衰减极点的滤波器 filters with finite loss poles (2.1)
卷积积分 convolution integral (1.1)
均匀线 uniform line (7.1)

K

开关调幅器(参看环形调制器) switched modulators (10.3)
开关滤波器 switched filters (10.1)
考乌尔典型电抗二端对网络 Cauer's Canonical two-port reactance networks (3.2)
可行区域 feasible region (6.1),(6.3)
导纳型模拟 mobility analogy (5.2)
可调的带通滤波器 tunable bandpass filter (11.3),(11.4)
可控信号源模型运算放大器 controlled source model operational amplifier (8.1)
可微函数的最佳性条件 optimality conditions for differentiable

function (6.1)
库恩-塔克关系 Kuhn-Tucker relations (6.3),(6.4)
库奥达的等效性 Kuroda's identities (7.2)

L

拉普拉斯变换 Laplace transforms (1.1)
兰杰文换能器 Langevin transducer (5.3),(5.4)
理查兹变换 Richards' transformation (7.1)
理查兹定理 Richards' theorem (7.1),(9.2)
理想运算放大器 ideal operational amplifier (8.1)
理想低通衰减响应 ideal lowpass loss response (2.1)
理想低通滤波器 ideal lowpass filter (2.1)
理想变量器 ideal transformer (4.2),(4.3)
关连参考方向 associated reference directions (6.9)
连续信号滤波器 continuous-signal filter (1.1)
链 [ABCD] 矩阵 chain matrix (ABCD matrix) (3.1),(习题 6.8)
量化 quantization (12.4)
灵敏度 sensitivity (6.9)
灵敏度之间的关系 relation between sensitivity (8.2)
灵敏度公式 sensitivity formulas (表 6.2)
灵敏度(分量)向量 sensitivity vector (6.9)
零阶保持 zero-order hold (12.4)
龙梅尔多项式 Lommel polynormial (2.2)
滤波器电路 filter circuits (3.2)
滤波器设计中的数值病态 numeritical ill-conditioning in filter design (3.5)
滤波器设计过程 filter design process (1.3)
滤波器的变换 transformation of filters (1.5)

滤波器指标 filter specifications (1.2),(6.4)
滤波器衰减响应 filter loss response (2.1),(2.3)
滤波器最优化 filter optimization (6.4),(6.8)

M

模拟电感 simulated inductances (8.5)
模型搜索 pattern search (6.6)
默比乌斯变换 Moebius transformations (1.5)
脉冲(冲激)不变的变换 impulse invariant transform (12.1)
脉冲序列阻抗 pulse sequence impedance (10.4)
脉冲阻抗函数 pulse impedance functions (11.5)
脉冲(冲激)响应 impulse response (1.1),(1.4)
脉冲调制 pulse modulation, impulse modulation (11.3), (12.1)
脉幅调制 (PAM) pulse amplitude modulation (10.1)-(10.5)
脉码调制 (PCM) pulse code modulation (10.1),(10.3)-(10.5)
目标函数 objective function (6.1),(6.2)

N

N-通络滤波器 N-path filter (11.0)
挠曲谐振器．线机械滤波器 flexural resonator-wire machanical filter (5.2),(5.4)
牛顿法 Newton method (6.2),(6.7),(6.8)
扭转杆-线机械滤波器 torsional rod-wire mechanical filters (5.4), (5.5)

O

耦合线 coupling wires (5.3)

耦合线传输 coupled transmission lines (7.3)

P

盘-线机械滤波器 disk-wire mechanical filters (5.1),(5.4),(5.5)
匹配 z 变换 matched z-transform (12.3)
可通约网络 commensurate networks (6.0)
可通约传输线 commensurate transmission lines (7.1)
偏导数 partial derivatives (6.1)
片-线机械滤波器 plate-wire mechanical filters (5.1)
频带变换 frequency band transformation (12.1)
频率分隔制多路复用 frequency devision multiplexing (10.3)
频率灵敏度 frequency sensitivity (6.9)
频率响应 frequency response (12.1)
频率响应灵敏度 frequency response sensitivity (8.2)
频率标度弯曲 frequency scale warping (12.2)
频域加权 frequency-domain weighting (12.0)
品质因数 (Q) (参看极点对Q) quality factor (Q) (4.1), (4.5), (4.7),(5.1),(5.4)
平坦延迟 flat delay (1.2)
平行耦合谐振滤波器 parallel-coupled resonator filter (7.4)
平衰减 α_0 flat loss, α_0 (2.1)
驻点 stationary point (6.2)-(6.4)
泊松求和公式 Poisson summation formula (10.2)
违反指标和满足指标 violated and satisfied specification (6.4)

Q

Q不变量双二阶有源滤波器 Q-invariant biquadratic active filters

(8.3),(8.4)
起点 starting point (6.3)
桥接线 bridging wires (5.5)
切比雪夫多项式 Chebyshev polynomial (2.1)
切比雪夫阻带 Chebyshev stopband (2.1)
切比雪夫逼近 Chebyshev approximation (2.0),(6.2)
切比雪夫滤波器 Chebyshev filters (2.1),(7.4),(习题4.1)
求导（数） derivation (6.9)
求和放大器 summing amplifier (8.4)
取[采]样 sampling (10.2)
取[采]样间隔 sampling interval (1.1)
取(采)样数据系统 sampled data system (10.3),(10.4)
取(采)样数据滤波器 sampled data filters (11.3),(11.5)
权重[加权]函数 weighting function (5.2)
全局极小值 global minimum (6.1),(6.3),(习题6.1)
全通节 allpass section (4.7)
全通函数 allpass functions (1.4),(2.1)
群延迟 group delay (1.4),(6.9)
群延迟计算 group delay computation (6.9)

R

RC:CR 变换 RC:CR transformation (8.1)
RC 调谐放大器 RC tuned amplifier (9.2)
RC 滤波器 RC filter (12.1)
$\overline{RC}$ 传输线 $\overline{RC}$ transmission line (9.1)
$\overline{RC}$ 陷波滤波器 $\overline{RC}$ notch filter (9.2)
$\overline{RC}$ 滤波器 $\overline{RC}$ filter (9.2)
柔量 [顺从性] compliance (5.2)-(5.4)

锐截止滤波器 sharp cut-off filter (8.5)

S

S 平面 s-plane (7.1)
S^2 的双线性映射(映象) bilinear mapping of S^2 (3.5)
设计 design (12.0)
设计变量 design variable (6.1)
石英机械滤波器 quartz mechanical filter (5.1),(5.6)
时分制 time division (10.3)
时分制开关 time division switching (10.3),(习题 10.9)
时分制多路复用 time division multiplexing (10.3)
时间响应 time response (1.4)
时变网络 time-varying networks (10.1)
时域加权 time-domain weighting (12.0)
时域冲激响应 time-domain impulse response (9.5)
时域逼近 time-domain approximation (1.4)
实物电路图 pictorial diagram (5.3),(5.4),(5.6)
梳形滤波器 comb filters (11.4),(11.5)
梳形陷波滤波器 comb-notch filter (11.4),(11.5)
数字计算机 digital computer (4.2)
数字转移函数中的零点 zero in digital transfer functions (12.3), (12.4)
数字滤波器 digital filter (1.1)
数/模转换器 digital-to-analog converter (1.1)
数学规划 mathematical programming (6.1)
双二阶 biquadratic (8.1)
双二阶有源滤波器 biquadratic active filters (8.3),(8.4)
双线性 z 变换 bilinear z-transform (12.2)

双线性变换 bilinear transformation (11.3)
双端接载的LC滤波器 doubly terminated LC filters (8.5)
双端接载的电抗二端对网络 doubly terminated reactance two-port (3.2)
算术对称滤波器 arithmetically symmetric filter (1.2)
损失精确性 loss of accuracy (3.5)
衰减(损耗) loss (1.1),(1.4),(3.1)
衰减极点 loss poles (1.4)

T

泰勒级数 Taylor series (6.1)
弹簧质量系统 spring-mass systems (5.2)
汤姆森多项式 Thomson polynomials (2.2)
汤姆森滤波器 Thomson filter (2.2)
特性阻抗 characteristic impedance (7.1)
特性函数 characteristic function (1.4),(2.1),(3.1)
特勒金定理 Tellegen's theorem (6.9)
梯形 ladder (3.2),(4.2),(4.4),('.7)
梯形节的格形等效 ladder-lattice equivalent (4.3)
梯形等效 ladder equivalence (4.5)
梯度向量 gradient vector (6.1),(6.8)
梯度极小化法 gradient minimazation methods (6.7)-(6.9)
剃刀搜索 razor search (6.4),(6.6)
铁氧体换能器 ferrite transducer (5.3)
通带 passbands (1.2)
通带指标 passbands specification (1.2),(6.4)
通带指标和阻带指标 upper and lower specification (6.4)
同步采样 synchronous sampling (12.0)

同相式电压放大器 noninverting type voltage amplifier (8.1)
凸区域 convex region (6.1),(习题 6.2)
凸规划 convex programming (6.1),(6.3),(6.4),(习题 6.2)
凸函数 convex function (6.1),(习题 6.1)
图形变换 graph transformation (7.3)
椭圆函数 elliptic filters (2.1)

W

W 平面 W-plane (7.1),(9.4)
外部补偿运算放大器 external compensation operational amplifier (8.1)
网络函数 network function (1.1),(2.0)
网络响应 network response (6.2)
网络最优化 network optimization (6.0)
微波变量器最优化 microwave transformer optimization (6.4)
微波滤波器 microwave filters (7.0)
微波滤波器最优化 microwave filter optimization (6.4),(6.8)
围绕 contour (6.1)
伪电抗 pseudo-reactance (4.7)
温度特性 temperature characteristics (5.0)
稳定性条件 stability condition (1.1)
稳定系数 stability margin (8.2)
无损耗(零衰减)频率 zero-loss frequencies (1.4)
无源 passive (10.1),(10.3),(10.4)
误差准则 error criterion (6.1),(6.2)

X

系数加权 coefficient weighting (12.5)

系数灵敏度 coefficient sensitivity (8.2)
系数量化 coefficient quantization (12.4)
下降向量 descent vector (6.7)
线性时变网络 linear time-varying networks (10.1)
线性组合 linear combination (6.3),(6.4)
线性规划 linear programming (6.1),(6.4)
线性变量网络 linear variable networks (10.4)
线性周期时变网络 periodically linear time-varying networks (10.1)
线性相位函数 linear-phase functions (2.2)
线性相位通带带通滤波器 linear-phase passband bandpass filter (2.3)
线性相位数字函数 linear-phase digital functions (12.1)
线性相位滤波器 linear phase filter (2.2)
陷波[窄带]滤波器 notch filter (习题 6.12)
响应向量 response vector (6.9)
响应规划 response specifications (6.2),(6.4)
响应超曲面 response hypersurface (6.1)
相位 phase (1.1),(1.4),(3.1)
相延迟 phase delay (1.1)
相速 phase velocity (7.1)
消去法 elimination methods (6.5)
消除约束 elimination of constraints (6.3)
信号分用滤波器 demultiplex filter (10.4),(10.5)
谐振转移 resonant transfer (10.3),(10.4),(习题 10.9)
谐振转移回路 resonant transfer circuits (11.5)
斜度参数 slope parameter (7.4)
性能指标 performance index (6.1)
序列式无约束极小化方法 (SUMT) sequential unconstrained minimization technique (6.3),(6.4),(习题 6.9)

选择性参数 selectivity parameter (2.1)

Y

压电效应 piezoelectric effect (5.2)
压电换能器 piezoelectric transducers (5.2),(5.3)
雅可比矩阵 Jacobian matrix (6.2)
严格凸函数 strictly convex function (6.1)
样板函数 template functions (2.1),(2.3)
样值保持[采样和保持]电路 sample and hold circuit (10.3), (10.4),(习题 10.6)
一般电抗二端对网络 general two-port reactance network (3.1)
一维最优化 one-dimensional optimization (6.5)
变换变量法 transformed variable method (3.6)
影象消除 image cancellation (11.1)
映射方法 mapping techniques (7.4)
用等效阻抗设计 design by equivalent impedance (10.5)
尤斯利迪安范数 Euslidean norm (6.7)
有关参量的边界 bounds on parameters (6.3)
有源 active (10.3)
有源 RC 滤波器 active RC filters (8.0)
有源元件灵敏度 active element sensitivity (表 6.2)
有源回转器 active gyrator (8.5)
元件值的灵敏度 sensitivity of the element values (3.5)
原型滤波器 prototype filter (1.5),(7.4)
约束[制约] constraints (6.1),(6.3)
约束边界 constraint boundary (6.1)
约束向量 constraint vector (6.1)
约束问题的最优性条件 optimality conditions for constrained pro-

blems (6.3)
运算放大器 operational amplifier (8.1)
运算放大器$\overline{RC}$滤波器 operational amplifier $\overline{RC}$ filters (9.2),(9.3)

Z

Z变换 z-transform (1.1),(1.3),(12.1)
在约束条件下的最优化 optimality subject to constraints (6.3)
增量的参量变化 incremental parameter change (6.1), (6.2),(6.7)
窄脉冲采样 narrow-pulse sampling (11.5)
窄带通特性 narrow bandpass characteristies (2.3)
窄带综合 narrow-band synthesis (5.4)
折叠线机械滤波器 folder-line mechanical filter (5.4)
真极小[正常极小] proper minimum (6.1)
振荡模 modes of oscillation (4.1)
正交N通路滤波器 quadrature N-path filters (11.3)
正定 positive definite (6.1),(6.7)
正定矩阵 positive definite matrix (6.1),(6.7)
支路电压向量 branch voltage vector (6.9)
支路电流向量 branch current vector (6.9)
直接形式 direct form (8.1),(8.5)
直接搜索 direct search (6.6)
周期运行开关 periodically-operated switches (11.5)
周期转移函数 periodic transfer functions (11.3)
主极点解 dominant pole solutions (9.3)
转动式开关 rotary switch (11.5)
转换电容器组 commutated capacitor bank (11.5)
转换网络 commutated networks (11.5)
转移门 transfer gate (10.3)

转移函数 transfer function (1.1)
转移函数综合 transfer function synthesis (7.1),(7.4)
转置(行)向量 transposed (row) vector (6.1)
状态变量 state variable (11.5)
自然频率(自然模) natural frequencies (modes) (1.4),(3.1)
自然模 natural modes (1.4),(2.1)
阻抗水平 impedance level (4.1),(4.4)
阻抗变换器 impedance inverter (4.6),(7.4)
阻抗(诺顿)变换 impedance (Norton) transformation (3.3), (4.2)
阻抗矩阵 impedance matrix (6.9)
阻抗综合 impedance synthesis (7.1)
阻带 stopbands (1.2)
阻带指标 stopband specification (1.2),(6.4)
最[极]小值 minimum (6.1),(6.3)
最少电感滤波器 minimum-inductor filters (3.3)
最平带通延迟 maximally flat bandpass delay (2.3)
最平误差 maximally flat error (2.0)
最平通带带通滤波器 maximally flat passband bandpass filter (2.3)
最平通带滤波器衰减响应 maximally flat passband filter loss response (2.1)
最平逼近 maximally flat approximation (2.0)-(2.2)
最平群延迟多项式 maximally flat group-delay polynomials (2.2)
最小p乘法中的阻尼 damping in least pth method (6.8)
最小p乘海赛矩阵 least pth Hessian matrix (6.8)
最小p乘逼近 least pth approximation (6.2),(6.8),(6.9)
最优化 optimization (6.1)
最优性条件 optimality conditions (6.3),(6.4)
最陡下降 steepest descent (6.4),(6.7)